SHOUT
SHARE
IT

S. 1142. A.

MEMORIE
DI MATEMATICA E DI FISICA
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA
DELLE SCIENZE

TOMO XVII.

PARTE CONTENENTE LE MEMORIE DI MATEMATICA.

VERONA
DALLA TIPOGRAFIA DI LUIGI MAINARDI
MDCCCXVI.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

STATUTO

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE RESIDENTE IN MODENA.

1816.

I. La Società Italiana delle Scienze residente in Modena è composta di *Quaranta* Socj attuali, tutti Italiani, di merito maturo, e per Opere date in luce ed applaudite riconosciuto.

II. La scienza della natura è il grande oggetto, che la Società medesima si propone. Pubblicherà pertanto, sotto il titolo di *Memorie di Matematica e di Fisica*, le produzioni di chiunque de' Socj vorrà render pubblico negli Atti Sociali il frutto de' proprj studj.

III. De' quaranta Membri, uno sarà Presidente della Società, e la presidenza durerà sei anni. Questi può eleggersi e risiedere in una qualunque Città dell'Italia, ma in Modena esister deve sempre sotto gli ordini del Presidente una rappresentanza, e in Modena sempre si publicheranno gli atti della Società.

IV. Avrà la Società un Segretario, ed un Vicesegretario amministratore residenti in Modena. Il primo sarà partecipe di tutte le facoltà dei Quaranta, benchè non fosse uno d'essi, ed avrà diritto, non obbligo, di presentar Memorie da inserirsi negli Atti. Il secondo terrà il maneggio economico.

V. §. 1. Altra Classe vi avrà di Socj Emeriti in numero indeterminato. Essa è preparata a chiunque dei Quaranta, o per età avanzata, o per abituale mancanza di salute, o per altro motivo, non producesse verun suo lavoro in quattro consecutivi tomi delle Memorie sociali.

§. 2. Ma se ùn Socio attuale passasse negli Emeriti dopo aver posto otto Memorie ne' tomi sociali, in tal caso seguiterà a godere, quantunque Emerito, tutte le prerogative di Attuale.

§. 3. Che se un Socio Emerito ponga Memorie in tre tomi consecutivi, sarà restituito nel ruolo degli Attuali.

VI. Un' altra Classe, parimente indeterminata, comprenderà i Socj Onorarj. A questa saranno ascritti, previo l' assenso di ventuno almeno dei Quaranta, i Compilatori, eletti dal Presidente, degli elogj de' Socj attuali defunti. Inoltre, esso Presidente potrà aggregare a questa classe, nel suo sessennio, due Soggetti, non più, che avessero operato cosa a pro della Società, onde meritassero d' esserne onorati particolarmente.

VII. Ed altra Classe avrà finalmente il titolo di Socj Stranieri, stabilita per distinguere ed onorare il merito delle Scienze in qualunque parte fuori d' Italia. Sarà composta di dodici Soggetti, a ciascun de' quali verrà esibito in dono un esemplare d' ogni Volume, che uscirà in luce, delle Memorie Sociali.

VIII. Le aggregazioni alle classi de' Socj attuali e degli stranieri si faranno nel modo seguente. Per ogni posto che rimanga vacante, dovrà il Presidente, col mezzo del Segretario proporre sei nomi a ciascuno de' Socj attuali, il qual farà scelta d' uno, e lo indicherà per lettera al Segretario. Quel de' sei, che, entro il termine di due mesi dalla proposta, avrà più suffragj, s' intenderà aggregato, e la Compagnia sarà fatta opportunamente consapevole dell' acquistato Cooperatore.

IX. All' elezione del Presidente saranno invitati li Socj attuali con una lettera circolare del Segretario, al quale ognuno di essi farà tenere in iscritto la nomina del Socio da sè eletto a Presidente: e la pluralità de' voti, che arriveranno al Segretario, dentro il termine di due mesi dopo la data del circolare invito, determinerà l' elezione, che dovrà esser dal Segretario annunziata ai Membri votanti.

X. Ciascheduno dei Quaranta ha facoltà d'inserire negli Atti una scoperta utile, un'importante produzione, anche di persona non aggregata ma Italiana, purchè tal produzione, o scoperta sia giudicata degna degli Atti stessi anche da un altro Socio, il qual venga destinato segretamente dal Presidente di volta in volta all'esame della cosa presentata, ed il suo nome (quando approvi) si stampi insieme con quello del presentatore.

XI. Di questi Autori non Socj dovrà il Presidente aggiungere i nomi, segnati con asterisco, ai sei che presenta, a tenor dell'articolo VIII, per l'elezione d'un Socio attuale. Bensì questa nomina cesserà, dopo fatta sei volte, contate dalla pubblicazione d'ogni Memoria.

XII. Le Dissertazioni o Memorie da pubblicarsi ne'Volumi della Società, debbon essere scritte in lingua Italiana e in carattere chiaro. Il Segretario dovrà apporvi la data del recapito, acciocchè sieno stampate con essa in fronte e per ordine di tempo. Che se l'opera sia voluminosa, può l'Autore distribuirla in due o più parti pe'tomi susseguenti.

XIII. Tutto ciò che è destinato pegli Atti dev'esser nuovo, inedito, importante, ed analogo all'indole scientifica di questi Volumi, che non ammette sfoggio d'erudizione, nè moltitudine di note e di citazioni.

XIV. I fogli stampati di ciascun Volume non dovranno eccedere il numero di cento. Le Memorie soprabbondanti resteranno in deposito pel tomo susseguente, o saranno restituite agli Autori che le dimandassero. Bensì, nel caso di soprabbondanza, le Dissertazioni degli Autori non Socj dovranno cedere il luogo a quelle de'Socj.

XV. La Società non si fa risponsabile delle Opere pubblicate negli Atti. Ogni Autore dev'esser mallevadore delle cose proprie, come se le pubblicasse appartatamente.

XVI. Non permette peraltro la Società le invettive personali, e nè anche le critiche non misurate: sopra di che veglierà il Segretario, e ne farà inteso il Presidente per un acconcio provvedimento.

XVII. Il Socio attuale, Autore d'una Memoria o d'un Elogio, avrà in dono cinquanta esemplari della sua produzione, con frontispizio apposito, e con la numerazion delle pagine ed il registro ricominciati. Ad ogni altro Autore saranno corrisposte dodici copie. Qualunque Autore ne desiderasse di più, non sarà aggravato d'alcuna spesa per conto della composizion tipografica.

XVIII. Nell'atto di queste spedizioni sarà trasmessa ai Socj, che avranno mandato il voto per le elezioni, la dimostrazione stampata del numero de' suffragj toccati ad ogni Candidato, senza il nome però de' votanti, e così ancora i conti stampati dell'amministrazione tenuta dal Vicesegretario amministratore.

XIX. Alle principali Accademie estere sarà offerto in dono un esemplare d'ogni Volume delle Memorie sociali, che andrà successivamente uscendo alla luce.

XX. I doveri del Presidente, oltre i già mentovati, sono: mantener l'osservanza dello Statuto; eleggere il Segretario ed il Vicesegretario, qualunque volta sia di bisogno; avere in governo e cura ogn'interesse della Società; rivedere, almeno una volta all'anno, i conti dell'amministrazione del Vicesegretario, alla validità de' quali fa d'uopo l'approvazione e sottoscrizione di mano propria del Presidente: e ragguagliar finalmente il Successore dello stato degli affari nell'atto di rinunziargli l'Uffizio.

XXI. Dopo il Presidente, il Segretario è la Persona propriamente deputata a mantener corrispondenza con tutti i Membri della Società, e quasi centro, ove debbono metter capo tutte le relazioni Sociali. Egli invia le patenti d'aggregazione; presiede alla stampa, ai Correttori di quella, ed all'incision delle tavole; prende cura delle spedizioni, e d'ogni altro interesse della Società, sempre però con l'approvazione del Presidente. Egli deve pure tener registro d'ogni atto che importi; custodire i voti de' Socj per le elezioni, manifestandoli al Presidente ad ogni richiesta; e finalmente eseguir tutto ciò, che ne' precedenti articoli gli è addossato.

XXII. §. 1. Ad esempio delle principali Accademie, la Società Italiana delle Scienze avrà Membri pensionarj: e la pensione sarà d'annui zecchini ventiquattro, pagabili per metà allo spirare d'ogni semestre; non computate in verun caso, sia di morte, o di rinunzia, o di transito negli Emeriti, le frazioni di semestre.

§. 2. Saranno capaci della pensione li tre più anziani, e di permanenza non interrotta, nel ruolo de' Socj attuali; sin a tanto però che rimangano nel ruolo medesimo.

§. 3. Qualunque volta l' eguaglianza d' età accademica renda ambigua la scelta d'uno o più Pensionarj; sarà tolta l'ambiguità concedendo la preferenza alla maggior età naturale. Nel qual caso, il Segretario chiederà a ciascun de' coetanei come sopra, documento legale dell'epoca di sua nascita; e chi non lo faccia a lui pervenire entro mesi tre dopo la domanda, s'intenderà che rinunzj alla pensione.

§. 4. Due Socj (sia ciascun d' essi attuale o emerito) potranno inoltre goder la pensione, loro vita naturale durante, quando siano autori ciascuno di dieci o più Memorie stampate ne' Tomi Sociali, il valor delle quali venga giudicato degno di tal premio dalla pluralità assoluta de' Socj attuali, a proposizione del Presidente; ovvero dalla pluralità relativa, quando si tratti di giudicare del merito relativo fra più Candidati.

§. 5. In ambi questi partiti le opinioni de' Socj resteranno sempre segrete, ed a sola notizia del Presidente e del Segretario: si pubblicherà unicamente il numero de' suffragj a favore di ciascun Candidato, siccome è prescritto per le elezioni nell'articolo XVIII.

§. 6. Avranno titolo di *Pensionarj anziani* li tre del §. 2; di *Pensionarj giubilati* li due del §. 4.

§. 7. Potrà il Pensionario anziano passare a goder la pensione come giubilato, sotto le condizioni prescritte dal §. 4, e quando l'un de' due posti sia vacuo.

XXIII. A compensazion delle spese, che incontrano i

Quaranta ne' porti di lettere per cagion della Società, ogni anno, nel mese di Gennajo, sarà fatto l'esame, onde riconoscere i Membri attuali, che avranno corrisposto a tutte le lettere del Presidente e del Segretario nel corso dell'anno antecedente, e dentro li rispettivi termini di tempo in esse specificati; ciascuno de' quali Socj avrà diritto di esigere zecchini tre dalla cassa della Compagnia.

XXIV. §. 1. Ogni volta, che la forza pecuniaria della stessa Società lo consenta, si esporranno programmi al concorso pubblico. Risoluto ciò dal Presidente, il Segretario inviterà li Socj attuali a proporre argomenti. Questi esser dovranno, o Fisici, o Matematici, o Fisico-Matematici, o in qualunque modo giovevoli a queste scienze, e sempre applicabili ad utile general dell' Italia. Il Segretario li manderà stampati a ciaschedun Socio, pretermettendo quelli che uscissero dalle condizioni ora prescritte. Ogni Socio spedirà al Segretario il proprio suffragio per la scelta dell'argomento, e dichiarerà insieme qual premio reputi conveniente e qual tempo alla facitura ed alla presentazione delle Memorie. Quel tema che avrà più suffragj, sarà adottato: nel caso di parità di voti, deciderà la sorte.

§. 2. Tosto si comunicherà alla Compagnia l'argomento coronato, ed il numero de' suffragj riscossi da ogni argomento. Nell'atto stesso sarà richiesto ciaschedun Socio attuale di nominarne tre (di qualunque Classe, purchè Italiani, e dimoranti attualmente in Italia); quelli cioè, che ciascuno, osservato il quesito, stimerà più adattati a giudicar le Memorie che compariranno al concorso. Quei tre, ne' quali concorrerà maggior numero di suffragj (l'uguaglianza rimovasi con la sorte), s'intenderanno destinati a pronunziare il giudizio.

§. 3. Nelle occasioni statuite sopra, saranno come non fatte le risposte de' Socj, qualora non giungano al Segretario dentro quaranta giorni dalla data della rispettiva Circolare di Lui.

§. 4. Il nome de' Giudici eletti rimarrà a sola notizia del

Presidente e del Segretario: se non che ciascun di quelli sarà fatto consapevole della propria destinazione, con divieto di concorrere al programma e di manifestarla a chicchessia: niun di loro saprà i suoi Colleghi. Se qualcuno ricusasse, sarà sostituito il prossimo inferiore in quantità di voti. Ogni Giudice riceverà, dopo pronunziato il giudizio, un decente compenso dell'esclusion dal concorso.

§. 5. Il Presidente, considerati i pareri de' Socj, lo stato economico della Società, e l'importanza di moltiplicare i programmi, stabilirà la grandezza del premio, ed il termine da assegnarsi al concorso. Sarà tosto promulgato il problema per tutta Italia. Ogni Italiano, anche Socio, potrà concorrere: rimangono esclusi li soli tre Giudici. Le Memorie dovranno essere inedite, scritte in lingua Italiana, e pervenute nelle mani del Segretario entro il termine prescritto dal programma: il nome degli Autori sarà occulto: ogni Memoria porterà in fronte un motto, e sarà accompagnata da un biglietto suggellato, contrassegnato al di fuori dal medesimo motto, e contenente, al di dentro in maniera occultisima, nome, cognome, patria, domicilio e profession dell'Autore. Il mancare a qualunque delle antecedenti condizioni fa perdere il premio.

§. 6. Tosto che il concorso sia chiuso, il Presidente, veduto il numero e l'estensione delle Memorie, definirà il tempo, entro il quale ogni Giudice dovrà pronunziare il giudizio. Allora il Segretario trasmetterà le Memorie, tutte unite, ad uno de' Giudici: da cui restituite che siano, e notificato il proprio giudizio al Segretario, saranno da questo fatte pervenire ad altro Giudice; quindi con le regole stesse al terzo. Ogni Memoria coronata da un Giudice, sarà stampata col nome dell'Autore. Il premio sarà dato a quella Memoria, che venga coronata da tre, o da due Giudici. Se tutti e tre li giudizj fossero discordi, si dividerà il premio fra le tre Memorie coronate. Lo stesso si farà tra due coronate, qualora un Giudice neghi il premio a tutte le Memorie, e gli altri due non siano concordi. Che se fossero due li giudizj di negativa generale del premio, in tal caso il terzo giudizio non sarà di alcun valore: si notificherà alla Compagnia l'esito del giudizio e si passerà alla pubblicazione di nuovo programma, coi metodi stabiliti sopra.

§. 7. Ma quando sia conferito il premio, il Segretario annunzierà prontamente ai Socj ed a tutta l'Italia il nome degli Autori delle Memorie coronate, indicando quello cui spetta il premio. Esse Memorie saranno stampate senza indugio; se ne spedirà un esemplare ad ogni Socio, 12 della propria a ciascun degli Autori coronati, 38 di più al premiato: i rimanenti si esporranno a vendita pubblica.

CATALOGO

DE' MEMBRI COMPONENTI LA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE.

RUFFINI (Dottor Paolo) *Presidente*. Professore di Clinica, Medicina pratica e di Matematica applicata nella R. Università. *Modena*.

Socj Attuali.

ALDINI (Cav. Giovanni) *Milano*.

AVANZINI (Ab. Giuseppe) Professore di Fisica Teorica nella I. R. Università. *Padova*.

BONATI (Cav. Teodoro) *Pensionario Anziano*, Professor d'Idrostatica. *Ferrara*.

BORDONI (Antonio Maria) Professor emerito di Matematica nella R. Scuola Militare. *Pavia*.

BRERA (Cav. Valeriano Luigi) Consigliere Attuale di S. M. I. R. Direttore della Facoltà Medica e Professor di Clinica Medica nella I. R. Università. *Padova*.

BRUNACCI (Cav. Vincenzo) Professore di Matematica nell'Università. *Pavia*.

ÇALDANI (Floriano) Professor di Anatomia umana nella R. Università. *Padova*.

CANTERZANI (Cav. Sebastiano) *Pensionario Anziano*, e Professore emerito di Fisica Generale nella Pontificia Università. *Bologna*.

CARLINI (Francesco) Astronomo in Brera. *Milano*.

CARRADORI (Giovacchino). *Prato*.

CESARIS (Cav. Ab. Angelo) *Pensionario Anziano*, Astronomo R. alla Specola di Brera. *Milano*.

COLLALTO (Antonio). *Padova*.

CONFIGLIACCHI (Pietro). *Pavia*.

DANDOLO (Co. Vincenzo). *Milano*.

FABBRONI (Cav. Giovanni) Direttore e Amministratore della I. R. Zecca. *Firenze*.

FERRONI (Pietro) Professore di Matematica nella I. R. Università. *Pisa*.

FOSSOMBRONI (Cav. Vittorio) Segretario di Stato e Ministro degli affari esteri in Toscana. *Firenze*.

GALLINI (Stefano) Professore di Fisiologia, ed Anatomia comparata nella R. Università. *Padova*.

GIOVENE (Cav. D. Giuseppe) Presidente della Società Agraria. *Lecce*.

MAGISTRINI (Gio. Battista) Professore di Matematica sublime nella R. Università. *Bologna*.

MAIRONI (Daponte Giovanni) Reggente e Professore di Chimica e Storia Naturale nel R. Liceo. *Bergamo*.

MALACARNE (Gaetano) Professore di Fisica animale. *Padova*.

MANZONI (Antonio) Professore di Ostetricia nelle Scuole Speciali della Provincia. *Verona*.

MORICHINI (Dottor Domenico) Professore di Chimica. *Roma*.

MENGOTTI (Co. Francesco) Consigliere Attuale di S. M. I. R. *Venezia*.

MOSCATI (Co. Pietro) *Pensionario giubilato*. *Milano*.

PAOLI (Pietro) *Pensionario giubilato* Provveditore dell'Università. *Pisa*.

PARADISI (Co. Giovanni). *Reggio*.

PLANA (Giovanni).

PIAZZI (D. Giuseppe) Astronomo Regio. *Palermo*.

PINI (Cav. Ermenegildo) Ispettore generale di pubblica Istruzione. *Milano*.

RACAGNI (D. Giuseppe Maria) Professore emerito di Fisica nel R. Liceo. *Milano*.

RADDI (Giuseppe) Conservatore dell'I. R. Museo di Fisica e Storia Naturale. *Firenze*.

RE (Cav. Filippo) Professore di Agricoltura e Botanica nella Ducale Università. *Modena*.

RUBINI (Pietro) Professore di Medicina Clinica, Protomedico ec. *Parma*.

SANTINI (Giovanni) Astronomo R. alla Specola. *Padova*.

TARGIONI TOZZETTI (Ottaviano) Professor di Botanica, Agricoltura e Materia Medica. *Firenze*.

VASSALLI EANDI (Cav. Antonio Maria) Segretario perpetuo della R. Accademia di Scienze ecc. *Torino*.

VENTUROLI (Giuseppe) Professore di Matematica applicata nella R. Università. *Bologna*.

Divisione de' Socj Attuali in due Classi e indicazione de' Tomi, in cui hanno Memorie.

Classe Matematica.

Avanzini	17.
Bonati	2. 5. 8. 11. 15.
Bordoni	17.
Brunacci	14. 15. 16. 17.
Carlini	
Canterzani	2. 5. 8. 11. 14. 17.
Cesaris	2. 10. (pag. x) 11. (pag. 176) 14.
Collalto	. .
Ferroni	5. 7. 9. 10. 10. 11. 12. 14. 15. 16. 17.
Fossombroni	3. 7. 9. 12. 13. 17.
Magistrini	16. 17.
Mengotti	. .
Paoli	2. 4. 4. 6. 6. 8. 9. 9. 10. 13. 14. 17. 17.
Paradisi	. . .
Piazzi	11. 12. 12. 13.
Plana	17.
Racagni	10. 13. 16.
Ruffini	9. 9. 10. 12. 12. 13. 16. 17. 17.
Santini	17.
Venturoli	12. 14.

Classe Fisica.

Aldini	14.
Brera	14. 15. 16. 17. 17.
Caldani Floriano	7. 8. 12. 13. 16.
Carradori	.
Configliacchi	.
Dandolo	17.
Fabbroni	10. 11. 12. 13. 14. 16. 17.
Gallini	14. 15. 16. 17.
Giovene	8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 14. 14. 15 16.
Maironi Daponte	4. 9. 9. 11. 13. 14. 15. 16. 17.
Malacarne	.
Manzoni	17.
Morichini	17.
Moscati	1. 5. 10. 13. 17.
Pini	3. 5. 6. 6. 9. 10. 12. 13. 13. 14. 15.
Raddi	.
Re	12. 14. 17.
Rubini	14. 15.
Targioni Tozzetti	11. 13. 13. 14.
Vassalli Eandi	4. 8. 10. 10. 13. 14. 17.

Socj emeriti.

BRUGNATELLI (Luigi) Professore di Chimica nella R. Università. *Pavia*.

GIOBERT (Cav. Giannantonio) *Torino*.

ORIANI (Cav. Ab. Barnaba) Astronomo nel R. Osservatorio di Brera. *Milano*.

POLI (Giuseppe Saverio) Direttore del R. Museo di Storia Naturale. *Napoli*.

SCARPA (Cav. Antonio) Professore nella R. Università. *Pavia*.

STRATICO (Cav. Simone). *Milano*.

VENTURI (Cav. Gio: Batista) Membro del R. Istituto Italiano. *Reggio*.

VOLTA (Cav. Alessandro) Professore nella R. Università. *Pavia*.

Socj Onorarj.

BALBO (Prospero) Ambasciadore di S. M. il Re di Piemonte. *Madrid.*

BRAMBILLA (Paolo) Professore di Matematica nel R. Liceo. *Milano.*

CAGNOLI (Ottavio) *Verona.*

DELBENE (Benedetto) Membro del R. Istituto Italiano.

DELRICCO (P. Gaetano) delle Scuole Pie, Astronomo. *Firenze.*

LANDI (Cav. Ferdinando) *Piacenza.*

LOMBARDI (Antonio) Primo Bibliotecario di S. A. R. il Duca di Modena. *Modena.*

PINDEMONTE (Cav. Ippolito) Membro del R. Istituto Italiano. *Venezia.*

ROSSI (Cav. Luigi). *Milano.*

VIVORIO (Ab. Agostino). *Vicenza.*

Socj Stranieri.

ACHARD. *Berlino.*
BANCKS. *Londra.*
BODE. *Berlino.*
BURG. *Vienna.*
Co. CHAPTAL. *Parigi.*
DELAMBRE. *Parigi.*
GAUSS. *Gottinga.*
HAUY. *Parigi.*
HERSCHEL. *Londra.*
Co. LAPLACE. *Parigi.*
OLBERS. *Brema.*
ZACH. *Gota.*

Segretario.

FATTORI (Dottor Santo) Professore di Anatomia nella R. Università. *Modena.*

Vice Segretario Amministratore.

LOMBARDI (Antonio) Primo Bibliotecario di S. A. R. il Duca di Modena. *Modena.*

AVVISO

Gli Annali della Società Italiana dall'epoca 30 Giugno 1813 a tutto il 1816 in continuazione a quelli premessi al Tomo XVI della Società stessa vedranno la luce col 1.° Fascicolo del Tomo XVIII.

La figura chiamata dalla Memoria *Cossali* alla pagina 237 e seguenti del presente Tomo si trova alla successiva pagina 460 insieme a quelle relative alla Memoria *Magistrini*.

MEMORIE
DI
MATEMATICA

APPENDICE ALLA MEMORIA SOPRA UN NUOVO METODO GENERALE DI ESTRARRE LE RADICI NUMERICHE

Del Signor Paolo Ruffini.

Ricevuta li 30 *Settembre* 1812.

1. Chiamato P, come nella Memoria (N.° 15) (*) un dato numero intiero, ed *m* il grado della radice, che se ne vuole estrarre, sappiamo, che per ottenere il valore di $\sqrt[m]{P}$, conviene da prima dividere, cominciando dalla destra esso P di *m* in *m* cifre, e formare così dei membri. Denominato poi, come nel citato (N.° 15), G il primo di essi, conviene determinare la massima potenza *mesima* esatta, che contiensi in G, ed a tal fine abbiamo indicato di servirci della Tavola delle potenze; ma come faremo noi, se questa Tavola non si avesse in pronto, oppure se il grado *m* della radice fosse tanto alto, che le potenze corrispondenti non vi si contenessero? La presente Appendice esporrà alcune formole, e alcune riflessioni, mediante le quali potremo indipendentemente dalla Tavola agevolare la determinazione della potenza che si richiede.

2. Poichè la massima potenza *mesima* domandata non è che quella di uno dei numeri 1, 2, 3, ec. 9, si potrebbe

---

(*) Vedasi nel Tomo XVI alla pag. 373 Parte I.

elevare attualmente ciascuno di tai numeri alla podestà *mesima*, osservare tra quali due di queste potenze esso G fosse prossimamente contenuto, e la minore tra le accennate due sarebbe la massima potenza *mesima* domandata: trovando per esempio $6^m < G > 7^m$, direi che 6^m è la potenza richiesta. Ma potremo abbreviare questa operazione col trovare a principio la potenza 5^m; poichè se si vede $G < 5^m$, potrem tralasciare la considerazione delle potenze de' numeri 6, 7, 8, 9, e vedendosi $G > 5^m$, si tralasceranno le potenze degli altri 1, 2, 3, 4.

3. In conseguenza di quello, che si è ora detto (N.° 2), apparisce, che sarà vantaggiosa al nostro intento la pronta, e facile determinazione di una potenza esatta qualunque del 5. Egli è perciò, che sonosi costruite le annesse formole (LXX), (LXXI); poichè per mezzo della prima di esse trovasi una qualunque potenza dispari del 5, e per mezzo della seconda se ne ritrova una qualunque pari. Tali formole sono costruite in modo, che suppongonsi note le prime potenze $5^0 = 1$, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$; ponesi quindi m numero intero positivo, e tale che renda $2m - 1 > 3$, $2m > 4$, onde essere deve $m > 2$; l'andamento in fine delle due serie costituenti le formole, per poco che si riguardi, è assai facile a riconoscersi, e potrà perciò ognuno prolungarle, e troncarle opportunamente giusta i diversi valori di m, avendo sempre l'avvertenza, che non si debbano conservare se non se i termini, i quali risultano positivi. L'andamento costante delle due serie comincia soltanto dai termini, che sono moltiplicati per 10^6; e le espressioni (LXXII), (LXXIII) rappresentano le formole generali de' termini, che nelle serie (LXX), (LXXI) vanno soggetti all'andamento indicato. Si rifletta, che la lettera n nella formola (LXXII) esprime un intiero > 0, e $< \frac{m}{5}$, e nella (LXXIII) un intiero > 0, e $< \frac{m+1}{5}$.

1.° Vogliasi per esempio la potenza 15^a del 5 . Servendomi perciò della formola (LXX), faccio $2m - 1 = 15$, e traendo da ciò $m = 8$, pongo nella serie questo numero 8 in vece di m. Da tale sostituzione verrà

$$5^{15} = 5^3 + 3(5^0 + 5^2 + 4.5^4)\,10^3 + 3^2(3.5^1 + 3.5^3)\,10^6 + 3^3.5^0.10^9.$$

Ora determiniamo i valori

$$3^3.5^0 = 27.1 = 27,$$
$$3^2(3.5^1 + 3.5^3) = 9(3.5 + 3.125) = 3510,$$
$$3(5^0 + 5^2 + 4.5^4) = 3(1 + 25 + 4.625) = 7578,$$
$$5^3 = 125.$$

Sostituisco, e per la natura delle potenze del 10 avremo

$$5^{15} = \left.\begin{array}{r} 27000000000 \\ 3510000000 \\ 7578000 \\ 125 \end{array}\right| = 30517578125.$$

Poichè nelle nostre formule gli esponenti del 10 vanno sempre crescendo di 3 in 3, potremo, sopprimendo gli zeri, che determinano le potenze del 10, agevolare il calcolo, con lo scrivere, come nell'esempio supposto i numeri trovati 27, 3510, 7578, 625 nel modo qui sotto accennato, cioè in maniera che, posto nella prima linea orizzontale il primo numero 27, nella seconda si ponga il secondo 3510, e le tre ultime cifre 510 di questo rimangano senz'averne alcun'altra di sopra, il terzo 7578 si scriva nella linea terza, e le ultime sue tre cifre 578 non abbiano alcun'altra cifra di sopra; e così in progresso: poscia si sommino tutti questi numeri così scritti, e il risultato che se ne ottiene, sarà la potenza richiesta, nel caso nostro il valore di 5^{15}.

$$\begin{array}{l} 27 \\ \;\,3510 \\ \qquad\;\; 7578 \\ \qquad\qquad\;\; 625 \\ \hline 5^{15} = 30517578625. \end{array}$$

2.° Sia per secondo esempio domandata la potenza 26^a del 5 . Fatto perciò $2m = 26$, e quindi $m = 13$, dalla formola (LXXI) otterremo $5^{26} = 625 + 3\,(5 + 10\,.\,125)\,10^3 + 9 \times (9 + 8\,.\,25 + 28\,.\,625)\,10^6 + 27\,(21\,.\,5 + 35\,.\,125)\,10^9 + 81 \times (20 + 10\,.\,25 + 5\,.\,625)\,10^{12} + 243\,.\,5\,.\,10^{15}$; ma effettuando le moltiplicazioni, e riduzioni, si ricava

$243\,.\,5 = 1215$,
$81\,(20 + 10\,.\,25 + 5\,.\,625) = 274995$,
$27\,(21\,.\,5 + 35\,.\,125) = 120960$,
$9\,(9 + 8\,.\,25 + 28\,.\,625) = 159381$,
$3\,(5 + 10\,.\,125) = 3765$
625.

Dunque scrivendo questi risultati con la regola sovraesposta, e poi sommandoli otterremo nella somma, che risulta, il chiesto valore di 5^{26}.

$$\begin{array}{r}
1215 \\
274995 \\
120960 \\
159381 \\
3765 \\
625 \\
\hline
5^{26} = 1490116119384765625\,.
\end{array}$$

3.° Supposto $2m = 36$ si domanda quali siano gli ultimi termini nella corrispondente serie (LXXI). Presa perciò la formola (LXXIII), siccome deve essere l'intiero $n < \frac{m+1}{5}$, e però nel caso nostro $< \frac{19}{5}$ il massimo valore, che potrà acquistare n sarà 3, e per conseguenza otterremo gli ultimi termini domandati, potendo in essa (LXXIII) $m = 18$, ed $n = 3$. Tali termini adunque saranno

$$3^6 \left(\frac{(18-10)(18-11)\ldots(18-14)}{1\,.\,2\ldots5}\,5^0 + \frac{(18-11)(18-12)\ldots(18-15)}{1\,.\,2\ldots5}\,5^2 + \frac{(18-11)(18-12)\ldots(18-16)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots6}\,5^4 \right) 10^{18} +$$

$$3^7 \left(\frac{(18-12)(18-13)\ldots(18-17)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots6}\,5^1 \right) 10^{21} =$$

$$729\,(56 + 21\,.\,125 + 7\,.\,625)\,10^{18} + 2187\,.\,5\,.\,10^{21} =$$
$$5143824\,.\,10^{18} + 10935\,.\,10^{21} = 16078824 \times 10^{18}\,.$$

Volendo determinare i termini antepenultimi, faremo $n=2$, e la loro somma sarà

$$\begin{aligned}
&3^4\left(\frac{(18-7)(18-8)(18-9)}{2.3}5^0+\frac{(18-8)(18-9)(18-10)}{2.3}5^2+\right.\\
&\left.\frac{(18-8)(18-9)(18-10)(18-11)}{2.3.4}5^4\right)10^{12}+\\
&3^5\left(\frac{(18-9)(18-10)\ldots(18-12)}{2.3.4}5^1+\frac{(18-9)(18-10)\ldots(18-13)}{2.3.4.5}5^3\right)10^{15}\\
&=3548967615\times 10^{12}.
\end{aligned}$$

Le serie, e formole sovraccennate sono le seguenti

$$\begin{aligned}
5^{2m-1}=\;&5^3+3\left(5^0+5^2+(m-4)5^4\right)10^3+3^2\left((m-5)5^1+\frac{(m-5)(m-6)}{2}5^3\right)10^6+\\
&3^3\left(\frac{(m-6)(m-7)}{2}5^0+\frac{(m-7)(m-8)}{2}5^2+\frac{(m-7)(m-8)(m-9)}{2.3}5^4\right)10^9+\\
&3^4\left(\frac{(m-8)(m-9)(m-10)}{2.3}5^1+\frac{(m-8)(m-9)(m-10)(m-11)}{2.3.4}5^3\right)10^{12}+\\
&3^5\left(\frac{(m-9)\ldots\ldots(m-12)}{2.3.4}5^0+\frac{(m-10)\ldots\ldots(m-13)}{2.3.4}5^2+\frac{(m-10)\ldots\ldots(m-14)}{2.3.4.5}5^4\right)10^{15}+\\
&3^6\left(\frac{(m-11)\ldots\ldots(m-15)}{2.3.4.5}5^1+\frac{(m-11)\ldots\ldots(m-16)}{2.3.4.5.6}5^3\right)10^{18}+\\
&\text{ec.}
\end{aligned}\tag{LXX}$$

$$\begin{aligned}
5^{2m}=\;&5^4+3\left(5^1+(m-3)5^3\right)10^3+3^2\left((m-4)5^0+(m-5)5^2+\frac{(m-5)(m-6)}{2}5^4\right)10^6+\\
&3^3\left(\frac{(m-6)(m-7)}{2}5^1+\frac{(m-6)(m-7)(m-8)}{2.3}5^3\right)10^9+\\
&3^4\left(\frac{(m-7)(m-8)(m-9)}{2.3}5^0+\frac{(m-8)(m-9)(m-10)}{2.3}5^2+\frac{(m-8)\ldots\ldots(m-11)}{2.3.4}5^4\right)10^{12}+\\
&3^5\left(\frac{(m-9)\ldots(m-12)}{2.3.4}5^1+\frac{(m-9)\ldots\ldots(m-13)}{2.3.4.5}5^3\right)10^{15}+\\
&3^6\left(\frac{(m-10)\ldots\ldots(m-14)}{2.3.4.5}5^0+\frac{(m-11)\ldots\ldots(m-15)}{2.3.4.5}5^2+\frac{(m-11)\ldots\ldots(m-16)}{2.3.4.5.6}5^4\right)10^{18}+\\
&\text{ec.}
\end{aligned}\tag{LXXI}$$

$$\begin{aligned}
&3^{2n}\left(\frac{[m-(3n+2)]\ldots\ldots(m-5n)}{2.3.4\ldots\ldots(2n-1)}5^1+\frac{[m-(3n+2)]\ldots\ldots[m-(5n+1)]}{2.3.4\ldots 2n}5^3\right)10^{6n}+\\
&3^{2n+1}\left(\frac{[m-(3n+3)]\ldots\ldots[m-(5n+2)]}{2.3.4\ldots 2n}5^0+\frac{[m-(3n+4)]\ldots\ldots[m-(5n+3)]}{2.3.4\ldots 2n}5^2+\right.
\end{aligned}\tag{LXXII}$$

$$\left.\frac{[m-(3n+4)]\ldots\ldots[m-(5n+4)]}{2.3.4\ldots(2n+1)}5^4\right)10^{6n+3}.$$

$$3^{2n+1}\left(\frac{[m-(3n+1)]\ldots\ldots[m-(5n+1)]}{2.3\ldots\ldots(2n-1)}5^0+\frac{[m-(3n+2)]\ldots\ldots(m-5n)}{2.3\ldots\ldots(2n-1)}5^2+\right.$$

$$\text{(LXXIII)}\quad\left.\frac{[m-(3n+2)]\ldots\ldots[m-(5n+1)]}{2.3.4\ldots2n}5^4\right)10^{6n}+$$

$$3^{2n+1}\left(\frac{[m-(3n+3)]\ldots\ldots[m-(5n+2)]}{2.3.4\ldots2n}5^1+\frac{[m-(3n+3)]\ldots\ldots[m-(5n+3)]}{2.3.4\ldots\ldots2n}5^3\right)10^{6n+3}$$

4. Vogliasi la potenza *pesima* del numero 9. Essendo $9^p=(10-1)^p$, mediante la formola Newtoniana otterremo

$$9^p=(10-1)^p=10^p-p.10^{p-1}+p\frac{(p-1)}{2}10^{p-2}-p\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}10^{p-3}+\text{ec.}=$$

$$\text{(LXXIV)}\left(10^p+p\frac{(p-1)}{2}10^{p-2}+p\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{2.3.4}10^{p-4}+\text{ec.}\right)-$$

$$\left(p.10^{p-1}+p\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}10^{p-3}+p\frac{(p-1)\ldots(p-4)}{2.3.4.5}10^{p-5}+\text{ec.}\right)$$

In conseguenza di ciò, determino da prima i coefficienti 1, p, $p\frac{(p-1)}{2}$, $p\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}$, ec.; e siccome gli uni 1, $p\frac{(p-1)}{2}$, ec. presi alternativamente sono moltiplicati rispettivamente per le potenze 10^p, 10^{p-2}, ec. decrescenti di 10^2 in 10^2, e così gli altri, p, $p\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}$ ec. sono rispettivamente moltiplicati per le potenze 10^{p-1}, 10^{p-3}, ec. decrescenti esse pure di 10^2 in 10^2; e siccome, sottratta la somma di questi secondi termini dalla somma dei primi, il risultato, che ne viene, è il valore di 9^p, come apparisce in (LXXIV); scrivo in una linea orizzontale il primo coefficiente 1, poscia in una linea seconda il coefficiente $p\frac{(p-1)}{2}$ in modo, che le ultime sue due cifre a destra rimangano senz' averne alcun' altra di sopra, come si è praticato negli esempj 1.°, 2.°, del (N.° 3); scrivo quindi in una terza linea il coefficiente $p\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{2.3.4}$ nella stessa maniera, in modo cioè, che le ultime sue due cifre a destra non ne abbiano alcun'altra di sopra, e così di seguito; e ciò fatto, eseguisco la somma di tutti questi numeri. Nella stessa guisa scrivo, e sommo gli altri coefficienti p, $p\,\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}$, $p\,\frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{2.3.4.5}$, ec. Finalmente, aggiunto uno zero alla destra di quella fra queste due somme, che contiene il penultimo coefficiente, sottraggo l'ultima dalla prima, e il residuo, che ne viene, sarà il chiesto valore di 9^p.

1.° Sia per esempio $p=12$: i corrispondenti coefficienti Newtoniani essendo 1, 12, 66, 220, 495, 792, 924, 792, 495, 220, 66, 12, 1, li scrivo qui sotto, e li sommo nella maniera sovraindicata; alla seconda somma 142799942012, che contiene il penultimo coefficiente 12, unisco alla destra uno zero, e fatta la sovra esposta sottrazione, sarà il residuo $282429536481 = 9^{12}$.

$$\begin{array}{r}
1\\
66\\
495\\
924\\
495\\
66\\
01\\ \hline
1710428956601\\
1427999420120\\ \hline
282429536481\,.
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
12\\
220\\
792\\
792\\
220\\
12\\ \hline
142799942012
\end{array}$$

2.° Se p sia tale, che i corrispondenti coefficienti Newtoniani siano composti di un numero di cifre non >2, il che succede nella ipotesi di $p<9$; determineremo allora assai semplicemente il valore di 9^p, scrivendo l'un dietro l'altro i coefficienti 1, $p\,\frac{(p-1)}{2}$, $p\,\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{2.3.4}$, ec., col porre uno zero alla sinistra di quelli tra essi, che contengono una cifra sola, e così scrivendo gli altri p, $p\,\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}$, ec.;

poscia alla destra di quello tra questi due risultati, che contiene il penultimo termine, collocando un zero; e finalmente sottraendo il risultato secondo dal primo. Sia per esempio $p=8$. I coefficienti Newtoniani diventano 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1, quindi i due risultati per la regola ora accennata saranno 128702801, 8565608, e aggiunto alla destra del secondo di essi, che contiene il penultimo termine 8, uno zero, e quindi sottratto questo dal primo, ci verrà $43046721=9^8$.

3.° Poichè si ha $11^p=(10+1)^p$, e per conseguenza

$$11^p = 10^p + p\,.\,10^{p-1} + p\,\frac{(p-1)}{2}\,10^{p-2} + p\,\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}\,10^{p-3} + \text{ec.},$$

vedesi, che, se sommeremo insieme quelle quantità, le quali sottratte l'una dall'altra ci somministrano il valore di 9^p, otterremo il valore di 11^p. Però negli esempj de' (prec. 1.°, 2.°) sommando i risultati avuti dalle somme ricaveremo $11^8 = 128702801 + 85656080 = 214358881$, $11^{12} = 3138428376721$.

5. 1.° Determinati, come nel (3.° N.° 3) in una delle due serie (LXX), (LXXI) i termini ultimi, ossia quelli, che contengono la più alta, o le due più alte potenze del 10, e conosciuto così il numero delle cifre, che si contengono nella loro somma, potremo conoscere il numero delle cifre, che si contengono nella corrispondente potenza del 5, senzacchè tal potenza venga determinata attualmente. Così nell'Esempio 1.° (N.° 3) contenendosi undici cifre nel termine 27000000000, e altrettante nella somma di esso col termine susseguente 35100000000, dirò che anche undici cifre esistono nel valore sviluppato di 5^{15}, come di fatti si vede nel cit. (1.° N.° 3). Così nell'Esempio 2.° (N.° 3) essendo 19 le cifre dell'ultimo termine 1215×10^{15}, e 19 le cifre esistenti nella somma di questo col termine susseguente 274995×10^{12}, dirò che nella potenza 5^{26} esistono 19 cifre. Finalmente poichè 26 è il numero delle cifre che nell'Esempio (3.° N.° 3) esistono nel termine ultimo 10935×10^{21}, e nella somma 16078824×10^{18} degli ultimi due, dirò, che ancora la potenza 5^{26} conterrà 26 cifre. In tutti e tre questi casi bastava osser-

osservare il numero delle cifre solamente dell'ultimo termine, per determinare il numero delle cifre, che si contengono nella rispettiva potenza del 5 .

2.° Dicasi a il numero delle cifre, che esistono nella potenza 5^p, e siano di numero x le cifre esistenti in 2^p; si avrà $x = p - a + 1$. Di fatti avendosi $5^p > 10^{a-1}$, ed insieme $< 10^a$, e $2^p > 10^{x-1}$, ed insieme $< 10^x$, sarà $2^p \times 5^p > 10^{a+x-2}$, ed insieme $< 10^{a+x}$. Ora abbiamo $2^p \times 5^p = (2 . 5)^p = 10^p$. Dunque sarà 10^p una quantità compresa tra le due 10^{a+x-2}, 10^{a+x}, e per conseguenza p sarà un intero compreso tra i due $a + x - 2$, $a + x$; ma tra questi due numeri non vi è compreso altro intero, che $a + x - 1$. Dunque dovendo essere $a + x - 1 = p$, ne verrà $x = p - a + 1$. Pertanto, conosciuto il numero a delle cifre esistenti in 5^p, e conosciuto l'esponente p, conosceremo tosto in $p - a + 1$, il numero delle cifre che esistono nella potenza 2^p .

3.° Inoltre si ha $4^p = 2^p . 2^p$; ma supposto $p - a + 1 = 6$, per la natura della moltiplicazione le cifre nel prodotto $2^p . 2^p$ sono di numero $26 - 1$, oppure 26 . Dunque nella potenza 4^p si conterranno $2(p - a) + 1$, oppure $2(p - a) + 2$ cifre.

4.° Sia c il numero delle cifre, che si contengono in 4^p: il numero di quelle, che si contengono in $8^p = 4^p . 2^p$ sarà $c + b - 1$, ovvero $c + b$; ma, sostituiti in vece delle b, c i valori corrispondenti, si ottengono i tre risultati $3(p - a) + 1$, $3(p - a) + 2$, $3(p - a) + 3$. Dunque da uno di questi tre risultati verrà sempre determinato il numero delle cifre, che esistono nella potenza 8^p .

5.° Chiamisi e il numero delle cifre, che esistono in 9^p, ed x il numero delle esistenti in 3^p . Avendosi $9^p = 3^p . 3^p$; il numero delle cifre in 9^p sarà ancora $2x$, oppure $2x - 1$; poichè adunque si ha $2x = e$, oppure $2x - 1 = e$, risulterà $x = \frac{e}{2}$, ovvero $x = \frac{e+1}{2}$; ma tanto x, come e devono essere numeri intieri: dunque quando e è numero pari, sarà $x = \frac{e}{2}$, e quando e è numero dispari, sarà $x=\frac{e+1}{2}$; e per conseguenza il numero delle cifre in 3^p sarà $\frac{e}{2}$, oppure $\frac{e+1}{2}$ secondochè il numero e delle cifre in 9^p è pari, o dispari.

6.° Denominato f il numero delle cifre in 3^p, il numero delle cifre in $6^p=2^p.3^p$ sarà $b+f$, oppure $b+f-1$, e sostituiti i valori corrispondenti (prec. 3.°, 5.°) tal numero, quando e (prec. 5.°) è pari sarà $p-a+\frac{e}{2}+1$, ovvero $p-a+\frac{e}{2}$, e quando e è dispari sarà $p-a+\frac{e+1}{2}+1$, oppure $p-a+\frac{e+1}{2}$.

Passiamo ora a considerare il numero delle cifre nelle potenze dei numeri intieri in un modo generale.

6. Chiamati h, p due numeri interi positivi qualunque, cercasi il numero delle cifre, che si contengono nella potenza h^p.

Denominato x questo numero, lo stesso numero di cifre si conterrà ancora in 10^{x-1}, e siccome tra i numeri, che contengono x cifre, 10^{x-1} è il minimo, dovrà essere h^p non $<10^{x-1}$. Prendansi ora i logaritmi da una parte e dall'altra nel sistema delle tavole, e avremo x non $>p\log.h+1$. Ma contenendosi in 10^x un numero di cifre $x+1$, abbiamo $10^x>h^p$, e prendendo quindi i logaritmi, ottiensi $x>p\log.h$. Dunque, dovendo x essere un numero intero, uguaglierà quell' intero, che supera immediatamente il valore $p\log.h$. Questo valore di x altro evidentemente non è che la caratteristica di $\log.h^p$ accresciuta di 1.

1.° Sia per esempio $h=5$, e $p=26$, oppure $h=11$, e $p=12$. Nel primo di questi casi abbiamo $p\log.h=26\log.5=26\times0,699$, non tenendo conto nell'espressione logaritmica che di tre decimali per maggiore semplicità, e perchè non ne abbisogna nel caso presente un maggior numero.

Dunque risultando p log. $h = 18,174$, il numero delle cifre esistenti nella potenza 5^{26} sarà 19, come appunto si vede nell'Esempio 2.° del (N.° 3). Nel caso secondo avendosi p log. $h = 12$ log. $11 = 12 \times 1,041 = 12,492$, sarà 13 il numero delle cifre esistenti in 11^{12} come di fatti si vede nel (3.° N.° 4).

2.° Poichè, ritenendo come di sopra tre sole cifre decimali, nelle espressioni logaritmiche abbiamo

log. $1 = 0$
log. $2 = 0,301$
log. $3 = 0,477$
log. $4 = 0,602$
(LXXV) log. $5 = 0,699$
log. $6 = 0,778$
log. $7 = 0,845$
log. $8 = 0,903$
log. $9 = 0,954$,

potremo agevolmente col mezzo di questi numeri determinare quante cifre si contengono in ciascuna delle potenze 1^p, 2^p, 3^p, ec. 9^p, estendendosi il valore dell'intero p dallo zero fino inclusivamente al 100.

7. Conservate le denominazioni del (N.° prec.), e supposto di più, che q rappresenti un intiero positivo $< p$, si domanda, qual debba essere p acciocchè la potenza h^p contenga $p - q$ cifre.

Col discorso medesimo del (N.° prec.) trovasi dover essere h^p non $< 10^{p-q-1}$ ed insieme $h^p < 10^{p-q}$; presi adunque i logaritmi, poichè risulta p log. h non $< p - q - 1$, p log. $h < p - q$, si otterrà p non $> \frac{q+1}{1 - \log. h}$, $p > \frac{q}{1 - \log. h}$. Dunque, dovendo p essere numero intiero, avrà tanti valori quanti sono gl'intieri, che sono al di sopra del valore $\frac{q}{1 - \log. h}$, e non superano l'altro $\frac{q+1}{1 - \log. h}$.

8. Pongasi h successivamente $= 1, 2, 3$, ec. 9. Col ritenere per maggiore semplicità tre soli decimali nelle espressioni logaritmiche, poichè si hanno le Equazioni (LXXV); i valori di p, corrispondentemente ai quali le potenze *pesime* dei primi nove numeri intieri contengono $p - q$ cifre, verranno determinati dai limiti, che in conseguenza del (N.° prec.) sonosi ritrovati, e vengono esposti qui sotto in (LXXVI)

$$\text{(LXXVI)}\quad \begin{array}{l} \frac{q}{1}\; 1^p,\; \frac{q+1}{1};\quad \frac{q}{0,699}\; 2^p,\; \frac{q+1}{0,699};\quad \frac{q}{0,522}\; 3^p,\; \frac{q+1}{0,522};\\[2ex] \frac{q}{0,398}\; 4^p,\; \frac{q+1}{0,398};\quad \frac{q}{0,301}\; 5^p,\; \frac{q+1}{0,301};\quad \frac{q}{0,222}\; 6^p,\; \frac{q+1}{0,222};\\[2ex] \frac{q}{0,155}\; 7^p,\; \frac{q+1}{0,155};\quad \frac{q}{0,097}\; 8^p,\; \frac{q+1}{0,097};\quad \frac{q}{0,046}\; 9^p,\; \frac{q+1}{0,046}. \end{array}$$

1.° Sia $q = 0$. In questa ipotesi tutti i primi limiti diventando zero, ed i secondi divenendo rispettivamente

$$\text{(LXXVII)}\quad \begin{array}{l} \frac{1}{1} = 1;\; \frac{1}{0,699} = 1\,\frac{301}{699};\; \frac{1}{0,522} = 1\,\frac{478}{522};\; \frac{1}{0,398} = 2\,\frac{204}{398};\\[2ex] \frac{1}{0,301} = 3\,\frac{97}{301};\; \frac{1}{0,222} = 4\,\frac{112}{222};\; \frac{1}{0,155} = 6\,\frac{70}{155};\; \frac{1}{0,097} = 10\,\frac{30}{97};\\[2ex] \frac{1}{0,046} = 23\,\frac{42}{46}; \end{array}$$

ne segue, essere solo la prima potenza di ciascuno dei numeri 1, 2, 3, quella che contiene tante cifre, quanto è il grado della potenza medesima; che riguardo al numero 4 tanto la prima che la seconda delle sue podestà contiene tante cifre, quanto è il grado rispettivo della potenza; che rapporto al numero 5 gode di questa proprietà soltanto ciascheduna delle sue prime tre potenze; che relativamente al 6 godono tale proprietà solamente le sue quattro podestà prime; e che la godono egualmente, e solamente, riguardo al 7, le sue sei potenze prime; rapporto allo 8 le sue prime dieci; e riguardo al 9 le sue prime ventitre.

2.° Si faccia $q = 1$. In questo caso dei limiti (LXXVI) i primi diverranno gli esposti in (LXXVII), ed i secondi diventeranno

$\frac{2}{1}=2$; $\frac{2}{0,699}=2\frac{602}{699}$; $\frac{2}{0,522}=3\frac{434}{522}$; $\frac{2}{0,398}=5\frac{10}{398}$; $\frac{2}{0,301}=6\frac{194}{301}$; $\frac{2}{0,222}=9\frac{2}{222}$; $\frac{2}{0,155}=12\frac{140}{155}$; $\frac{2}{0,097}=20\frac{60}{97}$; $\frac{2}{0,046}=47\frac{38}{46}$.

Dunque delle potenze, le quali contengano una cifra di meno di quel che sia il grado delle potenze stesse, i numeri 1, 2 ne hanno una sola, cioè la seconda, il 3 ne ha due, cioè la seconda, e la terza; il 4 ne contiene tre, cioè la terza, la quarta, e la quinta; il 5 ne contiene tre, cioè la quarta, la quinta, e la sesta; cinque ne contiene il 6, che sono la quinta, la sesta, ec. la nona; sei se ne contengono dal 7, tali essendo le potenze settima, ottava, ec. duodecima; dieci ne contiene lo 8, essendo tali le podestà undecima, duodecima, ec. vigesima; e ventiquattro se ne contengono dal 9, le quali sono la ventiquattresima, la venticinquesima, ec. la quarantasettesima.

3.° Col fare $q=2$, potremo, come nei (prec. 1.°, 2.°) determinare quante, e quali potenze dei numeri 1, 2, 3, ec. 9 contengono due cifre di meno del numero p esprimente il grado delle potenze medesime. Così in progresso.

9. Venga dato il valore del primo membro G, il grado m della potenza, che vuole estraersi; e venga richiesta indipendentemente dalla Tavola delle potenze la massima potenza *mesima* esatta, che si contiene in G.

Denominato r il numero delle cifre in G, determino quale, o quali tra i logaritmi (LXXV) moltiplicati per m danno una caratteristica $=r-1$. Chiamati a, b, c, ec. i numeri corrispondenti a questi logaritmi, e supposto $a>b>c>$ ec., truovo attualmente il valore a^m, e lo paragono con G: se veggo a^m non $>$ G, dirò che a^m è la massima potenza *mesima* domandata: che se sia $a^m>$ G, determino b^m, e paragonato questo valore con G, dirò essere b^m la massima potenza richiesta, mentre risulti b^m non $>$ G; ma se risulta

$b^m > G$, passo innanzi, trovando successivamente le potenze c^m, ec., finchè ottiensi quella, che sia non $> G$, dicendo poi essere questa la domandata. Che se niuno dei numeri a, b, c, ec. determinati di sopra somministri potenza *mesima* non $> G$; prenderò allora l'intiero prossimamente ad essi inferiore, e la *mesima* di questo sarà non $> G$, e sarà la richiesta.

1.° Supposto per esempio $m = 10$, sia $G = 35438956$. Essendo in questo il numero delle cifre $r = 8$, cerco in (LXXV) quali tra i logaritmi ivi esistenti sono quelli che moltiplicati per 10 somministrano la caratteristica 7; trovo agevolmente non esservi fornito di tale proprietà che il logaritmo 0,778, il cui numero corrispondente è 6. Dunque per la regola stabilita di sopra non dovrò che cercare il valore di 6^{10}; ma per l'attuale operazione truovasi $6^{10} = 13810176$, ed è $13810176 < 35438956$: dirò dunque essere 6^{10} la massima potenza decima, che si contiene in 35438956. Che se fosse $G = 11935686$; allora avendosi $13810176 > 11935686$, direi non essere già 6^{10}, ma bensì 5^{10} la massima potestà decima esatta, che contiensi nel dato 11935686.

2.° Abbiasi $m = 5$, e $G = 25468$. In questo caso tutti e tre i logaritmi 0,954; 0,903; 0,845 (LXXV) moltiplicati per 5 somministrano la caratteristica 4. Dunque converrà, che ritenghiamo tutti e tre i numeri 9, 8, 7, e, fattene successivamente le potestà quinte, che successivamente le paragoniamo col dato 25468, come si è indicato di sopra relativamente alle potenze a^m, b^m, c^m, ec. con la G. Ora si trova $9^5 = 59049$, $8^5 = 32768$, $7^5 = 16807$. Dunque essendo fra queste solamente la potestà $7^5 < 25468$, ne segue, che sarà essa 7^5 la massima potenza quinta esatta che si contiene nel dato numero 25468.

3.° Sia $G = 3560438495$, ed $m = 25$. In questa ipotesi, non esiste alcuno dei numeri a, b, c, ec. il quale elevato alla potenza $25.^{esima}$ contenga tante cifre, quante ne contiene il dato 3560438495 cioè 10, perchè in (LXXV) non esiste alcun logaritmo, il quale moltiplicato per 25 produca la caratteristica 9; ma il logaritmo del 2 cioè 0, 301 moltiplicato per 25 dà il prodotto 7, 525, e però la caratteristica 7; ed il logaritmo del 3, cioè 0, 477 moltiplicato parimenti per 25 somministra la caratteristica 11, somministrando il prodotto 11, 925. Dunque essendo 3^{25} fornito di 12 cifre, e 2^{25} di 8, sarà 2^{25} la massima potenza 25 *esima* esatta, che contiensi in 3560438495.

10. Quanto minore è il numero delle quantità a, b, c, ec. del (N.° prec.), tanto più semplice riescirà la soluzione del Problema ivi proposto. Ora quanto è maggiore l'esponente m; dal valore dei logaritmi esistenti in (LXXV), e dai tre esempj del (N.° prec.) apparisce, tanto essere minore l'indicato numero delle a, b, c, ec., il quale ben presto riducesi assai ristretto. Dunque, mentre abbiansi presenti i logaritmi (LXXV), potremo assai agevolmente risolvere il citato Problema del (N.° 9), il quale è quello, che forma il soggetto principale della presente Appendice, ed esso anzi diventerà sempre tanto più facile, quanto è più alto il valore di m. Che se gli accennati logaritmi non si abbiano presenti, allora il numero delle cifre, che formano la potenza richiesta, potrà ricercarsi dipendentemente dalle proprietà esposte nel (N.° 5), avvertendo che il numero e nel (5.° N.° 5) è sempre $= m$ ogniqualvolta sia m un intiero non > 23 (1.° N.° 8); esso e uguaglia $m - 1$, mentre m sia > 23, e < 48 (2.° N.° 8): uguaglia $m - 2$, allorchè m superi 47, e sia < 66. Così di seguito. Che se non si conoscono neppure queste proprietà, allora conviene per isciogliere il Problema, ricorrere al metodo proposto nel (N.° 2), ed alle formole (LXX), (LXXI), (LXXIV).

DEL MOVIMENTO DI UN FLUIDO ELASTICO CHE SORTE DA UN VASE E DELLA PRESSIONE CHE FA SULLE PARETI DELLO STESSO.

MEMORIA

Del Sig. Ottaviano Fabrizio Mossotti

Presentata dal Sig. Cav. Brunacci li 25 Giugno 1814
e approvata dal Sig. Avanzini.

N.° 1. Questa Memoria fu composta per applicare il calcolo alla spiegazione dei fenomeni, che il Professor *Brunacci* osservò in alcune esperienze riferite in un discorso accademico il quale trovasi stampato nel secondo bimestre del 1814 del Giornale del Professor *Brugnatelli*. Pensò questo valente Geometra che la resistenza dell'aria alla quale comunemente dai Fisici si attribuisce il retrocedimento che lo scappare dei fluidi produce nei vasi che li contengono fosse una causa impotente e manchevole a produrre un tanto effetto, ma che invece il giuoco tutto fosse riposto nella dilatazione istessa del fluido. Richiamato quindi questo suo divisamento all'onor delle prove ebbe il piacere di vederlo pienamente confermato da una serie di ripetuti esperimenti. I risultamenti di queste esperienze sono esposti nel sunnominato discorso la lettura del quale io suppongo premessa a quella di questo mio scritto. In esso è provato come le pressioni crescano accostandosi verso il fondo del vase, come le velocità invece siano maggiori verso lo sbocco, in una parola nulla si lascia a desiderare per la cognizione del fatto. Tutto era quindi ridotto ad assegnare da quali principii meccanici conosciuti discendesse la causa di quei fenomeni, tutto era ridotto a sta-

~~dotto a sta~~bilire una più esatta teorica. E questa seconda intrapresa sarebbe forse stata assunta un giorno dal prelodato mio Maestro quando la minoranza delle occupazioni glielo avesse permesso, se io approffittando e dei lumi coi quali nell'assistere alle sue sperienze m'aveva egli schiarito, e del poco ozio che mi resta non gli avessi per così dire carpito il lavoro di mano. L'amorevolezza però e l'interessamento che nutre pe' suoi discepoli questo mio Precettore fecero che un tale atto fosse presso di lui non solo in buona parte accolto, ma che anzi riuscisse all'animo suo gradito. Siccome nell'applicare i principj di meccanica alla valutazione degli effetti nei fenomeni del retrocedimento dei vasi io dovetti stabilire le equazioni fondamentali del moto dei fluidi elastici che ne scappano fuori, così fui naturalmente condotto a formare una teorica sul movimento dei medesimi. È per questo che alla presente memoria le si conviene il titolo che io le ho premesso perchè appunto una teorica del movimento dei fluidi elastici che sortono dai vasi è ciò che fa l'oggetto della medesima.

N.° 2. Prima però d'incominciare ad esporre quanto nell' indagine del movimento di un fluido elastico che esce da un vaso e della pressione che fa sulle pareti dello stesso mi venne fatto di ritrovare, piacemi di qui premettere la soluzione di un Problema col quale il sommo Eulero si propose di ricercare la velocità che ha nell'uscire il fluido elastico prodotto dall'accensione della polvere nello sparo del cannone. Questa elegante soluzione mostra ad un dipresso lo stato in cui trovasi la teorìa del movimento dei fluidi elastici che sortono dai vasi, nè per quanto io sappia alcuno mai pensò a ricercare se questi fluidi nel sortire premano sui vasi ove sono contenuti nè con qual regola e gagliardìa vi premano. Essa è tratta dalle note che il suddetto geometra fece all'opera di *Robins* intitolata = *Nouveaux principes d'Artillerie*. Ecco com'egli si esprime

„ La materia sottile ed elastica prodotta dall'accensione

,, della polvere potendo essere considerata come un' aria estre-
,, mamente compressa noi supporremo, che al primo istante
,, dell' espulsione della polvere nel cilindro cavo AABB (*fig.* 1)
,, quest' aria riempisca lo spazio AACC. Sia adunque la lun-
,, ghezza di questo cilindro $= a$, il cerchio della sua base
,, $= cc$, ed $AC = b$. Sia altresì l' aria compressa nello spazio
,, AC m volte più densa dell' aria naturale; m sarà giusta
,, le regole più comuni il rapporto della sua elasticità a quel-
,, la dell' aria naturale, e se si supponga che il mercurio sia
,, sostenuto nel barometro ad un' altezza $= h$, il peso di que-
,, sta colonna di mercurio sarà eguale all' elasticità dell' aria,
,, e se $1 : 12000$ sia il rapporto del peso specifico dell' aria a
,, quello del mercurio quest' elasticità sarà espressa dal peso
,, di una colonna d' aria la cui altezza sia $= 12000mh$. Sup-
,, poniamo ora che dopo un certo tempo quest' aria si sia
,, estesa sino in MM e nominiamo x la lunghezza AM,
,, la densità dell' aria dilatata in questo spazio sarà alla pri-
,, ma densità dell' aria rinchiusa in AC come AC è ad AM
,, cioè come $b : x$, e per conseguenza $\frac{mb}{x}$ volte più gran-
,, de che la densità dell' aria naturale, e la sua elasticità po-
,, trà essere espressa dal peso di una colonna d' aria la cui
,, altezza sia $= \frac{12000mb}{x} . h$. Se adunque quest' aria si dilata
,, liberamente colla sua propria forza, e non abbia nè palla
,, nè borra avanti a sè si determinerà nella maniera seguente
,, la velocità dell' espulsione. Sia $\sqrt{v}$ la velocità progressi-
,, va della lamina anteriore MM in maniera che questa ve-
,, locità sia dovuta all' altezza v, poichè noi supponiamo che
,, quest' aria compressa si dilati uniformemente la velocità
,, in ogni altra lamina ZZ sarà d' altrettanto minore che
,, questa lamina è più vicina al fondo AA. Se si chiami dun-
,, que z la distanza AZ la velocità in ZZ sarà eguale a $\frac{z}{x}\sqrt{v}$ e
,, nel mentre che la lamina anteriore avanzerà di una quan-

,, tità infinitamente piccola $Mm = \partial x$, ZZ percorrerà uno
,, spazio $\frac{z}{x} \partial x$. E siccome la velocità va aumentando noi
,, possiamo supporre secondo le regole del calcolo differen-
,, ziale, che nel mentre che MM percorre Mm, l'altezza v
,, sia accresciuta di ∂v, e la velocità $\sqrt{v}$ di $\frac{\partial v}{2\sqrt{v}}$. L'accre-
,, scimento della velocità della lamina ZZ nel medesimo
,, istante sarà $\frac{z\partial v}{2x\sqrt{v}}$, e quella dell'altezza $\frac{zzv}{xx}$ per acquista-
,, re questa velocità sarà $\frac{zz\partial v}{xx}$. Diamo alla lamina ZZ uno
,, spessore $Zz = \partial z$ di modo che il suo volume sia eguale
,, a $cc\partial z$; siccome in questa sezione l'aria è $\frac{mb}{x}$ volte più
,, densa dell'aria naturale la lamina $ZZzz$ avrà una massa
,, eguale di un cilindro d'aria naturale della medesima base,
,, e di un'altezza $= \frac{mb\partial z}{x}$. Il movimento di questa lamina
,, essendo accelerato bisognerà necessariamente che vi sia una
,, forza che produca quest'accelerazione: noi supporremo a-
,, dunque che questa forza sia eguale al peso di una colon-
,, na d'aria naturale della medesima base della lamina e di
,, un'altezza $= 12000p$. Ora sappiamo, che nel mentre che
,, questa lamina percorre lo spazio $\frac{z\partial x}{x}$, l'altezza $\frac{zzv}{xx}$ s' ac-
,, cresce di $\frac{zz\partial v}{xx}$; bisogna adunque che secondo i principj
,, della meccanica questo accrescimento $\frac{zz\partial v}{xx}$ sia allo spazio
,, $\frac{z\partial x}{x}$, come la forza $12000c^2p$ che accelera il moto di que-
,, sta lamina, è al peso $\frac{mbcc}{x} \partial z$ della stessa, cioè $\frac{zz\partial v}{xx} : \frac{z\partial x}{x} ::$
,, $12000c^2p : \frac{mbcc}{x} \partial z$ dalla quale si ricava $12000p = \frac{mbccz\partial z\partial v}{xx\partial x}$
,, $= \frac{mbcc\partial v}{xx\partial x} z\partial z$ per la forza acceleratrice dell'aria contenuta

,, nella lamina ZZzz: integrando si avrà $\frac{mbcc\,dv}{xx\,dx}\,\frac{z^2}{2}$ per l'espressione
,, della forza necessaria all'accelerazione dell'aria
,, contenuta nello spazio AAZZ, e se si fa $z = x$ si avrà
,, $\frac{mbcc\,dv}{2\,dx}$ per la forza acceleratrice di tutta l'aria contenuta
,, nello spazio AAMM. Ma questa forza allorchè non vi è
,, ostacolo a vincere non è altra cosa che la forza elastica
,, dell'aria compressa che è eguale al peso di una colonna
,, d'aria naturale la cui altezza eguaglia $\frac{12000mbh}{x}$ e la base
,, $= cc$: si avrà dunque quest'equazione $\frac{dv}{2\,dx} = \frac{12000mbh}{x}$ e dv
,, $= \frac{24000mbh\,dx}{x}$ il cui integrale è $v = 24000mh \log. \frac{x}{b}$ e se si
,, mette $AB = a$ per x si avrà l'altezza dalla quale il corpo
,, dovrà cadere per acquistare la velocità colla quale l'aria
,, scappa dall'apertura BB e quest'altezza sarà eguale a
,, $24000mh\,.\,\log.\frac{a}{b}$.

N.° 3. Esposta così la dottrina dell'Eulero su tale oggetto dalla quale molto lume ricevetti per sottoporre a calcolo il movimento di un fluido elastico in circostanze simili, darò principio alle mie considerazioni. E per progredire con più ordine richiamerò le difinizioni di alcuni termini, non che alcune nozioni delle quali come di cose vere e note possa servirmi nel seguito a' miei propositi.

I. E primieramente intenderò per fluido elastico quello, che senza cangiar la sua massa può ridursi ad un minor volume allorchè viene compresso, e che cessando la compressione si ristabilisce nel suo primiero stato per una virtù o forza chiamata elasticità, la quale in lui risiede.

II. La forza elastica in ogni stato di compressione si misura dalla forza che sarebbe atta a ridurre, e conservare il fluido in quello stato di compressione.

III. Essendo poco ciò che finora ci ha mostrato l'esperienza sulla misura, e sulla varietà di questa forza nei diversi fluidi elastici io sceglierò l'aria, e sulle proprietà di questo siccome del fluido più conosciuto s'aggireranno i miei ragionamenti, facile essendo a chicchessia l'applicarli a qualunque altro fluido purchè del medesimo se ne conoscano egualmente le proprietà. Assumerò quindi ciò che l'esperienza ha comprovato sull'aria, che essendo costante la temperatura, una stessa massa di fluido elastico venendo ridotta ad occupare successivamente diversi volumi, le forze che lo comprimono e perciò le differenti forze elastiche sieguono la ragione inversa dei volumi, o la diretta delle densità. Così supponendo uno la densità dell'aria naturale, la sua elasticità essendo misurata come è noto dal peso di una colonna di mercurio dell'altezza media del Barometro, o di metri $0,76 = h$, quella di un'aria Δ volte più densa sarà misurata dal peso di una colonna di mercurio alta Δh; e volendo ridurre queste colonne di mercurio ad altre equivalenti in peso della stessa aria, essendo il peso specifico dell'aria a quello del mercurio come uno a undecimila e trentacinque (*a*), una colonna d'aria dello stesso peso di una di mercurio dovrà essere 11035 volte più alta, per lo che le due nominate colonne di mercurio ridotte ad altre equiponderanti d'aria dovranno avere altezze la prima eguale a $11035h$, la seconda eguale a $11035\Delta h$.

IV. Per altezza dovuta ad una velocità, intenderò quella altezza dalla quale cader dovrebbe un corpo grave per acquistare quella velocità medesima; ed egualmente velocità dovuta ad un'altezza significherà la velocità che acquisterebbe un corpo grave liberamente cadendo da quell'altezza medesima.

V. Finalmente assumerò, ciò che è dimostrato in tutti

(*a*) Il peso specifico del mercurio è a quello dell'acqua come 13,5995 : 1,0000 (Ved. *Biot* annot. alla Fisica Meccanica di *Fischer*) ma quello dell'acqua è a quello dell'aria come 10000 : 12, 3233 (Ved. *Brugnatelli* Trattato elementare di Chimica generale T. I) componendo le proporzioni si troverà l'enunciato rapporto del peso specifico dell'aria a quello del mercurio.

gli autori d'Idraulica, che la velocità colla quale da un piccol foro zampillerebbe un fluido compresso in un vase è dovuta ad un'altezza eguale a quella di una colonna dello stesso fluido che sia atta a produrre la medesima pressione, che soffre il fluido nel luogo ove zampillerebbe.

N.° 4. Questi principj e definizioni premesse io mi farò ora per mezzo di semplici raziocinj ad investigare più addentro la natura del movimento di un fluido elastico, ciò che spianerà viemeglio la strada all'argomento che imprendo a trattare. Perciò supporrò come ha fatto l'Eulero, e come è provato dalle osservazioni, che i fluidi che sono perfettamente elastici, o che almeno si accostano ad esser tali conservano nel dilatarsi la medesima densità in tutta l'estensione del loro volume. Immaginiamo quindi che la figura AABB (*fig.* 2) rappresenti lo spaccato di un cilindro nel quale debba stendersi un fluido elastico compresso nello spazio AACC del fondo, che per comodo dei ragionamenti supporremo diviso in tre porzioni eguali AADD, DDEE, EECC. Messo in libertà il fluido la colonna AACC dello stesso comincierà ad allungarsi; sia tale l'allungamento seguito nel primo istante di tempo che la prima falda esterna CC sia passata in *cc* (la porzione di retta C*c* si è fatta di grandezza finita per rappresentarla all'occhio) anche delle due altre porzioni le falde più esterne EE, DD saranno progredite l'una in *ee*, l'altra in *dd*. Siccome le porzioni AADD, DDEE, EECC erano eguali in densità e lunghezza prima che cominciasse il moto, e lo devono essere anche dopo, perchè la massa fluida si trova ancora disposta in una densità uniforme, così converrà che l'avanzamento della prima porzione C*c* sia triplo dell'avanzamento D*d* dell'ultima, ed E*e* doppio dello stesso D*d*, per lo che considerando soltanto il moto delle tre falde CC EE DD s'intenderà che in questo istante esse sono progredite di quantità proporzionali alla loro distanza dal fondo, ossia che si son mosse con velocità proporzionali a queste distanze istesse. Dopo questo istante ritornando còl pensiero alla porzione AA*cc* la concepiremo dilatarsi per un altro momento, e quindi ripeteremo come nel primo il ragionamento sul modo di agire e di dilatarsi delle altre due, indi passeremo ad un terzo, e poi ad un quarto, e così per indefiniti istanti, onde ci accorgeremo che, la massa fluida trovandosi continuamente disposta in una densità uniforme, la velocità colla quale si muove una falda qualunque in ciascun tempo è a quella di un'altra nel medesimo istante nella ragione diretta della distanza della prima alla distanza della seconda dal fondo.

N.° 5. Veduta la legge delle velocità colle quali si muove il fluido nelle diverse sezioni dilatandosi in un cilindro, passiamo a ricercare qual sia la forza motrice che s'impiega a produrre ed accelerare il movimento di una porzione qualunque della colonna fluida. Poichè ho dimostrato che la velocità, che in un istante acquista il fluido in ciascuna sezione, è nella ragione della distanza sua dal fondo del cilindro, le forze acceleratrici nelle diverse sezioni saranno anch' esse proporzionali alle distanze loro. Rappresento colla retta AB (*fig.* 3) eguale in lunghezza alla colonna fluida che si dilata la massa della medesima, e colla BD posta ad angolo retto alla AB la forza acceleratrice nella sezione ultima BB, e congiungo AD. Se nel triangolo ABD prendo del lato AB una parte qualunque AC, ed innalzo la CE parallela alla BD, mentre la porzione AC corrisponderà alla massa fluida compresa tra il fondo del cilindro ed una sezione CC alla stessa distanza AC, la CE equivarrà alla forza acceleratrice nella detta falda. L'area dunque dell'intero triangolo ABD sarà proporzionale alla forza motrice che s'accingerà a dar movimento all'intera colonna fluida rappresentata da AB, e l'area della porzione ACE del triangolo corrisponderà alla forza motrice della parte di colonna fluida rappresentata da AC. Essendo poi le superficie dei due triangoli simili ABD, ACE nella ragione dei quadrati dei lati AB, AC, sarà la forza motrice che agisce su tutta l'intiera colonna fluida AB, a quella che muove la porzione AC come il quadrato della AB al quadrato della AC. Ma il fluido totale non tende a muoversi che con una forza equivalente alla sua elasticità, la quale secondo i principj esposti al N.° 3, III, II è rappresentata dal peso di una colonna dello stesso fluido che abbia per base la superficie della sezione BB ed un'altezza che la renda atta ad equilibrarla. Dunque rappresentando la forza dalla quale riceve il suo movimento la porzione espressa da AC col peso di una colonna di fluido della stessa base, e la cui altezza corrisponda ad un'elasticità che a questa forza equivalga, sarà il peso dell'intera colonna che misura l'elasticità nella sezione BB la quale dà movimento a tutto il fluido al peso di quella parte che può concepirsi essere impiegata nell'accelerare il moto nella porzione AC, come il quadrato della AB, al quadrato della AC; o ciò che è lo stesso sarà l'altezza dell'intiera colonna all'altezza della porzione generante il moto nella massa AC, come il quadrato della lunghezza della colonna fluida che si dilata, al quadrato della lunghezza della porzione di colonna fluida la cui massa è rappresentata da AC. Dalla quale proporzione risulta, che l'altezza della colonna dal cui peso può credersi mossa una porzione qualunque della colonna fluida che si dilata, è eguale al prodotto dell'altezza della colonna che misura nella sezione BB la totale elasticità del fluido nel quoziente del quadrato della lunghezza della parte della colonna che si considera dilatarsi diviso pel quadrato della lunghezza dell'intiera colonna mossa.

Il ragionamento col quale io ho dedotta la misura o l'altezza della colonna dal cui peso può valutarsi la forza che genera il movimento in una porzione qualunque della colonna, non che per lo primo istante è buono a qualunque tempo della dilatazione voglia applicarsi: perchè essendo sempre gli aumenti di velocità che acquista il fluido nelle diverse sezioni in ragione della distanza di queste dal fondo (N.° 4), potremo sempre ripetere in ciascun istante la stessa consideraderazione, onde necessariamente la forza elastica nella sezione BB con cui tende il fluido in questo stesso istante a dilatarsi, e che s'adopera nel produrre l'accelerazione dovrà colla stessa legge distribuirsi nell'estensione della colonna fluida.

N.° 6. Veniamo ora alla pressione. Siccome la dilatazione del fluido succede in modo che prima incomincia a dilatarsi dalla parte esteriore e va continuamente ristabilendosi l'equilibrio di densità, e di elasticità in tutto il rimanente del fluido in un modo però continuo, e senza intervalli finiti di tempo, prendiamo perciò ad esaminare il moto del fluido in un istante nel quale la prima porzione CCBB (*fig.* 3) faccia per dilatarsi, e la seconda AACC quasi contemporaneamente pigia per porsi in equilibrio di densità e di elaterio con essa. È chiaro che se la seconda porzione AACC invece di premere in quest'istante fosse in un tratto annichilata, tosto la porzione CCBB si dilaterebbe da amendue le parti, e se ciò non avviene si è, perchè anche la seconda porzione cerca di distendersi da questa stessa parte onde, nella sezione CC siegue un contrasto fra la porzione anteriore CCBB, e la posteriore AACC. Viceversa se immaginiamo, che si annienti la porzione anteriore CCBB, è facile il vedere che l'altra porzione AACC tenderebbe a dilatarsi con una forza corrispondente alla forza elastica nella sezione CC, ossia con una forza eguale al peso di una colonna di fluido avente per base la sezione CC=BB, ed un'altezza atta ad equilibrare l'elasticità stessa. Se adunque non si dilata, o non è mossa che con una forza la quale come abbiamo veduto (N.° 5) è a quella che misura l'elasticità del fluido, come il quadrato della totale lunghezza della colonna fluida AB, al quadrato della lunghezza sua propria AC, forz'è che in questa sezione CC sia così contrastata, che nel conflitto perda una quantità di forza che sarà la differenza tra il peso della colonna che misura l'elasticità del fluido, e il peso di quella parte di colonna che corrisponde a quella forza che muove effettivamente la porzione AACC, ossia il peso di una colonna la cui altezza sia la differenza di quelle delle due dette. Il fluido quindi nella sezione CC si troverà compresso dal peso di una colonna di quest'altezza, in modo che schizzerebbe fuori dalla massa totale se non fosse trattenuto dalla parete CC, premerà quindi sulla medesima, e se in un punto di essa si facesse un foro piccolissimo o come suol dirsi infinitesimo, sfuggirebbe da questo con una velocità, che come ho detto al N.° 2 V, sarebbe quella dovuta all'altezza di questa colonna comprimente. Sarà perciò seguendo la nozione data da Eulero della pressione (il quale assegna per misura della pressione di un fluido su di un punto qualunque delle pareti, il peso di una colonna dello stesso dalla quale bisognerebbe che fosse compresso per uscire colla stessa velocità con cui zampillerebbe da un piccol foro nello stesso luogo) il peso della detta colonna la misura della pressione nella sezione CC. Sottraendo adunque dall'intera altezza della colonna che misura l'elasticità del fluido l'altezza della parte di quella che genera il movimento nella massa AACC di già determinata, troveremo che l'altezza della colonna fluida il cui peso equivale alla pressione nella sezione CC, è quella che risulta moltiplicando l'altezza dell'intiera colonna nell'unità diminuita del quoziente del quadrato della AC diviso per lo quadrato della AB.

Noi intraprendendo ora a risolvere col mezzo del calcolo differenziale il Problema col quale più compiutamente determineremo le circostanze che accompagnano il movimento di un fluido elastico che si sprigiona da un vaso nel quale era in uno stato di compressione, giungeremo per altra via ad uno stesso risultamento per la misura della pressione. Ciò non ostante ho amato meglio di dedurla anche con un semplice geometrico raziocinio sì perchè questo metodo può dar mano all'analitico, come perchè trattandosi di cose nuove e fisiche è bene di renderle facili ed intelligibili anche a quelli che trovandosi meno istrutti nelle matematiche non possono tener dietro nella via del calcolo.

PROBLEMA I.°

N.° 7. „ Siavi un cannello AABB tutto ripieno di un'
„ aria condensata, ed ivi tenuta compressa, se in un tratto
„ aprasi il cannello dalla parte BB l'aria, o il fluido contenuto
„ immediatamente dilatandosi si sbanderà fuori: cercansi
„ le relazioni tra gli elementi del moto di questa espulsione.

Sia

a^2 l'area di una sezione del cannello.

l la sua lunghezza.

m la densità del fluido al principio del movimento.

t il tempo scorso dopo l'istante in cui incomincia il movimento.

Δ la densità del fluido alla fine di questo tempo.

v la velocità nell'ultima sezione o bocca BB del cannello in questo tempo.

Di più presa in considerazione nell'interno del cannello una porzione o strato indeterminato di fluido ZZzz sia

z l'ascissa AZ o la distanza dello strato dal fondo del cilindro.

$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$ sarà come è noto la velocità al principio ZZ dello strato

$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$ la forza acceleratrice nello stesso luogo.

Indicando ora con $\varphi(z,t)$ la somma di tutte le forze acceleratrici che agiscono sulla massa AAZZ del fluido, e facendo l'altezza dello strato Z$z = \omega$, poniamo in questa per z, $z+\omega$, $\varphi(z+\omega,t)$ sarà la somma di tutte le forze acceleratrici di tutta la massa AAzz, e $\varphi(z+\omega,t)-\varphi(z,t)$ quella delle forze agenti sullo strato ZZzz. Ora immaginiamo una forza acceleratrice media A dalla quale essendo animato tutto lo strato ZZzz risulti una forza che alla $\varphi(z+\omega,t)-\varphi(z,t)$ equivalga, essendo $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$ la forza nella sezione ZZ al principio della falda ZZzz l'espressione di A dovrà avere questa forma $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) + \omega Z$, essendo ωZ una funzione di ω, t, z che si annulla quando $\omega = 0$, giacchè allora dobbiamo avere $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$; moltiplicando l'espressione di questa forza acceleratrice per la massa della falda $a^2\omega\Delta$ avremo un'altra espressione della somma delle forze che agiscono sulla massa ZZzz, che eguagliata alla prima darà l'equazione

$$\varphi(z+\omega, t) - \varphi(z, t) = a^2\omega\Delta\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) + \omega Z\right]$$

ossia sviluppando il primo membro in serie

$$\omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) + \text{ec.} = a^2\omega\Delta\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) - a^2\Delta\omega^2 Z$$

la quale dovendo sussistere per qualunque valore di ω, darà perciò come è noto la seguente

$$(1)\quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = a^2\Delta\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right).$$

Ora la forza $\varphi(z+\omega, t) - \varphi(z, t)$ non è altro che l'eccesso della pressione che l'aria fa in ZZ per spingere avanti la falda ZZzz, sopra la pressione colla quale l'aria al di là di zz pigia per ispingerla indietro. Se dunque rappresentiamo con p l'altezza di una colonna dello stesso fluido, e di una densità uno, atta a produrre una pressione eguale a quella che risente la faccia ZZ della falda, ga^2p (g dinota la gravità) sarà la misura di questa pressione, e quella che soffre la faccia zz sarà data dalla stessa espressione considerando in essa p funzione della z, e ponendo invece di z, $z+\omega$, per cui sarà $ga^2\left[p + \omega\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \text{ec.}\right]$: eguagliando adunque la differenza di queste due pressioni alla forza $\varphi(z+\omega, t) - \varphi(z, t)$, avremo l'equazione

$$\omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) + \text{ec.} = ga^2\left[-\omega\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) - \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) - \text{ec.}\right]$$

dalla quale paragonando il coefficiente di un membro, e l'altro della prima potenza di ω, dedurremo questa

$$(2)\quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=-ga^2\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

messo questo valore della differenziale $\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$ nell' equazione (1) avremo l'altra

$$(3)\ -ga^2\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)=a^2\Delta\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$$

N.° 8. *Corollario I.* Dalla considerazione del N.° 4 sappiamo che le velocità del fluido sono in ragione delle distanze dal fondo del cannello; essendo dunque v la velocità dello sbocco, ed l la lunghezza del cannello avremo la proporzione $l:v::z:\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$, dalla quale ricaveremo $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\frac{vz}{l}$: in quest'equazione v esprime la velocità colla quale si moverebbe un mobile che conservasse nel suo movimento sempre una velocità eguale a quella con cui sbocca il fluido dal cilindro, z, e $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$ dinotano la distanza, e la velocità al principio della falda $ZZzz$, queste tre quantità saranno tutte variabili col tempo, e la sola l ne sarà costante, onde differenziando relativamente al tempo quest'equazione sarà

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)=\frac{z\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+v\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)}{l}$$

ma $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\frac{vz}{l}$, sostituendo questo valore sarà

$$(4)\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)=\frac{z\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}\right\}}{l}$$

e messa per $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$ nell' equazione (1) quest'eguaglianza avremo la seguente

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=a^2\Delta z\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\}$$

questa integrata, ed estesa fra i limiti $z=0$, $z=l$, facendo $\phi=0$, quando $z=0$, ci darà

$$(5)\quad \varphi = a^2\Delta\,\frac{l^2}{2}\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\}$$

e φ sarà così la forza totale che anima la massa fluida; ora, siccome riflette lo stesso Eulero (N.° 2), allorchè non vi è ostacolo a vincere, questa forza non è che la forza elastica dell'aria compressa, la quale per ciò che abbiamo premesso al N.° 3, II, III sarà misurata dal peso di una colonna dello stesso fluido, che abbia per base a^2, e che sia alta $11035.h.\Delta$, dunque ponendo questa misura in luogo della forza φ troveremo

$$(6)\quad a^2\Delta\,\frac{l^2}{2}\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\} = a^2.g\,.\,11035h\,.\,\Delta$$

ossia

$$\frac{l}{2}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}\right\} = g\,.\,11035\,.\,h$$

che riducesi a

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{2g\,.\,11035\,.\,h - v^2}{l}\,;$$

faccio $2g\,.\,11035\,.\,h = \alpha$, e permuto la differenziale, sarà

$$\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right) = \frac{l}{\alpha - v^2}$$

quest'equazione integrata darà

$$t = \frac{l}{2\sqrt{\alpha}}\log.\frac{\sqrt{\alpha}+v}{\sqrt{\alpha}-v}\,.\,C$$

e risolvendo troveremo

$$v = \sqrt{\alpha}\,.\,\frac{e^{\frac{t\sqrt{\alpha}}{l}} - C}{e^{\frac{t\sqrt{\alpha}}{l}} + C}$$

fatto in questa $t = 0$, v sarà la velocità al principio dell'espulsione la quale è nulla: determinando così la costante C, avremo per l'espressione della velocità la seguente

$$(7)\quad v = \sqrt{2g\,.\,11035h}\;\frac{e^{\frac{t\sqrt{2g\,.\,11035h}}{l}} - 1}{e^{\frac{t\sqrt{2g\,.\,11035h}}{l}} + 1}$$

dalla forma della qual equazione vedesi, che la velocità dello sbocco non può mai oltrepassare, nè anche raggiungere il limite $\sqrt{2g\,.\,11035\,.\,h}$.

N.° 9. *Corol. II.* Cerchiamo ora il valore della densità. La quantità di fluido che prima che incominciasse il movimento era contenuta nel cilindro, essendo m il numero delle volte, che il fluido al principio del moto è più denso dell'aria naturale, sarà espresso da ma^2l; ma essendo in seguito Δ il numero delle volte che il fluido rimasto nel cannello è più denso dell'aria libera, allorchè la velocità è v, la quantità di fluido uscita sarà espressa da $a^2\int\Delta v\partial t$ (*a*), quindi la quantità rimasta nel cannello sarà $ma^2l - a^2\int\Delta v\partial t$, e questa massa trovandosi egualmente densa in tutta la capacità del cilindro (N.° 3), divisa per lo volume a^2l darà la densità del fluido, che sarà

$$(8)\quad \Delta = \frac{ma^2l - a^2\int\Delta v\partial t}{a^2l}$$

equazione che differenziata conduce a questa

$$(9)\quad \left(\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right) = -\frac{av}{l}$$

permutando la differenziale $\left(\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right)$ in un'altra presa relativamente alla variabile v, sarà $\left(\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial\Delta}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$, ma $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{2g\,.\,11035h - v^2}{l}$, dunque sostituendo avremo

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial v}\right) = \frac{-v}{2g\,.\,11035\,.\,h - v^2}$$

l'integrale della quale è

$$\log.\,\Delta\,.\,C = \tfrac{1}{2}\log.(2g\,.\,11035\,.\,h - v^2)$$

e siccome fatto $\Delta = m$, v deve esser zero sarà $C = \frac{\sqrt{2g\,.\,11035h}}{m}$, e

---

(*a*) Alla ricerca dell'espressione di quest'integrale servono anche facilissimamente, in quel modo di cui si è già fatto uso per la quadratura, e rettificazione delle curve, e in molti altri casi, il principio di *Lagrange*, o quello di *Brunacci*. Ved. Istituto Naz. Italiano Tom. I.

l'equazione diverrà togliendo i logaritmi

$$(10)\quad \Delta = m\left(1 - \frac{v^2}{2g\,.\,11035\,.\,h}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e questa ci farà conoscere la densità per mezzo delle velocità: se si volesse la densità data pel tempo non si avrebbe a far altro, che sostituire in quest' equazione invece della velocità il valore sopra ritrovato in funzione del tempo, e fatta qualche riduzione si troverebbe

$$(11)\quad \Delta = m\left\{\frac{2}{e^{\frac{t\sqrt{2g\,.\,11035h}}{l}} + e^{\frac{-t\sqrt{2g\,.\,11035h}}{l}}}\right\}$$

espressione che si sarebbe egualmente ottenuta sostituendo nell'equazione (9) invece della v il suo valore già ritrovato in funzione della t, ed integrandola col moltiplicar prima il numeratore ed il denominatore del secondo membro per $e^{\frac{-t\sqrt{2g\,.\,11035h}}{l}}$.

L' equazione testè ritrovata ci fa vedere che la densità non può mai divenir nulla che a tempo infinito.

Problema II.°

N.° 10. „ Supposto che il fluido si sbandi fuori dal cannello AABB come si è detto nel Problema precedente, si „ dimanda qual è la pressione che in un dato istante eserciterà su qualunque punto del cannello? "

Per risolvere questo Problema abbiamo già al principio del Problema primo preparata l'equazione (3)

$$-ga^2\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = a^2\Delta\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$$

in questa sostituisco per $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$ il valore dato dall' equazione (4) avremo

$$-g\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \Delta z\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{v^2}{l}}{l}\right\}$$

la quale integrata nella supposizione della t costante, darà

$-gp$

$$-gp = \frac{z^2}{2}\Delta\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\}+C$$

per determinare la costante faccio $z=l$, ed allora la pressione dovrà essere quella sulla faccia anteriore, o sullo sbocco, la quale se si suppone, che il fluido sorta nel vuoto dovrà essere nulla, onde avremo

$$-\frac{l^2}{2}\Delta\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\}=C$$

e quindi per questo valore della costante si otterrà

$$(12)\quad gp=\Delta\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\}\left\{\frac{l^2-z^2}{2}\right\}$$

e quest'equazione ci farà conoscere la pressione in ogni sito della lunghezza del cannello per mezzo della velocità, e della densità; pongo in questa invece dell'espressione $\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}$ il suo valore tratto dall'equazione (6) diverrà

$$(13)\quad gp=g\,.\,11035\,.\,h\,.\,\Delta\left(1-\frac{z^2}{l^2}\right)$$

se in questa facciamo $z=0$, avremo la pressione sul fondo che sarà

$$(14)\quad gp=g\,.\,11035\,.\,h\,.\,\Delta$$

la quale ci mostra che essa equivale a tante volte la pressione dell'atmosfera quante volte il fluido che è nel cannello è più denso in confronto della medesima, e l'equazione (13) poi ci fa conoscere la legge colla quale questa pressione decresce trasferendosi in una sezione qualunque verso lo sbocco; equazione la quale altro non è che l'espressione analitica di quanto abbiamo dimostrato al N.° 5. Vi è adunque una pressione sulle pareti del vaso la quale può essere grandissima anche quando il fluido sbocca nel vuoto, e da quanto dimostreremo in appresso si potrà dedurre, che essendo eguale la densità del fluido nel cannello la pressione sul fondo è tanta, quanta sarebbe se il fluido uscisse nell'atmosfera.

Se per Δ poniamo in queste due equazioni il valore ricavato da quella segnata (11) avremo la pressione data dal tempo, che per una sezione qualunque sarà

$$(15)\ gp=g.11035.h.m\left\{\frac{2}{e^{\frac{t\sqrt{2g.11035.h}}{l}}+e^{\frac{-t\sqrt{2g.11035.h}}{l}}}\right\}\left\{1-\frac{z^2}{l^2}\right\}$$

e pel fondo

$$(16)\ gp=g.11035.h.m\left\{\frac{2}{e^{\frac{t\sqrt{2g.11035.h}}{l}}+e^{\frac{-t\sqrt{2g.11035.h}}{l}}}\right\}.$$

Esaminato il Problema nel caso ipotetico che il fluido sorta nel vuoto, passiamo ora a considerare quello che in natura succede, cioè che sbocchi nell' atmosfera.

PROBLEMA III.°

N.° 11. „ Supposto il cannello ripieno di un' aria con- „ densata come nel Problema I.°, ma che invece di sortire „ nel vuoto, debba ora sbandarsi nell' atmosfera, si diman- „ dano pure le relazioni fra gli elementi del moto in quest' „ espulsione ".

Poichè questo caso in null' altro differisce dal primo che, mentre in quello il fluido non incontrava resistenza nell' uscire, in questo sente l'azione dell'aria atmosferica, gli stessi ragionamenti che abbiamo fatti per trovare la forza acceleratrice nel caso antecedente sono buoni adesso, e ci condurranno ad avere le stesse equazioni (1), (2), (3), (4), (5). Riprendo perciò l' equazione (5)

$$\varphi=a^2\Delta\frac{l^2}{2}\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\}$$

φ esprime la forza totale colla quale si sbanda la massa fluida la quale è propriamente la forza del fluido nella sezione dello sbocco; ora allorchè il fluido sorte nell'atmosfera, questa nella sezione dello sbocco premendo tutto allo intorno della colonna fluida produce su di essa una forza ritardatrice eguale al peso dell' atmosfera (proveremo nel seguito più particolarmente quanto si asserisce) onde dalla forza totale elastica che dà movimento all' aria compressa nel cannello espressa da $ga^2.11035.h.\Delta$, converrà sottrarre questa ritardatrice equivalente a $ga^2.11035.h$, ed allora avremo il valore della forza φ, che messo nell' equazione antecedente ci darà

$$(17)\quad a^2\Delta\frac{l^2}{2}\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\}=g.a^2.11035.h(\Delta-1)$$

a questa aggiungasi quella segnata (8) ritrovata al N.° 9 che esprime la densità

$$\Delta=\frac{ma^2l^2-a^2\int\Delta v\partial t}{a^2l}$$

o la sua differenziale

$$(18)\quad\left(\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right)=-\frac{\Delta v}{l};$$

per eliminare la t fra queste due equazioni, osservo che nella prima la differenziale $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$ può cangiarsi in questa $\left(\frac{\partial v}{\partial\Delta}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right)$, ed essendo $\left(\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right)=-\frac{\Delta v}{l}$ potrò sostituire per $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$, $-\frac{\Delta v}{l}\left(\frac{\partial v}{\partial\Delta}\right)$, e per questa sostituzione quell' equazione ridotta diverrà

$$\Delta v\left(\frac{\partial v}{\partial\Delta}\right)-\Delta v^2=g.22070.h(1-\Delta)$$

la quale ha per integrale

$$\frac{v^2}{\Delta^2}=2g.22070.h\left\{-\frac{1}{3\Delta^3}+\frac{1}{2\Delta^2}\right\}+C$$

ora rifletto, che quando $v=0$ si ha $\Delta=m$ dunque dovrà essere

$$C=2g.22070.h\left\{\frac{1}{3m^3}-\frac{1}{2m^2}\right\}$$

e quindi otterremo la seguente equazione

$$(19)\quad v^2=\frac{2g.22070.h}{6m^3}\left\{\frac{(2-3m)\Delta^3+3m^3\Delta-2m^3}{\Delta}\right\}$$

la quale ci farà conoscere in ogni istante la velocità, quando si conoscerà per ogni istante il valore di Δ.

N.° 12. *Corol. I.* Se poniamo questo valore di v^2 nell' equazione (17) avremo questa

$$(20)\quad \Delta l\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)=\frac{2g\,.\,22070\,.\,h}{6m^3}\left\{(2-3m)\Delta^3+m^3\right\}$$

nella quale fatto $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)=0$, avremo la densità allorchè la velocità è massima data dall' equazione

$$(2-3m)\Delta^3+m^3=0$$

che sarà

$$(21)\quad \Delta=\frac{m}{\sqrt[3]{3m-2}}$$

e questo valore di Δ posto nell' equazione (19) ci farà conoscere la velocità massima, che sarà

$$(22)\quad v^2=\frac{2g\,.\,11035h}{m}\left\{m-\sqrt[3]{3m-2}\right\}.$$

N.° 13. *Corol. II.* Per conoscere la relazione tra la densità, ed il tempo moltiplico un membro, e l'altro dell' equazione (19) per Δ^2, ed ho

$$\Delta^2v^2=\frac{2g\,.\,22070h}{6m^3}\left\{(2-3m)\Delta^4+3m^3\Delta^2-2m^3\Delta\right\}$$

ora essendo $l\left(\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right)=-\Delta v$ sarà anche

$$l^2\left(\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right)^2=\frac{2g\,.\,22070\,.\,h}{6m^3}\left\{(2-3m)\Delta^4+3m^3\Delta^2-2m^3\Delta\right\}$$

faccio in questa $\Delta=\frac{m}{1+mz^2}$, si troverà

$$4l^2\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=\frac{2g\,.\,22070h}{3}\left\{3\left(\frac{m-1}{m^2}\right)+3\left(\frac{m-2}{2m}\right)z^2-z^4\right\}$$

ossia permutando la differenziale, estraendo la radice, ed integrando

$$t=\frac{l\sqrt{12}}{\sqrt{2g\,.\,22070\,.\,h}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{3\left(\frac{m-1}{m^2}\right)+3\left(\frac{m-2}{2m}\right)z^2-z^4}}$$

in quest'equazione l'integrale del secondo membro si può ridurre alla forma della prima delle trascendenti, che il Sig. *Legendre* ha così bene considerate in questi ultimi tempi, e che ha chiamate trascendenti ellitiche.

Per ridurre quest'integrale alla forma della prima delle trascendenti nominate osservo, che la quantità

$$3\left(\frac{m-1}{m^2}\right)+3\left(\frac{m-2}{2m}\right)z^2-z^4$$

risulta dal prodotto dei due fattori

$$\left\{\frac{3(m-2)+\sqrt{\overline{3(m-2)}^2+8(6m-5)}}{4m}-z^2\right\}\left\{z^2-\frac{-3(m-2)+\sqrt{\overline{3(m-2)}^2+8(6m-5)}}{4m}\right\}$$

dunque facendo per semplicità di calcolo

$$\frac{3(m-2)+\sqrt{\overline{3(m-2)}^2+8(6m-5)}}{4m}=r^2$$

$$\frac{-3(m-2)+\sqrt{\overline{3(m-2)}^2+8(6m-5)}}{4m}=q^2$$

e supponendo $z^2+q^2=x^2$, e $q^2+r^2=p^2$, ne verrà l'equazione

$$t=\frac{l\sqrt{12}}{\sqrt{2g\,.\,22070h}}\int\frac{\partial x}{\sqrt{(x^2-q^2)(p^2-x^2)}}$$

facciasi $\frac{p^2-q^2}{p^2}=c^2$, ed $x^2=\frac{q^2}{1-c^2\sin.^2\phi}$ risulterà

$$t=\frac{l\sqrt{12}}{\sqrt{2g\,.\,22070h}}\int\frac{\partial\phi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\phi}}$$

ed ecco così ridotta la quantità integrale alla forma della prima delle trascendenti ellitiche considerate da *Legendre*, e che esso bramerebbe di chiamare *Nome*.

Si osservi che in quest'integrale al principio del moto, quando $t=0$ si ha $\Delta=m$, per cui essendo $\Delta=\frac{m}{1+mz^2}$ sarà $z^2=0$, ed $x^2=q^2$, e perciò $\sin.^2\phi=0$, onde l'integrale dovrà cominciare da $\phi=0$, come *Legendre* suppone: questa è la ragione per cui si è fatto $z^2+q^2=x^2$ col quale artificio si semplifica il calcolo.

Per avere il valore di quella trascendente esporrò l'elegantissimo metodo proposto dal lodato Geometra la dimostrazione del quale ha data nel libro intitolato *Exercices de calcul integral*.

1.$^{\text{mo}}$ Caso. Sia $m<2$, di modo che la quantità

$$c^2=\frac{p^2-q^2}{p^2}=\frac{1}{2}+\frac{3(m-2)}{2\sqrt{3(m-2)^2+8(6m-5)}}$$

riesca minore di $\frac{1}{2}$, si cercherà l'angolo μ che ha per seno c allora si avrà $\sin.\mu=c$, supposto $\cos.\mu=b$ si calcolerà

$$c^{\circ}=\frac{1-b}{1+b}=\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\mu$$

e poi si farà $c^{\circ}=\sin.\mu^{\circ}$, ed operando similmente si otterrà

$$c^{\circ\circ}=\frac{1-b^{\circ}}{1+b^{\circ}}=\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\mu^{\circ}=\sin.\mu^{\circ\circ},\quad c^{\circ\circ\circ}=\frac{1-b^{\circ\circ}}{1+b^{\circ\circ}}=\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\mu^{\circ\circ}\ \text{ec.}$$

sino che si arriverà ad un valore di c trascurabile.

Indi si calcoleranno gli angoli ϕ°, $\phi^{\circ\circ}$, $\phi^{\circ\circ\circ}$ ec. colle formole

$$(23)\ \left\{\begin{array}{l}\text{tang.}(\phi^{\circ}-\phi)=b\,\text{tang.}\phi\\ \text{tang.}(\phi^{\circ\circ}-\phi^{\circ})=b^{\circ}\,\text{tang.}\phi^{\circ}\\ \text{tang.}(\phi^{\circ\circ\circ}-\phi^{\circ\circ})=b^{\circ\circ}\,\text{tang.}\phi^{\circ\circ}\end{array}\right.$$

e preso nella serie degli angoli ϕ, $\frac{\phi^{\circ}}{2}$, $\frac{\phi^{\circ\circ}}{4}$, $\frac{\phi^{\circ\circ\circ}}{8}$ ec. l'ultimo corrispondente al valore di c trascurabile, ed indicato quest' angolo limite con Φ si avrà

$$(24)\quad t=\text{F}(c,\phi)=\Phi\,.\,\frac{2\sqrt{c^{\circ}}}{c}\,.\,\frac{2\sqrt{c^{\circ\circ}}}{c^{\circ}}\,.\,\frac{2\sqrt{c^{\circ\circ\circ}}}{c^{\circ\circ}}\,.\ \text{ec.}$$

2.$^{\text{do}}$ Caso. Se poi sarà $m>2$ perchè riesca $c^2>\frac{1}{2}$, si farà $b=\sin.\lambda$ $c=\cos.\lambda$, indi si cercherà il valore di b' colla formola

$$b'=\frac{1-c}{1+c}=\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\lambda$$

si supporrà in seguito $b'=\sin.\lambda'$, $c'=\cos.\lambda'$, e così via via, e si avrà

$$b''=\frac{1-c'}{1+c'}=\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\lambda'=\sin.\lambda'',\quad b'''=\frac{1-c''}{1+c''}=\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\lambda''\ \text{ec.}$$

e poi si calcoleranno gli angoli, o le amplitudini ϕ' ϕ'' ϕ''' ec.

colle formole

$$\sin.(2\varphi' - \varphi) = c \sin.\varphi$$
$$\sin.(2\varphi'' - \varphi') = c' \sin.\varphi'$$
$$\sin.(2\varphi''' - \varphi'') = c'' \sin.\varphi''$$

ed indicata con Φ l'ultima di queste amplitudini corrispondente ad un valore b^{u} piccolo, si avrà

$$(25)\quad t = \mathrm{F}(c, \varphi) = \frac{2\sqrt{c' . c'' . c''' . \text{ec.}}}{c} \log.\ \text{tang.}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi\right)$$

in questo modo le due equazioni (24), (25) ci daranno il tempo corrispondente a qualunque grado di densità per cui passa il fluido nel farsi l'espulsione, qualunque sia il valore di m.

N.° 14. *Corol. III.* Facciamo nell'equazione (19) $v = 0$ risolvendo quest'equazione troveremo che essa risulta dai due fattori

$$\Delta - m = 0$$

$$\Delta^2 + m\Delta + \frac{2m^2}{2 - 3m} = 0$$

il primo dei quali dà $\Delta = m$, cioè che la velocità è zero quando la densità è m, ossia al principio del moto, il secondo dà

$$(26)\quad \Delta = \frac{m}{2}\left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{8}{3m - 2}} \right\}$$

e questo sarà il valore della densità in un altro istante in cui la velocità è zero, ossia alla fine del moto.

N.° 15. *Corol. IV.* Se questo valore di Δ ripongasi nell' equazione $\Delta = \frac{m}{1 + mz^2}$, troverassi

$$z^2 = \frac{3(m-2) + \sqrt{3(m-2)^2 + 8(6m-5)}}{4m}$$

e questo valore di z^2 è quella quantità che noi abbiamo indicata con r^2 e quindi sarà $z^2 = r^2$, ed essendo $z^2 + q^2 = x^2$, sarà $x^2 = r^2 + q^2 = p^2$ onde si troverà $\sin.^2 \varphi = 1$, e quindi $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$. Se facciamo perciò $\varphi = \frac{\pi}{2}$ nelle equazioni (23) gli angoli φ, $\frac{1}{2}\varphi^{\circ}$, $\frac{1}{4}\varphi^{\circ\circ}$ ec. saranno costantemente eguali a $\frac{\pi}{2}$, onde il tempo totale dell'espulsione sarà dato da

$$(27)\quad t' = \mathrm{F}'(c) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\sqrt{c^{0}}}{c} \cdot \frac{2\sqrt{c^{00}}}{c^{0}} \cdot \frac{2\sqrt{c^{000}}}{c^{00}} . \text{ec.};$$

nel secondo caso quando $m > 2$, converrà eseguire il calcolo degli angoli ϕ' ϕ'' ϕ''' ec. come fu detto, oppure si potrà avere il tempo totale dell'espulsione dalla equazione

$$(28)\quad t' = \mathrm{F}'(c) = \frac{2\sqrt{c'.c''.c'''\text{ ec.}}}{c}\,\frac{1}{2l^{\mu}}\log.\frac{4}{b^{\mu}} .$$

Per alcuni casi si vedano i N.$^{\text{i}}$ 82, 83, 84 dell'opera citata. Passiamo a cercare il valore della pressione.

PROBLEMA IV.

N.° 16. „ Il fluido nel sortire in virtù della sua forza „ elastica dal cannello AABB sbandandosi nell'atmosfera eserciterà anche una pressione sulle interne pareti del cannel„ lo, si dimanda il valore di questa pressione in ciascun pun„ to, ed in ciascun istante. „

A tale effetto riprendo l'equazione (3)

$$-ga^2\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = a^2\Delta\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$$

ossia mettendo per $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$ il suo valore $z\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\}$

$$-g\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \Delta z\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\}$$

l'integrale della quale abbiamo veduto essere

$$-gp = \frac{z^2}{2}\,\Delta\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\} + \mathrm{C}$$

per determinare la costante osservo che fatto $z = l$, p diviene l'altezza della colonna fluida, che produce la pressione allo sbocco la quale altro non essendo che quella dell'atmosfera che corrisponde ad un'altezza di $11035 . h$ si avrà

$$\mathrm{C} = -\frac{l^2}{2}\,\Delta\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\} + g . 11035 . h$$

e l'equazione superiore si trasformerà nella seguente

$$gp = \Delta \left\{ \frac{l^2 - z^2}{2} \right\} \left\{ \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{v^2}{l}}{l} \right\} + g \,.\, 11035 \,.\, h$$

la quale ci farà conoscere la pressione in ogni punto per mezzo della velocità, e della densità che abbiamo insegnato a determinare in ogni istante; se poniamo in questa il valore di $\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{v^2}{l}}{l}$ ricavato dall' equazione (17) avremo la pressione data per la sola densità dall'equazione

$$(29) \quad gp = \left\{ 1 - \frac{z^2}{l^2} \right\} g \,.\, 11035 \,.\, h (\Delta - 1) + g \,.\, 11035 \,.\, h$$

e questa darà il valore della pressione per una sezione qualunque; se in essa facciamo $z = 0$ diverrà la pressione sul fondo del cilindro

$$(30) \quad gp = g \,.\, 11035 \,.\, h \,.\, \Delta$$

dal che si vede che l'altezza della colonna fluida che misura la pressione sul fondo è eguale a quella che misura l'elaterio del fluido, quale si è ritrovata anche nel caso che il fluido uscisse nel vuoto.

N.° 17. *Scolio*. Riprendasi il valore della densità del fluido alla fine del movimento dato dall'equazione (27)

$$\Delta = \frac{m}{2} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{8}{3m - 2}} \right\}$$

per poco che si rifletta su questo valore si conoscerà che per qualunque valore di $m > 1$ deve essere $\Delta < 1$, infatti supposto $\Delta = 1$ si ha appunto

$$1 + \frac{m}{2} > \frac{m}{2} \sqrt{1 + \frac{8}{3m - 2}}$$

perchè fatto il quadrato, e le riduzioni risulta

$$1 > \frac{2m}{3m + m^2 - 2}$$

come lo è realmente per tutti i valori di m maggiori dell' unità.

Ciò ci fa conoscere che il fluido nel sortire nell'atmosfera seguita a farlo sino che arriva ad una densità minore di quella; e questo è facile il comprenderlo anche col raziocinio considerando, che quando la densità del fluido, e quindi la sua elasticità è eguale a quella dell'atmosfera, essendo esso dotato di una velocità, questa dovrà impiegare un dato tempo nell'estinguerla, nella durata del quale il fluido si renderà minore in densità. Ma dopo che la velocità del fluido verrà annientata non essendo fornito di un elaterio sufficente ad ostare alla pressione dell'aria esterna, perchè ha una densità minore, questa a guisa di uno stantuffo comprimerà l'aria contenuta nel cannello, e l'obbligherà a condensarsi. Vediamo quindi, quali sieno la natura, e le circostanze del moto di questa condensazione.

Problema V.

N.° 18. ,, Essendo alla fine della sua espulsione il fluido
,, rimasto nel cannello meno denso dell'atmosfera nella
,, quale esce, non potrà più colla sua forza elastica equili-
,, brare la pressione di quella, quindi verrà in seguito dalla
,, medesima costipato; si dimanda la relazione tra gli elemen-
,, ti del moto di questa costipazione? ,,

Per poco che si rifletta sul metodo col quale abbiamo dedotto le equazioni (1), (2), (3) si conoscerà che esse sono valevoli anche per questo Problema. Conservate adunque queste equazioni, e le denominazioni dei numeri antecedenti, chiamo di più x la distanza dal fondo del cannello alla fine di un tempo qualunque della superficie più esteriore del fluido che è compressa dall'atmosfera: essendo le velocità nelle diverse sezioni, o falde, come abbiamo esposto al N.° 4, in ragione delle distanze loro dal fondo, sarà la velocità di una falda qualunque alla distanza z espressa da $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{z}{x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$.
In questo Problema x rappresenta la distanza dell'ultima falda, o della superficie del fluido in contatto coll'atmosfera la quale passa continuamente per diverse sezioni, quindi diver-

samente da ciò che al N.° 8 abbiamo osservato della l, la quale era sempre la distanza della sezione dello sbocco dal fondo, o la lunghezza del cannello che rimaneva costante col tempo, x sarà variabile, e perciò in questo caso tutte le quantità della sovrascritta equazione saranno variabili col tempo, e differenziando si avrà

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = \frac{z}{x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) + \frac{x\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) - z\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2}{x^2}$$

ma $x\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$ è eguale a $z\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$, sostituendo si troverà che quest' equazione si riduce alla seguente

$$(31)\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = \frac{z}{x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$$

sostituisco questo valore della differenziale $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$ nell' equazione segnata (1) sarà

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = a^2 \Delta\, \frac{z}{x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$$

integrando relativamente alla z, e completando in modo che φ sia zero quando $z = 0$, si avrà

$$(32)\quad \varphi = a^2 \Delta\, \frac{z^2}{2x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$$

faccio ora $z = x$, sarà

$$(33)\quad \varphi = a^2 \Delta\, \frac{x}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$$

e φ rappresenterà la forza totale, che in direzione opposta al crescere della x comprime il fluido, e siccome questa forza non è altro, che il peso dell' atmosfera esteso su di una superficie $= a^2$, diminuito del peso di una colonna fluida atta ad equilibrare la forza elastica del fluido compresso alla superficie, sarà $-\varphi = a^2 . g . 11035 . h(1 - \Delta)$, e sostituendo otterremo l' equazione

$$(34)\quad a^2 \Delta\, \frac{x}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) = a^2 g . 11035 . h . (\Delta - 1)$$

ora essendo m la densità alla fine dell' espulsione, o al principio di questo movimento, ed essendo costante la quantità di fluido compresso si ha l'equazione

$$(35)\quad a^2\Delta x = a^2 ml$$

dalla quale si deduce

$$(36)\quad \Delta = \frac{ml}{x}$$

sostituendo questo valore di Δ nell'equazione (34) avremo

$$(37)\quad \frac{ml}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) = g\,.\,11035\,.\,h\left(\frac{ml}{x} - 1\right)$$

ossia

$$(38)\quad \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) = g\,.\,22070\,.\,h\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{ml}\right\}$$

permuto la differenziale, sarà

$$-\frac{\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^3} = g\,.\,22070\,.\,h\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{ml}\right\}$$

integrando si troverà

$$\frac{1}{2\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2} = g\,.\,22070\,.\,h\left\{\log.\,x - \frac{x}{ml}\right\} + C$$

ossia permutando di nuovo la variabile nella differenziale

$$(39)\quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2g\,.\,22070\,.\,h\left\{\log.\,x - \frac{x}{ml}\right\} + C$$

ora al principio del movimento quando la velocità $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = 0$, si ha $x = l$, dunque sarà

$$C = 2g\,.\,22070h\left(\frac{1}{m} - \log.\,l\right)$$

sostituendo questo valore della costante nella (39) avremo

$$(40)\quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2g\,.\,22070h\left\{\frac{l-x}{ml} + \log.\,\frac{x}{l}\right\}$$

e quest'equazione ci farà conoscere la velocità corrispondente ai diversi luoghi, ne' quali troverassi l'ultima falda del fluido sulla quale agisce col proprio peso l'atmosfera.

N.° 19. *Corol. I.* Invece della x poniamo in quest'equazione (40) il suo valore dato per Δ che è $x = \frac{ml}{\Delta}$ si avrà

$$(41)\quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2g \,.\, 22070 \,.\, h \left\{ \frac{l}{m} - \frac{1}{\Delta} - \log.\frac{1}{m} + \log.\frac{1}{\Delta} \right\}$$

e questa ci darà la relazione tra la velocità, e la densità. Se nell'equazione (34) facciamo $\Delta = 1$, la differenziale $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$ diviene $= 0$, dunque essendo la velocità $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$ in principio del moto per sua natura crescente, questo valore di Δ che annulla la sua differenziale corrisponderà al massimo della velocità, la quale sarà perciò data da quest'equazione (41) ponendo in essa $\Delta = 1$, ossia sarà data dall'equazione

$$(42)\quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2g \,.\, 22070 h \left\{ \frac{1}{m} - 1 - \log.\frac{1}{m} \right\}$$

N.° 20. *Corol. II.* Ritorno all'equazione (40)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2g \,.\, 22070 h \left\{ \frac{l-x}{ml} + \log.\frac{x}{l} \right\};$$

affine di conoscere per mezzo di questa il valore del tempo, che il fluido impiega a restringersi entro una data sezione: convien integrarla; perciò suppongo $\frac{x}{l} = 1 - y^2$ sarà $l - x = ly^2$, e $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -2ly\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$, fatte queste sostituzioni otterremo

$$4l^2y^2\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = 2g \,.\, 22070 \,.\, h \left\{ \frac{y^2}{m} + \log.(1 - y^2) \right\}$$

permutando la differenziale, ed estraendo la radice, quest' equazione si trasformerà nella seguente

$$\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) = \frac{2l}{\sqrt{2g \,.\, 22070 h}} \; \frac{y}{\left(\frac{y^2}{m} + \log.(1 - y^2)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ora osservando che

$$\log.\, 1 - y^2 = -\left(y^2 + \frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{3} + \text{ec.}\right)$$

avremo sostituendo

$$\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) = \frac{2l}{\sqrt{2g \,.\, 22070 \,.\, h}} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{1}{m} - 1\right) - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^4 - \text{ec.}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

sviluppando in serie il secondo membro, facendo per semplicità di calcolo $\sqrt{2g \,.\, 22070 \,.\, h} = \pi$, sarà

$$\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) = \frac{2l}{\pi}\left\{\left(\frac{1}{m}-1\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-1\right)^{-\frac{3}{2}}\left\{-\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^4 - \text{ec.}\right\} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2}\left(\frac{1}{m}-1\right)^{-\frac{5}{2}}\left\{+\frac{1}{2^2}y^4 + \text{ec.}\right.\right.$$

faccio

$$A = \frac{2l}{\pi}\left(\frac{1}{m}-1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$B = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-1\right)^{-1}\cdot\frac{2l}{\pi}\left(\frac{1}{m}-1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$C = \left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{m}-1\right)^{-1} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{m}-1\right)^{-2}\right\}\frac{2l}{\pi}\left(\frac{1}{m}-1\right)^{-\frac{1}{2}},$$

sarà

$$\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) = A + By^2 + Cy^4 + \text{ec.}$$

quindi integrando avremo

$$(43) \quad t = Ay + \tfrac{1}{3}By^3 + \tfrac{1}{5}Cy^5 + \text{ec.}$$

senza costante poichè fatto $t = 0$, si ha $x = l$, ed $y = 0$; potremo quindi per mezzo di questa serie facilissima a proseguirsi determinare approssimatamente il tempo dato il luogo, o la distanza dal fondo del cilindro alla quale trovasi la falda più esteriore alla fine dello stesso tempo.

Se indichiamo con λ la distanza dal fondo del cilindro alla quale troverassi la falda più esterna del fluido alla fine del movimento, distanza che or ora insegneremo a determinare, e facciamo $l - \lambda = l\mu^2$, avremo il tempo totale della condensazione dato dalla serie

$$(44) \quad t = A\mu + \tfrac{1}{3}B\mu^3 + \tfrac{1}{5}C\mu^5 + \text{ec.}$$

N.° 21. *Corol. III.* Nell'equazione (41) del Corol. I.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2g \,.\, 22070 \,.\, h\left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{\Delta} - \log.\frac{1}{m} + \log.\frac{1}{\Delta}\right\}$$

faccio $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = 0$, il secondo membro eguagliato a zero, e risoluto relativamente a Δ ci farà conoscere la densità del fluido rinchiuso allorchè l'atmosfera ha terminato di comprimerlo, e questo valore sarà dato dall'equazione

$$(45)\quad \frac{1}{m}-\frac{1}{\Delta}=\log.\frac{1}{m}-\log.\frac{1}{\Delta}$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$\frac{e^{\frac{1}{m}}}{e^{\frac{1}{\Delta}}}=\frac{\Delta}{m}$$

che si risolve nella proporzione

$$\frac{1}{m}:e^{\frac{1}{m}}::\frac{1}{\Delta}:e^{\frac{1}{\Delta}};$$

per mezzo della quale sarà facilissimo a costruire il valore di Δ: poichè descritta una logaritmica (*fig. V*) col parametro, o modulo $=1$, presa un'ascissa $AP=\frac{1}{m}$, ed innalzata l'ordinata PM, e condotta dal centro A, o origine delle coordinate al punto M la retta AM, dal punto N ove questa retta sega la curva abbassata NQ, sarà $AQ=\frac{1}{\Delta}$. Per mezzo di questa si avrà poi la distanza λ alla quale troverassi l'ultima falda dal fondo alla fine del moto, poichè nell'equazione $x=\frac{ml}{\Delta}$ avremo $\lambda=AQ\,.\,m\,.\,l$.

N.° 22. *Scolio*. Intanto noi dimostreremo che questo valore di Δ deve essere maggiore dell'unità; infatti nell'equazione

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2=2g\,.\,22070h\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{\Delta}-\log.\frac{1}{m}+\log.\frac{1}{\Delta}\right\}$$

il valore di $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$, abbiamo veduto che diviene massimo e positivo fatto $\Delta=1$: ora noi possiamo prendere per Δ un numero tanto grande da rendere il logaritmo della frazione $\frac{1}{\Delta}$ che sarà negativo maggiore della somma di tutti gli altri termini, e perciò fare che il valore di $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$ passi ad essere negativo; vi sarà adunque come è noto fra l'unità, e quest'altro limite un numero per Δ tale che renderà il secondo membro $=0$, e perciò $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2=0$, e $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)=0$, e questo sarà il valore della densità alla fine del movimento cagionato dalla compressione dell'atmosfera.

Quando adunque la densità del fluido giungerà ad avere questo valore, la velocità del medesimo sarà zero, e l'atmosfera non gli premerà sopra più che col suo peso, quindi esso dotato di una maggiore densità di quella, ed avente in conseguenza una forza elastica anche maggiore, di nuovo si dilaterà, e respingerà l'atmosfera. Le considerazioni sul moto di questa dilatazione formano il soggetto del seguente Problema.

PROBLEMA VI.°

N.° 23. ,, Il fluido rimasto nel cannello dopo la prima ,, espulsione essendo stato in seguito dall'atmosfera troppo ,, costipato, per cui ha acquistato una densità ed un elate- ,, rio maggiore di quella, di nuovo tornerà a dilatarsi. Si ,, dimanda la relazione tra gli elementi del moto di questa ,, dilatazione? ,,

Ritenute le stesse denominazioni anteriori, ritroveremo colle stesse considerazioni del N.° 18 fatte nel caso della compressione antecedente, che $a^2\Delta\frac{x}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$ sarà la forza motrice totale che sollecita il fluido nel cilindro; ma di più essendo occupata dall'atmosfera la parte rimanente del cilindro abbandonata dal fluido nel condensarsi, dovrà la forza elastica del medesimo comunicare anche alla intiera colonna d'aria che la riempirà una velocità comune, ed eguale a quella dell'ultima sua falda ad essa contigua, ossia una velocità $=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$, la forza acceleratrice quindi che animerà questa colonna sarà $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$, e moltiplicando questa per la massa della medesima che essendo di una densità $=1$ verrà espressa da $a^2(l-x)$, otterremo la forza motrice, che ne accelera il movimento, data da $a^2(l-x)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$, e la somma delle due forze motrici di quella cioè che anima il fluido che si dilata, e di quella che agisce sulla colonna atmosferica che viene espulsa, dovrà eguagliare la forza elastica del fluido, o il peso di una colonna del medesimo la cui altezza possa equilibrarla, ed avente per base a^2, diminuito del peso che l'atmosfera farebbe sulla detta base, ossia dovrà eguagliare la forza $a^2.g.11035.h(\Delta-1)$; si avrà perciò l'equazione

$$a^2\Delta\,.\,\frac{x}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)+a^2(l-x)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=a^2.g\,.\,11035\,.\,h(\Delta-1)$$

ossia

$$(46)\quad \left\{\frac{\Delta x}{2}+l-x\right\}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=g\,.\,11035h\,.(\Delta-1)$$

ora la massa del fluido essendo costante, indicata con m la densità del medesimo al principio del moto N.° 21, e con λ la distanza dal fondo del cilindro a cui troverassi in quest'istante la falda più esteriore sarà

$$(47)\quad ma^2\lambda=\Delta a^2 x$$

ossia

$$\Delta=\frac{m\lambda}{x}$$

sostituendo per Δ questa quantità, la nostra equazione si ridurrà alla seguente

$$(48)\quad \left\{\frac{m\lambda}{2}+l-x\right\}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=g\,.\,11035\,.\,h\left(\frac{m\lambda}{x}-1\right)$$

dalla quale fatto per semplicità di calcolo $\frac{m\lambda}{2}+l=\psi$ dedurremo

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=g\,.\,11035\,.\,h\left\{\frac{m\lambda}{x(\psi-x)}-\frac{1}{\psi-x}\right\}$$

faccio

$$\frac{m\lambda}{x(\psi-x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{\psi-x}$$

si troverà riducendo allo stesso denominatore le due frazioni, ed eguagliando a zero i coefficenti delle potenze omologhe della x, che dovrà essere

$$A = B = \frac{m\lambda}{\psi}$$

onde la nostra equazione potremo trasformarla in questa

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) = g \,.\, 11035 \,.\, h \left\{ \frac{m\lambda}{\psi} \,.\, \frac{1}{x} + \frac{m\lambda}{\psi} \; \frac{1}{(\psi - x)} - \frac{1}{\psi - x} \right\}$$

moltiplico un membro, e l'altro per $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$, ed integro sarà

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2g \,.\, 11035 \,.\, h \left\{ \frac{m\lambda}{\psi} \log . x + \left(1 - \frac{m\lambda}{\psi}\right) \log . (\psi - x) \right\} + C$$

per determinare la costante osservo che al principio del moto allorchè la velocità $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$ è zero, si ha $x = \lambda$ dunque

$$C = 2g \,.\, 11035 h \left\{ \frac{m\lambda}{\psi} \log . \lambda + \left(1 - \frac{m\lambda}{\psi}\right) \log . (\psi - \lambda) \right\}$$

quindi l'integrale particolare sarà dato dall'equazione

$$(49) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2g \,.\, 11035 \,.\, h \left\{ \log . x^{\frac{m\lambda}{\psi}} (\psi - x)^{1 - \frac{m\lambda}{\psi}} - \log . \lambda^{\frac{m\lambda}{\psi}} (\psi - \lambda)^{1 - \frac{m\lambda}{\psi}} \right\}$$

per mezzo della quale si conoscerà la relazione tra la velocità, e la distanza dal fondo del cilindro, o luogo ove trovasi l'ultima falda in contatto dell'atmosfera.

N.° 24. *Corol. I.* Poniamo in questa in luogo di x il suo valore dato dall'equazione (47) si avrà

$$(50) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2g \,.\, 11035 \,.\, h \left\{ \log . \frac{m\lambda}{\Delta}^{\frac{m\lambda}{\psi}} \left(\psi - \frac{m\lambda}{\Delta}\right)^{1 - \frac{m\lambda}{\psi}} - \log . \lambda^{\frac{m\lambda}{\psi}} (\psi - \lambda)^{1 - \frac{m\lambda}{\psi}} \right\}$$

dalla quale si ha la relazione tra la velocità, e la densità in un tempo qualunque. Nell'equazione (46) fatto $\Delta = 1$ divenendo eguale a zero il secondo membro, converrà che $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$ sia zero, la differenziale adunque della velocità $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$ è annullata da $\Delta = 1$, quindi essendo la velocità crescente in principio del moto, $\Delta = 1$ sarà il valore della densità quando la velocità è massima, e questa sarà data dall'equazione

$$(51)\quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2g.11035.h\left\{\log. m\lambda^{\frac{m\lambda}{\psi}}(\psi - m\lambda)^{1-\frac{m\lambda}{\psi}} - \log.\lambda^{\frac{m\lambda}{\psi}}(\psi-\lambda)^{1-\frac{m\lambda}{\psi}}\right\}$$

N.° 25. *Corol. II.* Resta ora a conoscersi la relazione tra il tempo, che l'ultima falda impiega a giungere ad una data sezione, e la distanza di questa sezione stessa dal fondo; perciò conviene integrare l'equazione (49), e per semplificare i calcoli comincio a supporre $2g.11035.h = \pi^2$, $\frac{m\lambda}{\psi} = \alpha$, $1 - \frac{m\lambda}{\psi} = \beta$, sarà quindi

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \pi^2\left\{\alpha\log.x + \beta\log.(\psi - x) - \alpha\log.\lambda - \beta\log.(\psi-\lambda)\right\}$$

faccio in questa $x = \lambda + y^2$, sarà $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = 2y\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$, e sostituendo avremo

$$4y^2\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \pi^2\left\{\alpha\log.(\lambda + y^2) + \beta\log.(\psi - \lambda - y^2) - \alpha\log.\lambda - \beta\log.(\psi-\lambda)\right\}$$

ossia

$$4y^2\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \pi^2\left\{\alpha\log.\left(1 + \frac{y^2}{\lambda}\right) + \beta\log.\left(1 - \frac{y^2}{\psi-\lambda}\right)\right\}$$

ora essendo

$$\log.\left(1 + \frac{y^2}{\lambda}\right) = \frac{y^2}{\lambda} - \frac{1}{2}\frac{y^4}{\lambda^2} + \frac{1}{3}\frac{y^6}{\lambda^3} - \text{ec.}$$

$$\log.\left(1 - \frac{y^2}{\psi-\lambda}\right) = -\left\{\frac{y^2}{\psi-\lambda} + \frac{1}{2}\frac{y^4}{(\psi-\lambda)^2} + \frac{1}{3}\frac{y^6}{(\psi-\lambda)^3} + \text{ec.}\right\}$$

sostituendo queste serie, e dividendo per $4y^2$ otterremo

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}\left\{\left(\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\beta}{\psi-\lambda}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{\beta}{(\psi-\lambda)^2}\right)y^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{\lambda^3} - \frac{\beta}{(\psi-\lambda)^3}\right)y^4 - \text{ec.}\right\}$$

nella quale equazione permutando la variabile nella differenziale, estraendo la radice, e rovesciando dedurrassi

$$\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\beta}{\psi-\lambda}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{\beta}{(\psi-\lambda)^2}\right)y^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{\lambda^3} - \frac{\beta}{(\psi-\lambda)^3}\right)y^4 - \text{ec.}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

sviluppando in serie il secondo membro risulterà

$$\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)=\frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{\beta}{\psi-\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{\beta}{\psi-\lambda}\Bigg)^{-\frac{3}{2}}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\lambda^2}+\frac{\beta}{(\psi-\lambda)_2}\right)y^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{\lambda^2}-\frac{\beta}{(\psi-\lambda)^3}\right)y^4-\text{ec.}\right.$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2}\left(\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{\beta}{\psi-\lambda}\right)^{-\frac{5}{2}}\left\{\frac{1}{2^2}\left(\frac{\alpha}{\lambda^2}+\frac{\beta}{(\psi-\lambda)^2}\right)y^4+\text{ec.}\right\}\Bigg\}$$

e rappresentando con A, B, C i coefficienti delle diverse potenze di y^2, sarà

$$A=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{\beta}{\psi-\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$B=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{\beta}{\psi-\lambda}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha}{\lambda^2}+\frac{\beta}{(\psi-\lambda)^2}\right)\cdot\frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{\beta}{\psi-\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$C=\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{\beta}{\psi-\lambda}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha}{\lambda^3}-\frac{\beta}{(\psi-\lambda)^3}\right)+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\left(\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{\beta}{\psi-\lambda}\right)^{-2}\left(\frac{\alpha}{\lambda^2}+\frac{\beta}{(\psi-\lambda)^2}\right)\right\}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha}{\lambda}-\right.$$

per cui più semplicemente scriveremo

$$\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)=A+By^2+Cy^4+\text{ec.}$$

integrando quest'equazione si ha

$$(52)\quad t=Ay+\tfrac{1}{3}By^3+\tfrac{1}{5}Cy^5+\text{ec.}$$

senza costante perchè essendo $y^2=x-\lambda$ si ha $x=\lambda$, ossia $y=0$, quando $t=0$, e per mezzo di questa serie, che si può protrarre a volontà, conosceremo il tempo che la prima falda impiega a giungere ad una data sezione.

Se indichiamo con λ' la distanza dal fondo del cilindro alla quale arriverà la prima falda fluida alla fine del moto, e facciamo $\mu^2=\lambda'-\lambda$, avremo il tempo totale della dilatazione espresso dalla serie

$$(53)\quad t=A\mu+\tfrac{1}{3}B\mu^3+\tfrac{1}{5}C\mu^5+\text{ec.}$$

N.° 26. *Corol. III.* Per conoscere Δ, e λ alla fine del moto riprendo l'equazione notata (50)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2=2g\,.\,11035\,.\,h\left\{\log.\frac{m\lambda}{\Delta}^{\frac{m\lambda}{\psi}}\left(\psi-\frac{m\lambda}{\Delta}\right)^{1-\frac{m\lambda}{\psi}}-\log.\lambda^{\frac{m\lambda}{\psi}}(\psi-\lambda)^{1-\frac{m\lambda}{\psi}}\right\}$$

fatto in questa

$$\log.\frac{m\lambda}{\Delta}^{\frac{m\lambda}{\psi}}\left(\psi-\frac{m\lambda}{\psi}\right)^{1-\frac{m\lambda}{\psi}}-\log.\lambda^{\frac{m\lambda}{\psi}}(\psi-\lambda)^{1-\frac{m\lambda}{\psi}}=0$$

sarà $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = 0$, ed il valore che ricaveremo per Δ esprimerà la densità allorchè la velocità è estinta, ossia alla fine del movimento; facendo per abbreviare $\frac{1-\frac{m\lambda}{\psi}}{\frac{m\lambda}{\psi}} = a$, e togliendo i logaritmi questo valore sarà dunque dato dall'equazione

$$(54)\quad \frac{m\lambda}{\Delta}\left(\psi - \frac{m\lambda}{\Delta}\right)^{a} = \lambda(\psi - \lambda)^{a}$$

e se per mezzo di questa determiniamo il valore della densità Δ, tosto potremo conoscere anche quello della x ossia della distanza dell'ultima falda più esterna del cilindro indicata con λ', poichè abbiamo dall'equazione (47) $x = \frac{m\lambda}{\Delta}$; oppure viceversa si potrà mettere per $\frac{m\lambda}{\Delta}$ nella suddetta equazione la quantità $x = \lambda'$, e determinare per mezzo della seguente

$$(55)\quad \lambda'(\psi - \lambda')^{a} = \lambda(\psi - \lambda)^{a}$$

il valore di λ', e poi coll'equazione $\Delta = \frac{m\lambda}{\lambda'}$ determinare quello della densità alla fine del movimento.

N.° 27. *Scolio I.* Diamo all'equazione (50) la forma

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^{2} = 2g \,.\, 11035 \,.\, h \log. \frac{\left(\frac{m\lambda}{\Delta}\right)^{\frac{m\lambda}{\psi}}\left(\psi - \frac{m\lambda}{\Delta}\right)^{1-\frac{m\lambda}{\psi}}}{\lambda^{\frac{m\lambda}{\psi}}(\psi-\lambda)^{1-\frac{m\lambda}{\psi}}}$$

per mezzo della medesima facilmente dimostreremo che il valore di Δ che corrisponde alla densità alla fine del moto è minore dell'unità. Perciò comincio a riflettere che gli esponenti $\frac{m\lambda}{\psi}$, ed $1 - \frac{m\lambda}{\psi}$, sono amendue positivi; il primo lo è evidentemente siccome tutto composto di quantità positive, il secondo lo si potrà dimostrare osservando, che $a^2 m\lambda$ rappresenta la massa fluida al principio della dilatazione la quale deve essere la medesima di quando il fluido cominciò ad essere compresso dopo la prima espulsione; ma la massa fluida in quel tempo era minore di $a^2 l$, perchè la densità fu dimostrata al N.° 17 minore dell'unità, sarà perciò $a^2 m\lambda < a^2 l$, ossia $m\lambda < l$, e quindi $\frac{m\lambda}{l}$ sarà una frazione; a maggior ragione adunque sarà una frazione $\frac{m\lambda}{\psi}$ perchè ψ è eguale ad $l + \frac{m\lambda}{2}$, onde $1 - \frac{m\lambda}{\psi}$ sarà una quantità positiva. Ciò posto abbiamo veduto al N.° 24 che il quadrato della velocità $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$ è reso massimo, e positivo da $\Delta = 1$, dunque $\Delta = 1$, renderà positiva la quantità

$$\log.\frac{\left(\frac{m\lambda}{\Delta}\right)^{\frac{m\lambda}{\psi}}\left(\psi - \frac{m\lambda}{\Delta}\right)^{1 - \frac{m\lambda}{\psi}}}{\lambda^{\frac{m\lambda}{\psi}}(\psi - \lambda)^{1 - \frac{m\lambda}{\psi}}}$$

ma questa stessa quantità può rendersi negativa col dare a Δ un valore così piccolo da rendere il numeratore minore del denominatore giacchè Δ eguale alla frazione $\frac{m\lambda}{\psi}$ annulla il numeratore; vi sarà adunque fra l'unità, e questa frazione un valore per Δ frazionario che renderà questa quantità zero, e questo sarà il valore della densità alla fine del moto.

N.° 28. *Scolio II.* Il fluido si sarà adunque dilatato in modo, che la sua densità sarà divenuta < 1, ossia minore di quella dell'atmosfera, non avrà quindi più una forza elastica bastante ad equilibrare il peso della medesima onde verrà per un'altra volta compresso, e noi risolveremo il Problema di questa seconda condensazione colle stesse equazioni, dei numeri (18), (19), (20), (21), (23), (24), (25), (26), che servivano a risolvere quello della prima, salvo che in questa per m ora deve intendersi la densità, che aveva il fluido alla fine dell'ultima dilatazione, e per l dovrà porsi λ', intendendo con questa lettera rappresentata la distanza dal fondo del cannello alla quale ritrovasi la falda più esteriore alla fine della detta dilatazione. Siccome l'equazione (45) che dà il valore della densità del fluido contenuto nel cilindro alla fine della condensazione non può essere soddisfatta che essendo Δ un numero > 1, ciò che dimostra che la densità del fluido deve essere maggiore di quella dell'atmosfera, così in seguito a questa condensazione succederà un'altra dilatazione, dopo questa si troverà seguire una terza condensazione, e così successivamente in modo che il fluido contenuto nel cilindro farà per così dire una serie di oscillazioni le quali anderanno sempre più restringendosi. Noi potremo risolvere i problemi del movimento di queste dilatazioni, e condensazioni colle formole che abbiamo date per la prima condensazione, e dilatazione attribuendo soltanto alle lettere che esprimono le diverse quantità nello stato iniziale del movimento quei valori che al principio di ciascuna condensazione, e dilatazione si convengono.

In queste oscillazioni che il fluido fa nell'interno del cilindro la pressione, che soffrono le pareti sarà sempre varia, determiniamone perciò la grandezza in ogni istante, e in ogni luogo.

Problema VII.

N.° 29. „ Nelle oscillazioni che il fluido rimasto nel cannello dopo la prima espulsione farà nell'interno del medesimo, le pareti verranno continuamente ora più ora meno premute. Si dimanda il valore di questa pressione per ciascun punto in ogni istante. „

Per ottenere tale valutazione riprendasi l'equazione (3) del numero 7 che è

$$-ga^2\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)=a^2\Delta\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$$

e sostituisco in questa per $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$, l'altro differenziale $\frac{z}{x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$

che gli è eguale, come si è veduto al N.° 18 sarà quindi

$$-g\,.\,a^2\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)=a^2\Delta\,\frac{z}{x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$$

integrando questa relativamente alla variabile z sarà

$$(56)\quad -g\,.\,a^2p=a^2\,.\,\Delta\,\frac{z^2}{2x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)+\mathrm{C}$$

la costante deve essere determinata in modo che quando z divenga eguale ad x cioè all' ascissa della falda più esteriore la $g\,.\,a^2p$ che rappresenta la pressione diventi appunto quella che soffre questa falda. Ora allorchè il fluido è compresso dall' atmosfera evidentemente la sua pressione equivale al peso della medesima, che è espresso come abbiamo veduto da $g\,.\,a^2\,.\,11035\,.\,h$: sarà perciò

$$\mathrm{C}=-g\,.\,a^2\,.\,11035\,.\,h-a^2\Delta\,\frac{x^2}{2x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$$

onde sostituendo risulterà

$$(57)\quad g\,.\,a^2\,.\,p=a^2\Delta\left\{\frac{x^2-z^2}{2x}\right\}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)+g\,.\,a^2\,.\,11035\,.\,h$$

e questa sarà l' espressione della pressione in questo caso.

Non così avverrà però allorchè il fluido si dilata; per questo secondo caso allorchè z diviene eguale ad x la pressione $g\,.\,a^2\,.\,p$ dovrà diventare quella che soffre l' ultima falda, la quale oltre il peso dell' atmosfera risente la resistenza, o pressione che esercita nel muovere la colonna d' aria esterna che le è avanti; converrà adunque prima ricercare questa pressione. A tal fine s' indichi con π la pressione in una sezione qualunque della colonna d' aria atmosferica contenuta nel cilindro, e con ζ la sua ascissa, o distanza dal fondo, collo stesso ragionamento col quale abbiamo ottenuta l' equazione (3) al N.° 6 avremo

$$-g\,.\,a^2\left(\frac{\partial \pi}{\partial \zeta}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)$$

ma essendo la velocità in tutta l' estensione della colonna atmosferica eguale a quella della falda più esteriore del fluido che si dilata, e che le comunica movimento, sarà $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)$, e quindi $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)$ dunque sostituendo avremo

$$-g\,.\,a^2\left(\frac{\partial \pi}{\partial \zeta}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$$

ed integrando relativamente a ζ, ossia all' estensione della colonna atmosferica

$$-g\,.\,a^2\,.\,\pi=a^2\zeta\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)+\mathrm{C}$$

allorchè $\zeta=l$, la pressione $-g\,.\,a^2\pi$ deve essere quella dell' atmosfera, dunque sarà

$$-g\,.\,a^2\,.\,11035\,.\,h-a^2 l\,.\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=\mathrm{C}$$

e quindi troveremo

$$g\,.\,a^2\pi=a^2(l-\zeta)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)+g\,.\,a^2\,.\,11035\,.\,h$$

e quest'equazione ci farà conoscere la pressione sulle pareti di quella porzione di cannello, che è occupata dall'atmosfera: fatto poi $\zeta=x$, avremo la pressione sull'ultima falda ossia quella che soffre la superficie del fluido dilatandosi, che sarà

$$ga^2\,.\,\pi=a^2(l-x)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)+g\,.\,a^2\,.\,11035\,.\,h$$

determinando ora la costante nell'equazione integrale (56) col fare che quando z diviene eguale ad x, sia $g\,.\,a^2p=ga^2\,.\,\pi$ risulterà

$$(58)\quad g.a^2.p=\left\{\left(\frac{x^2-z^2}{2x}\right)\Delta+l-x\right\}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)+g\,.\,a^2.\,11035\,.\,h$$

e questa varrà per valutare la pressione nel secondo caso nel quale il fluido si dilata.

N.° 30. *Corol.* Nelle due equazioni (57) (58) sostituiamo per $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$ il valore in funzione della densità tratto dalle equazioni (34), (46), si troverà per la prima che vale nel caso in cui è condensato il fluido

$$(59)\quad g\,.\,a^2p=a^2\left\{1-\frac{z^2}{l^2}\right\}g\,.\,11035\,.\,h(\Delta-1)+a^2.\,g\,.\,11035\,.\,h$$

e per la seconda che dà il valore della pressione nel caso che il fluido si dilati

$$(60)\ g\,.\,a^2p = a^2\left\{1-\frac{\frac{z^2}{2r}\Delta}{\frac{\Delta v}{2}+l-x}\right\}g\,.\,11035h(\Delta-1)+a^2g\,.\,11035\,.\,h$$

e queste due equazioni serviranno a determinare la pressione in ogni luogo, ed in ogni tempo per mezzo della densità nello stesso tempo.

Fatto in queste $z = 0$ si avrà la pressione sul fondo la quale si troverà in amendue i casi espressa da

$$(61)\ g\,.\,a^2p = g\,.\,a^2\,.\,11035\,.\,h\,.\,\Delta$$

ciò che c' insegna che la pressione sul fondo ha per misura il peso di una colonna di fluido, che abbia per base il fondo istesso, ed un' altezza tale da equilibrare la forza elastica che il fluido ha nello stesso istante.

N.° 31. *Esempio*. Applichiamo tutte le ritrovate equazioni ad un caso particolare e numerico. Supponga per questo caso che la lettera

l la quale dinota la lunghezza del cannello sia eguale ad un metro,

a^2 o l' area del circolo che gli è di base $= 0,004$ metri quadrati,

m o la densità al principio dell' espulsione eguale ad 80 volte quella dell' atmosfera; cosicchè il fluido contenuto nel cannello abbia un elaterio 80 volte più grande della medesima, elaterio che secondo le esperienze del Sig. *Rumford* eguaglia presso a poco quello che avrebbe l' aria che si sviluppa nell' accensione di una quantità di polvere che riempisse la venticinquesima parte della capacità del cilindro.

g. che è la gravità sia come si fa comunemente eguale a 9,8088 metri; questa essendo la velocità che un grave acquista liberamente cadendo in un secondo di tempo.

L' unità di tempo sarà perciò il secondo.

L' unità di peso sia il chilogrammo: poichè un metro cubico d' acqua nel vuoto pesa prossimamente chilogrammi 1000 essendo la gravità specifica dell'acqua a quella dell'aria come 1000 : 12,3233 (vedi la nota al N.° 3. III.) sarà il peso di un metro cubico d'aria = 12,3233 chilogrammi.

Dati questi valori alle lettere delle sovra esposte equazioni, e risolute numericamente per approssimazione le equazioni segnate (45) (55) si troverà, che per la prima espulsione, e per 20 oscillazioni consecutive corrisponderanno alle densità, e pressioni alla fine, e principio di ciascuna oscillazione, e alle rispettive velocità massime i valori registrati nella seguente Tavola.

TAVOLA.

Numero delle Oscillazioni		Lunghezza della colonna fluida al principio del moto.	Densità della colonna fluida al principio del moto.	Velocità massima a cui giunge l'ultima falda più esteriore.	Tempo totale dal principio alla fine del moto.	Pressione sul fondo del cilindro al principio del moto.
				ESPULSIONE		
		m	chil.	m		chil.
1	Espulsione	1 , 0000	80 , 0000	211 , 3445	0", 3700	33072, 1830
				OSCILLAZIONI		
2	1.a Condensaz.	1 , 0000	0 , 6667	176 , 5247	0", 0042	275, 6153
3	1.a Dilataz.	0 , 4184	1 , 5935	110 , 8443	0 , 0047	658, 7566
4	2.da Condens.	0 , 9150	0 , 7286	135 , 5932	0 , 0041	301, 2049
5	2.da Dilataz.	0 , 4680	1 , 4246	87 , 5863	0 , 0048	588, 8328
6	3.za Condens.	0 , 8654	0 , 7704	110 , 4887	0 , 0041	319, 2194
7	3.za Dilataz.	0 , 5010	1 , 3306	72 , 5656	0 , 0048	550, 0730
8	4.ta Condens.	0 , 8324	0 , 8009	93 , 5560	0 , 0041	331, 0938
9	4.ta Dilataz.	0 , 5243	1 , 2717	62 , 0092	0 , 0049	525, 7237
10	5.ta Condens.	0 , 8091	0 , 8240	81 , 1233	0 , 0041	340, 6435
11	5.ta Dilataz.	0 , 5420	1 , 2300	54 , 1844	0 , 0049	508, 4848
12	6.ta Condens.	0 , 7914	0 , 8424	71 , 6297	0 , 0041	348, 2502
13	6.ta Dilataz.	0 , 5559	1 , 1994	48 , 0716	0 , 0050	495, 8347
14	7.ma Condens.	0 , 7775	0 , 8575	63 , 8766	0 , 0041	354, 4925
15	7.ma Dilataz.	0 , 5670	1 , 1760	43 , 0746	0 , 0051	486, 1611
16	8.va Condens.	0 , 7664	0 , 8699	58 , 2183	0 , 0041	359, 6190
17	8.va Dilataz.	0 , 5760	1 , 1575	39 , 4108	0 , 0051	478, 5131
18	9.na Condens.	0 , 7574	0 , 8803	52 , 5739	0 , 0041	363, 9181
19	9.na Dilataz.	0 , 5834	1 , 1428	35 , 8899	0 , 0052	472, 4359
20	10.ma Conden.	0 , 7500	0 , 8839	49 , 0108	0 , 0041	367, 4733
21	10.ma Dilataz.	0 , 5897	1 , 1307	33 , 4299	0 , 0053	467, 4340

Dalle pressioni scritte in questa tavola converrà, allorchè si vuole il valore della spinta dalla quale è cacciato il cilindro, sottrarre il peso di chilogrammi 413,4023 che è la pressione che fuori del cilindro si fa dall'aria esterna sul fondo del medesimo.

Da questa tavola si vede quanto è forte la pressione che un fluido che sorte da un vase nel quale sia condensato fa sul fondo del medesimo al principio della sua prima espulsione se la densità è un po' grande; questa dura però brevissimo tempo, nel quale altresì scema rapidamente: ciò non ostante non è maraviglia se da così enormi pressioni accade che pesantissimi cannoni ancorchè caricati senza palla sono nello scoppio fortemente smossi e respinti indietro ciò che non si saprebbe comprendere se tanta forza dovesse provenire dalla resistenza dell'aria.

Finita la prima espulsione succede tra l'aria esterna, ed il fluido contenuto nel cilindro un contrasto che produce una serie di velocissimi tremiti; in natura però l'imperfezione dell'elaterio dei fluidi può forse alterare in gran parte il risultamento del calcolo applicato a questo caso puramente speculativo.

N.° 32. *Scolio*. Nel sottoporre a calcolo il moto del fluido elastico che sorte nell'aria esterna la resistenza che io ho considerata fu quella della pressione che l'atmosfera fa sulla colonna fluida che esce. Ciò non basterebbe secondo l'opinione di alcuni i quali credono che l'urto che il fluido fa sull'aria esterna sia un ostacolo fortissimo alla sua uscita, ed anzi vogliono che si debba a questo solo attribuire i sorprendenti effetti del retrocedimento, o rinculo de' razzi a polvere, della nota esperienza dell' Eolipila a vapori, e di varj altri consimili fenomeni. Ma a quest'asserzione io opporrò primieramente le ripetute esperienze del Prof. *Brunacci*, il quale primo provò che questa non era la vera causa del fenomeno facendo che il fluido nell'uscire andasse a percuotere su di una dura tavola molto più resistente che l'aria, e non iscorgendovi veruna alterazione di effetti, nè una spinta all'indietro con maggiore efficacia, il che prova che il rinculo del vaso è affatto indipendente dalla resistenza od urto che il fluido potrebbe incontrare al di fuori, perchè se questa fosse la vera causa essendo state variate notabilmente le circostanze della medesima per la relazione che vi deve essere tra causa ed effetto ne dovrebbero essere risultati effetti diversi (*a*). Aggiungerò in seguito un'osservazione che mi par decisiva. Se si risguardi la colonna fluida che sorte dal vaso, si vede che questa continua per una lunga tratta ad essere calibra col diametro del cilindro stesso, o coll'apertura della bocca del vaso, questo evidentemente non potrebbe succedere se il fluido in avanti reagisse per la resistenza che incontra nell'aria su quello che è alla bocca in modo da produrre ivi una pressione maggiore di quella dell'atmosfera, perchè in tale circostanza la colonna fluida dovrebbe rigonfiarsi, e formare per così dire un gozzo. La resistenza dell'aria adunque s'impiega nell'estinguere la velocità che ha il fluido che la urta, ed è la causa che la colonna fluida dopo qualche tratta si allarga, e poi si converte in nuvole, e si dissipa lentamente nell'atmosfera, ma per la massima indipendenza che vi è tra le molecole fluide, e per la cedevolezza del mezzo in cui si spande, questa resistenza non può cagionare veruna reazione, o pressione allo sbocco.

Ho supposto finora, che il vase nel quale è compresso il fluido fosse cilindrico, per rendere completa questa teorica dedurrò ora le equazioni fondamentali del movimento del fluido qualunque sia la figura del vaso, purchè essa sia data.

(*a*) Trovasi nel discorso accademico del Prof. *Brunacci* citato nelle prime linee di questa Memoria una quantità tale di argomenti, e di esperienze, che comprovano la verità di quanto si dice in questo scolio cosicchè essa è pienamente posta fuor di dubbio.

Problema VIII.

N.° 33. „ Essendovi un vase di figura qualunque cono-
„ sciuta nel quale sia racchiuso un fluido elastico condensa-
„ to, data ad esso la libertà di sbandarsi fuori nell'atmosfe-
„ ra coll'aprire il vaso da una parte, si cercano le equazioni
„ per la risoluzione del moto di quest'espulsione. „

A tale proposito seguirò un metodo consimile a quello col quale al N.° 7 ho stabilite le equazioni pel caso che il vase fosse cilindrico. Perciò sia una sezione o spaccato del vaso rappresentato dalla *fig.* 6 A'A'Z'Z'B'B', ed il fluido sorta dalla bocca BB movendosi nella direzione dell'asse AX; conservate le denominazioni d'allora chiamo di più

A^3 la capacità totale del vaso
a^2 l'area della sezione dello sbocco
$F(z)$ la solidità o capacità della porzione di vaso A'A'Z'Z' corrispondente all'ascissa AZ, l'origine essendo in A
$f(z)$ l'area della sezione normale all'asse AX nello stesso luogo
$F(z+\omega)$ sarà la solidità corrispondente all'ascissa $x+\omega=Az$
$f(z+\omega)$ l'area della sezione normale all'asse alla fine di questa ascissa.

Essendo come abbiamo denominato al N.° 7 $\varphi(z)$ la somma di tutte le forze acceleratrici che animano le particelle fluide entro la porzione A'A'Z'Z' del vaso, e $\varphi(z+\omega)$ quella entro la porzione A'A'zz, sviluppando in serie secondo i principj del calcolo differenziale la funzione $\varphi(z+\omega)$ e sottraendo dallo sviluppo la funzione $\varphi(z)$, la serie

$$(62)\quad \omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)+\text{ec.}$$

esprimerà la somma di tutte le forze acceleratrici che animano la falda Z'Z'$z'z'$.

Nello stesso modo si troverà che l'espressione della solidità della falda Z'Z'$z'z'$ sarà data dalla serie

$$\omega\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)+\text{ec.}$$

moltiplicando questa per la densità Δ avremo la massa, che sarà

$$\Delta\left\{\omega\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)+\text{ec.}\right\};$$

se immaginiamo ora una forza acceleratrice A dalla quale essendo animata tutta la falda indeterminata $Z'Z'z'z'$ risulti una forza equivalente alla somma di tutte le forze acceleratrici, che animano la medesima falda, che è espressa dalla serie (62), è evidente che questa forza deve essere della forma $A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)+\omega Z$ poichè fatto $\omega=0$ la forza A deve essere quella della sezione $Z'Z'$ la quale è appunto $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$; moltiplicando adunque questa forza A per la massa $\Delta\left\{\omega\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)+\text{ec.}\right\}$ dovremo avere in tale supposizione l'equazione

$$\omega\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right)=\Delta\left\{\omega\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)+\text{ec.}\right\}\left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)+\omega Z\right\}$$

dalla quale col paragone dei coefficienti della prima potenza di ω dedurremo l'equazione

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)=\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$$

ma come è noto $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)=f(z)$, dunque avremo

$$(63)\quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)=\Delta f(z)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right).$$

Di più la stessa somma delle forze acceleratrici che animano la falda $Z'Z'z'z'$ la quale è espressa da

$$\omega\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right)$$

eguaglierà l'azione di tutte le forze che agiscono sulla falda medesima. Ora essendo p l'altezza della colonna che misura la pressione nella sezione $ZZ=f(z)$, il fluido sarà spinto in questa sezione dà una forza $=g\,.\,pf(z)$, ma a questa esso oppone la forza del suo elaterio la quale in questa sezione è $g\,.\,f(z)\,11035\,.\,h\,.\,\Delta$, ne risulterà perciò nella stessa sezione una forza $g\,.\,f(z)(p-11035\,.\,h\,.\,\Delta)$, che tenderà a trasportare lo strato nella direzione del moto o in direzione contraria secondo che sarà o positiva, o negativa. Nell'altra sezione $z'z'=f(z+\omega)$ il fluido tende a dilatarsi con una forza dovuta al suo elaterio la quale è espressa da $g\,.\,f(z+\omega)\,.\,11035\,.\,h\,.\,\Delta$, a questa si oppone la pressione che fa il fluido posto in avanti la quale è misurata dal peso espresso dalla serie $g\,.\,f(z+\omega)$ $\left[p+\omega\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)+\text{ec.}\right]$, si dilaterà quindi in questa sezione con una forza data da

$$g\,.\,f(z+\omega)\left[11035\,.\,h\,.\,\Delta-p-\omega\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)-\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)-\text{ec.}\right];$$

la somma adunque di queste due forze che agiscono sulle due sezioni $Z'Z'$, $z'z'$ equivalerà a quella della serie suddetta, e si avrà l'equazione

$$\omega\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right)+\text{ec.}=g.f(z)(p-11035.h.\Delta)+g.f(z+\omega)\Big[11035.h\Delta-p$$
$$-\omega\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)-\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)-\text{ec.}\Big]$$

dalla quale sviluppando in serie $f(z+\omega)$, riducendo, e paragonando i coefficienti della prima potenza di ω ricaveremo la seguente

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)=g\,.\,11035\,.\,h\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)-g\,.\left\{f(z)\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)+p\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right\}$$

ossia integrando, e trasportando

$$(64)\quad g\,.\,f(z)p=g\,.\,f(z)\,.\,11035h\,.\,\Delta-\phi+\text{C}\,.$$

Siccome al N.° 4 abbiamo supposto che il fluido si dilati uniformemente e che quindi gli aumenti di volume delle varie quantità di fluido che si dilatano sieno proporzionali alle masse, dovranno essere le quantità di fluido che passano per le diverse sezioni nello stesso istante proporzionali alle quantità di fluido comprese fra le stesse sezioni, ed il fondo; dunque essendo v la velocità dello sbocco, e $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$ quella del fluido nella sezione $f(z)$ si avrà la proporzione

$$\Delta A^3 : \Delta F(z) :: \Delta a^2 v : \Delta f(z)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

dalla quale dedurremo l'equazione

$$(65)\quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{a^2}{A^3}\,\frac{F(z)}{f(z)}\,.\,v$$

differenziata questa relativamente al tempo poichè lo stesso fluido passa sempre per diverse sezioni, F(z) e $f(z)$ saranno variabili col tempo, si avrà quindi

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = \frac{a^2}{A^3}\,.\,\frac{f(z)\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)v + F(z)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right\} - F(z)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)v}{\overline{f(z)}^2}$$

ma abbiamo $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{a^2}{A^3}\,.\,\frac{F(z)}{f(z)}\,.\,v$ sostituendo, quest'equazione si potrà ridurre alla seguente

$$(66)\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{a^2}{A^3}\right)^2 v^2\,\frac{f(z)^2 F(z)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) - F(z)^2 f(z)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\overline{f(z)}^4} + \frac{a^2}{A^3}\,\frac{F(z)}{f(z)}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

riponiamo questo valore della differenziale $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)$ nell'equazione (63), si avrà

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \Delta\left(\frac{a^2}{A^3}\right)^2 v^2\left\{\frac{F(z)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}{f(z)} - \frac{F(z)^2}{f(z)^2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right\} + \Delta\,\frac{a^2}{A^3}\,F(z)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

integrando questa relativamente a z, per lo stesso istante Δ, v, e $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$ saranno costanti, si avrà perciò

$$\varphi = \Delta\left(\frac{a^2}{A^3}\right)^2 v^2\left\{\int\frac{F(z)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\partial z}{f(z)} - \int\frac{F(z)^2\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\partial z}{f(z)^2}\right\} + \Delta\frac{a^2}{A^3}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\int F(z)\partial z + C$$

ora se si osservi che integrando per parti si ha

$$\int\frac{F(z)^2\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{f(z)^2}\,\partial z = -\frac{F(z)^2}{f(z)} + 2\int\frac{F(z)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}{f(z)}\,.\,\partial z$$

e che $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = f(z)$, avremo sostituendo

$$(67)\ \varphi=\Delta\left(\frac{a^2}{A^3}\right)^2 v^2\frac{F(z)^2}{f(z)}+\Delta\left\{-\left(\frac{a^2}{A^3}\right)^2 v^2+\frac{a^2}{A^3}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right\}\int F(z)\partial z+C$$

nella quale equazione φ rappresenterà la somma di tutte le forze acceleratrici, che animano il fluido compreso nella porzione di vaso la capacità della quale è $F(z)$, se facciamo in quest'equazione $z=0$, dovrà essere $\varphi(z)=0$, $F(z)=0$, determinando così la costante si troverà che dessa è zero; fatto poi $z=l$, cioè a tutta la lunghezza del vaso, e dinotato con M l'integrale $\int F(z)\partial z$ esteso fra i limiti $z=0$, e $z=l$ avremo per rappresentare la forza totale che anima il fluido, l'equazione

$$(68)\ \varphi=\Delta a^2v^2+\Delta\left\{-\left(\frac{a^2}{A^3}\right)^2 v^2+\frac{a^2}{A^3}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right\}M$$

e questa forza φ non essendo altro che la forza elastica con cui tende a dilatarsi il fluido allo sbocco diminuita della pressione dell'atmosfera su lo stesso, che è espressa come abbiamo veduto da $g\,.\,a^2\,.\,11035\,h(\Delta-1)$, avremo l'equazione

$$(69)\ \Delta a^2v^2+\Delta\left\{-\left(\frac{a^2}{A^3}\right)^2 v^2+\frac{a^2}{A^3}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right\}M=g\,.\,a^2\,.\,11035h\,.(\Delta-1)$$

alla quale aggiungendo l'equazione che dà la densità, che si deduce nello stesso modo che abbiamo fatto al N.° 9

$$(70)\ \Delta=\frac{A^3m-a^2\int\Delta v\partial t}{A^3}$$

potremo calcolare il moto del fluido che sorte dal vaso quando sia data l'equazione della figura dello stesso.

Il valore di φ dell'equazione (67) sostituiamolo in quella segnata (64), sarà

$$(71)\ g.f(z)p=g.f(z)\Delta.11035.h-\Delta\left\{\left(\frac{a^2}{A^3}\right)^2\frac{F(z)^2}{f(x)}v^2+\left\{-\left(\frac{a^2}{A^3}\right)^2 v^2+\frac{a^2}{A^3}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right\}\int F(z)\partial z\right\}+C$$

fatto in questa $z=l$ sarà $g\,.f(z)p$ la pressione allo sbocco, la quale è quella dell'atmosfera, e la quantità nel secondo membro fra le parentesi diventerà il primo membro dell'equazione (69) il quale eguaglia $g\,.\,a^2\,.\,11035\,h(\Delta-1)$, determinando così la costante si troverà che è zero, onde l'equazione diverrà

$$(72)\ gp=\Delta\Big\{g.11035h-\left(\frac{a^2}{A^3}\right)^2\left(\frac{F(z)}{f(z)}\right)^2v^2+\frac{1}{f(z)}\Big\{\left(\frac{a^2}{A^3}\right)^2v^2+\frac{a^2}{A^3}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\Big\}\int F(z)\partial z\Big\}$$

se in questa facciamo $z=0$, avremo la pressione sul fondo la quale a motivo che è sempre $F(z)=0$ si ridurrà

$$(73)\ gp=g\,.\,11035h\,.\,\Delta$$

ciò che c'insegna che la pressione su di un punto qualunque del fondo ha sempre per misura l'altezza della colonna che equivale col suo peso all'elaterio del fluido in quell'istante. L'equazione (72) poi quando sia cognita la figura del vaso ci farà conoscere la pressione su di un punto qualunque delle pareti del medesimo.

N.° 34. *Corol. I.* Sia la figura delle pareti del vaso una superficie di rivoluzione generata da una curva che abbia per equazione $y=\alpha z^n$ intorno all'asse delle z, è facile a vedersi che il vaso sarà un cono se $n=1$, una paraboloide se $n=2$ ec. In queste supposizioni avremo

$$f(z)=\pi\alpha^2z^{2n}$$

$$F(z)=\frac{\pi\alpha^2z^{2n+1}}{2n+1}$$

$$a^2=\pi\alpha^2l^{2n}$$

$$A^3=\frac{\pi\alpha^2l^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\int F(z)\partial z=\frac{\pi\alpha^2z^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$M=\frac{\pi\alpha^2l^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

onde sostituendo questi valori nell'equazione (69) avremo

$$\Delta\pi\alpha^2l^{2n}+\Delta\Big\{-\frac{(2n+1)^2}{l^2}+\frac{2n+1}{l}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\Big\}\frac{\pi\alpha^2l^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}=g.\pi\alpha^2l^{2n}.11035.h(\Delta-1)$$

la quale riducesi a

$$(74)\ \frac{\Delta l^{2n+2}}{2n+2}\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\}=g\,.\,11035\,.\,h(\Delta-1)$$

l'equazione (70) poi diviene

$$(75)\ \Delta=\frac{ml-(2n+1)\int\Delta v\partial t}{l}$$

posti infine gli stessi valori nell'equazione (72) avremo per la pressione in un punto qualunque delle pareti

$$gp=\Delta\left\{g.11035.h-\frac{z^2}{l^2}v^2+\frac{1}{\pi a^2 z^{2n}}\left\{\frac{(2n+1)^2}{l^2}v^2-\frac{2n+1}{l}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right\}\frac{\pi a^2 z^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\right\}$$

che si riduce a

$$(76)\ g.p=\Delta\left\{g.11035h-\frac{z^2}{2n+2}\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\}\right\}$$

sostituisco per $\left\{\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{l}}{l}\right\}$ il valore che si ha dall'equazione (74), sarà

$$(77)\ g.p=g.11035h.\Delta-\frac{z^2}{l^2}g.11035h(\Delta-1)$$

alla quale equazione si può dare anche la forma

$$(78)\ g.p=\left\{1-\frac{z^2}{l^2}\right\}g.11035.h(\Delta-1)-g.11035.h$$

dalla quale si vede, che la pressione nel cono, e in generale nelle paraboloidi di ciascun ordine segue la stessa legge andando verso il fondo che abbiamo ritrovata pel cilindro.

N.° 35. Terminerò ora questa Memoria applicando i principj della Teorica esposta alla spiegazione de' fenomeni che il Prof. *Brunacci* ha osservato nelle sopralodate esperienze fatte col mezzo di un'eolipila a vapori, e così dalla perfetta corrispondenza di queste colle conseguenze che si deducono da quelli una valida conferma ritrarranno.

Per conoscere se la pressione nell'interno dell'Eolipìla variasse in più o in meno, o fosse costante andando verso il fondo fece il sulodato Prof. costruire un'Eolipìla quale è quella rappresentata nella *fig. VII*, al dosso superiore della medesima applicò un cannellino di vetro ABC curvo, e rivolgente la sua convessità verso la stessa Eolipìla: questo cannellino si appostava, e s'internava in due bocchellini comunicanti colla capacità interna della medesima. Prima però di unire il cannellino all'Eolipìla, faceva entrare nel concavo, o pancia dello stesso un poco d'acqua che rimaneva stagnante in GF, e ciò affinchè quando fosse unito coll'Eolipila, e non facesse che un corpo solo colla medesima, ogniqualvolta la pressione nella stessa divenisse maggiore, o dalla parte A verso il fondo, o dalla parte C verso lo sbocco, l'acqua nel cannellino movendosi da GF, ed ascendendo dalla parte opposta lo avesse indicato. Fece altresì a diverse distanze dal fondo alcuni forellini da' quali quando venissero aperti potesse il fluido sfuggire. Il becco poi DE dell'Eolipìla era guernito di una chiavetta a tenuta del vapore, che apriva allorchè voleva lasciarlo uscire nell'aria esterna.

In quest'Eolipìla così apparecchiata riponeva un po' d'acqua, e con una lucerna mantenuta accesa collo spirito di vino applicatavi sotto faceva evaporarla a quella densità di vapore che credeva sufficiente per lo fine dell'esperienza. Indi apriva colla chiavetta, e nell'espulsione si sono veduti i seguenti fenomeni.

1.^{mo} L'acqua che era stagnante nella cavità GF del cannellino movendosi ascendeva dalla parte C verso lo sbocco.

2.^{do} Aperti alcuni di quei forellini nelle pareti dell'Eolipìla, si vedeva sortire il fluido con una velocità sempre maggiore, allungandosi di più il zampillo quanto più il forellino si scostava dalla bocca dell'Eolipìla.

3.^{zo} I zampilli di vapore che uscivano dai diversi forellini erano tutti inclinati verso l'orificio, e la loro inclinazione cresceva più gli erano vicini.

4.^{to} Accadde alcuna volta che venne spinta fuori una quantità d'acqua di quella nell'Eolipìla che rimaneva ancora da evaporare.

Ecco come tutti questi fenomeni sono spiegati dalla teorica da noi esposta, e pienamente la confermano.

Spiegazione del 1.^{mo} fenomeno.

Noi abbiamo dimostrato che la pressione cresce più si allontana dallo sbocco, e ai N.^{i} (16), (33) abbiamo assegnata la legge di questo accrescimento, dunque forz'è che la pressione del vapore anche nel cannellino di vetro ABC il quale forma un corpo solo coll'Eolipìla divenga maggiore più il luogo è vicino al fondo; la pressione quindi sull'acqua stagnante nel medesimo allorchè il fluido sorte sarà maggiore dalla parte G verso il fondo che dalla parte F verso lo sbocco, e la differenza di questa pressione è appunto quella che dà movimento all'acqua GF.

Spiegazione del 2.^{do} fenomeno.

Noi sappiamo dall'Idraulica che i fluidi zampillano dai piccioli fori fatti nelle pareti dei vasi per cagione della pressione che ivi soffrono, e che anzi dalla stessa velocità con cui escono si deduce la misura della pressione. Dunque nell'Eolipìla avendosi dimostrato che la pressione è maggiore verso il fondo, il fluido dovrà uscire con più velocità più i forellini sono vicini al fondo come fu esperimentato.

Spiegazione del 3.^{zo} fenomeno.

L'inclinazione de' zampilli è l'effetto della velocità composta che risulta da quella che ha il fluido nello scorrere dentro l'Eolipìla, e di quella colla quale escirebbe per la sola pressione; e quanto più grande è la velocità colla quale scorre nel vaso all'istante in cui zampilla, maggiore deve riuscire la convergenza. Noi abbiamo dimostrato che questa velocità è maggiore più il fluido è vicino ad uscire allorchè il vaso è cilindrico, e che anzi questa velocità è in ragione diretta della distanza dal fondo; è dunque evidente che in virtù di questo principio i zampilli devono riuscire più inclinati verso lo sbocco come mostrò l'esperienza.

Spiegazione del 4.^{to} fenomeno.

La causa poi per cui alcune volte fu lanciata fuori anche dall'acqua contenuta nell'Eolipìla parmi facile il riconoscerla nella diversità istessa della pressione che vi è da un luogo all'altro: poichè essendo maggiore la pressione del vapore verso il fondo, questa farà sì che l'acqua nell'Eolipìla perdendo la sua posizione orizzontale s'inalzi dalla parte dell'orificio, e quando questo innalzamento giunga a tanto da chiudere l'orificio, o sfogo al vapore, questo continuando a dilatarsi la slancerà fuori.

Non v'è dunque fenomeno che non riceva una semplice, e facile spiegazione dai principj esposti. Se tale è il pregio che devono avere le teoriche fisiche per meritarsi il nome di dimostrate verità, credo che anche a questa un tal nome possa convenire.

I Problemi che in questa Memoria ho risoluti suppongono che nel tempo nel quale esce il fluido non se ne produca del nuovo nel vaso, e tale appunto prossimamente è il caso dell'esperimento dell'Eolipìla a vapori. Volendo però valutare la pressione che il fluido elastico prodotto dall'accensione della polvere esercita sulle pareti dei razzi, conviene neccessariamente introdurre la circostanza della generazione nel vase di un nuovo fluido nel tempo istesso in cui esce, ed in tal caso si apre la strada ad una serie di Problemi consimili, i quali però una più grande difficoltà di quelli che ho esposti, presentano nell'integrazione di alcune equazioni. Le risoluzioni di questi Problemi le ho di già in gran parte condotte a buon termine, e spero che un qualche giorno mi verrà l'occasione di renderle publiche.

Memorie di Matematica · Soc. Ital. Tom. XVII. pag. 72.

Fig. I

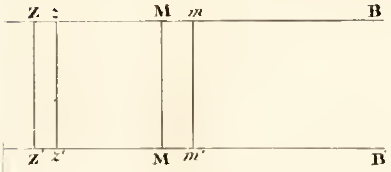
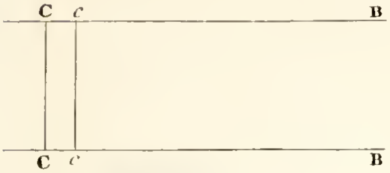

Z
z
M
m
B
Z'
z'
M
m'
B

Fig. II



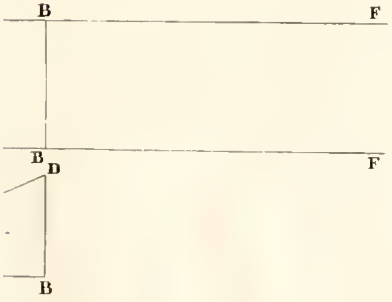


Fig. IV

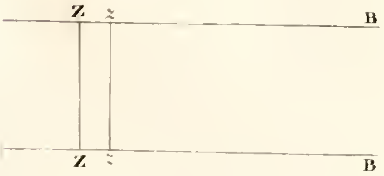


Fig. I

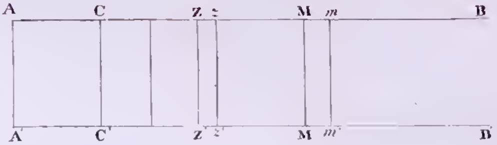
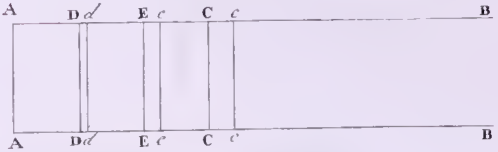

A
C
Z
z
M
m
B
A
C
Z
z
M
m
B

Fig. II


A
D
d
E
e
C
c
B
A
D
d
E
e
C
c
B

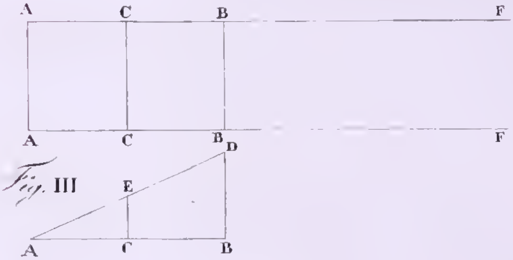

A
C
B
F
A
C
B
F
D
E
A
C
B

Fig. III

Fig. VI

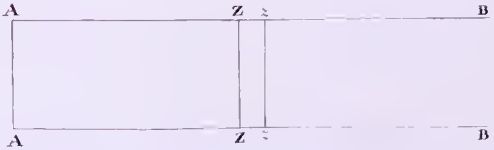


Fig. V

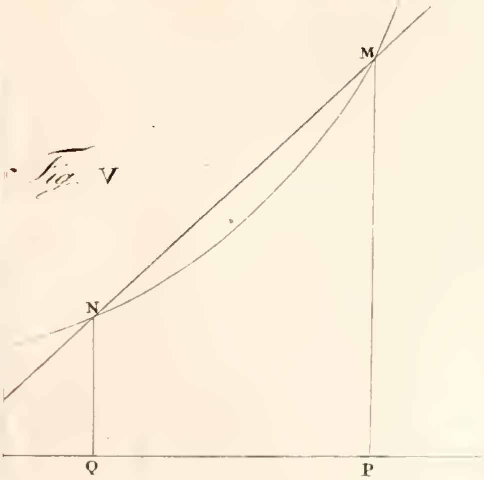


Fig. VI

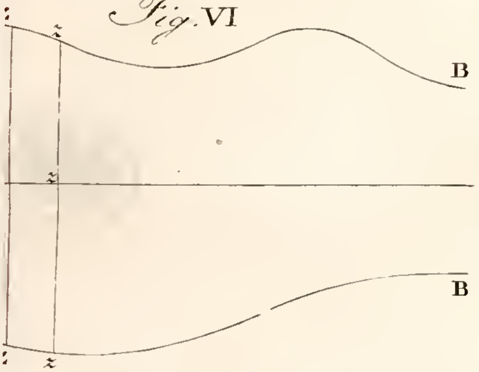
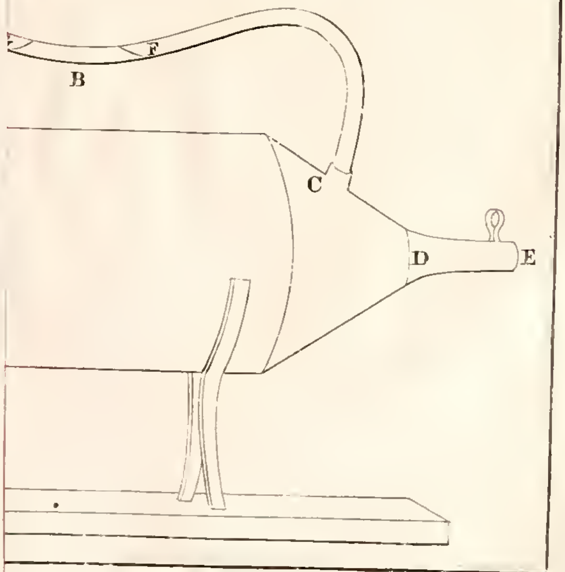


Fig. VII



Tav. II. Memorie di Matematica Soc. Ital. Tom. XVII pag. 72.

Fig. V

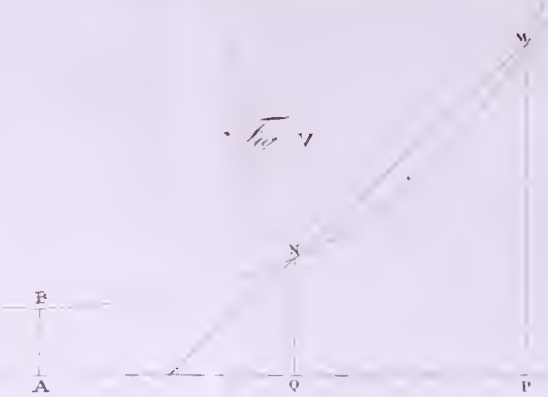


Fig. VI

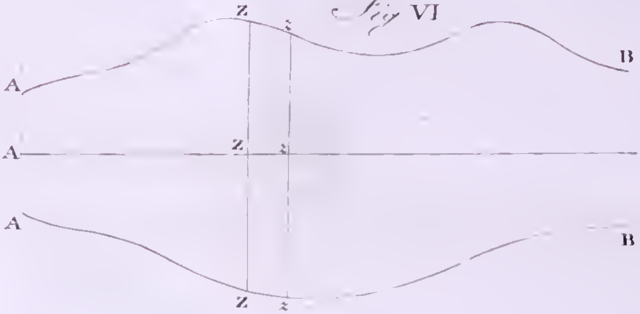
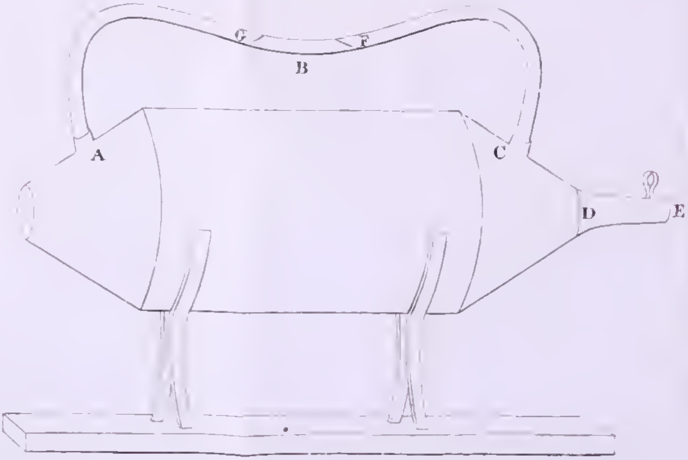

Z
z
A
B
A
Z
z
A
B
Z
z

Fig. VII



SULLE OSCILLAZIONI DI UN CORPO PENDENTE DA UN FILO ESTENDIBILE

MEMORIA

Del Signor Pietro Paoli.

Ricevuta li 5 *Agosto* 1814.

Nel Tomo XIV delle Memorie della Società Italiana delle Scienze ho trattato delle piccole oscillazioni di un corpo appeso ad un punto fisso per mezzo di un filo capace di distendersi e di scorciarsi. Ho supposto nel principio del moto il pendolo in quiete nella situazione verticale, dalla quale venga rimosso mediante un piccolo impulso. Il Sig. *Poisson* ha in seguito preso in esame il medesimo problema senza fare alcuna particolare ipotesi sulle condizioni iniziali del moto, e per mezzo d'ingegnosi artifizj di calcolo ne ha data una elegante risoluzione. Ma questa maggior generalità non rende la questione più difficile, e l'analisi adoprata nel caso più particolare da me contemplato serve egualmente senza bisogno di altre considerazioni allo scioglimento di tutti, come mi propongo adesso di dimostrare.

Ritenute le medesime denominazioni della citata Memoria il moto del centro di oscillazione del pendolo è determinato dalle seguenti equazioni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{g}{\varpi}u+(a-u)\frac{\partial \theta^2}{\partial t^2}-g(1-\cos.\theta)=0\;\ldots.(1)$$

$$(a-u)\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}-2\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial t}+g\,\mathrm{sen.}\theta=0\;\ldots\ldots..(2)$$

le quali conviene integrare per approssimazione nella ipotesi che θ, ϖ ed u siano quantità piccolissime.

Incominciamo dal trascurare nella seconda i termini di due dimensioni per rapporto a θ ed u, ed avremo

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\frac{g}{a}\theta=0$$

di cui l'integrale completo è

$$\theta=h\,\text{sen.}\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)$$

ove lascio le costanti h e k sotto una forma indeterminata, perchè all'origine del moto tanto θ che $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ possano avere qualunque valore; e solo osservo che h è una piccolissima quantità, perchè tale per ipotesi dev'esser θ.

Sostituendo il valore trovato di θ nella equazione (1), e conservando solamente i termini di due dimensioni per rapporto a θ ed u avremo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{g}{\omega}u-\frac{h^2 g}{2}\text{sen.}^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)+h^2 g\cos.^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)=0;$$

la quale posti in luogo di $\text{sen.}^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)$ e $\cos.^2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)$ i loro valori $\frac{1-\cos.2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)}{2}$, ed $\frac{1+\cos.2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)}{2}$ diventerà

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{g}{\omega}u+\frac{h^2 g}{4}\left[1+3\cos.2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)\right]=0.$$

L'integrale completo di questa equazione è

$$u=h'\,\text{sen.}\left(t\sqrt{\frac{g}{\omega}}+k'\right)-\frac{h^2\omega}{4}\left[1+\frac{3}{1-\frac{4\omega}{a}}\cos.2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)\right]$$

ove possiamo scrivere l'unità in luogo della frazione $\frac{1}{1-\frac{4\omega}{a}}$, perchè in questa approssimazione ci proponghiamo di trascurare i termini moltiplicati per ω^2. Sarà perciò

$$u=h'\,\text{sen.}\left(t\sqrt{\frac{g}{\omega}}+k'\right)-\frac{h^2\omega}{4}\left[1+3\cos.2\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}+k\right)\right].$$

Proseguendo l'approssimazione ripigliamo l'equazione (2) e trascurando i termini θ^5 e $\theta^3 u$ essa diventerà

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\frac{g}{a}\theta=\frac{g}{a}\cdot\frac{\theta^3}{6}-\frac{g}{a^2}u\theta+\frac{2}{a}\,\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t}=0$$

o sia facendo per più semplicità $t\sqrt{\frac{g}{a}}+k=t'$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t'^2}+\theta=\frac{\theta^3}{6}-\frac{u\theta}{a}+\frac{2}{a}\cdot\frac{\partial u}{\partial t'}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t'}=0.$$

Ponghiamo $\theta=h\,\text{sen.}\,t'+\theta'$, essendo θ' di un ordine più elevato di h, e mettendo nel secondo membro dell'equazione precedente in luogo di θ il suo valor prossimo $h\,\text{sen.}\,t'$, e riducendo i prodotti di seni e coseni in seni e coseni di archi multipli avremo

$$\frac{\partial^2\theta'}{\partial t'^2}+\theta'=\frac{h^3}{8}\left(1+\frac{11\omega}{a}\right)\text{sen.}\,t'-\frac{h^3}{24}\left(1-\frac{45\omega}{a}\right)\text{sen.}\,3t'$$
$$+\frac{hh'}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\cos.\left[t'\left(\sqrt{\frac{a}{\omega}}-1\right)+k'-k\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right]$$
$$+\frac{hh'}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}+\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\cos.\left[t'\left(\sqrt{\frac{a}{\omega}}+1\right)+k'-k\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right].$$

Se facciamo per più brevità

$$\frac{1}{16}\left(1+\frac{11\omega}{a}\right)=\text{A}$$
$$\frac{1}{192}\left(1-\frac{45\omega}{a}\right)=\text{B}$$

otterremo per mezzo della integrazione

$$\theta'=-\text{A}h^3t'\cos.\,t'+\text{B}h^3\,\text{sen.}\,3t'$$
$$-\frac{2hh'\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\cos.\,t'\cos.\left[\left(t'-k\right)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\right]$$

ove tralascio le costanti arbitrarie, perchè possono reputarsi comprese nelle indeterminate h e k. Sarà dunque

$$\theta=h\,\text{sen.}\,t'-\text{A}h^3t'\cos.\,t'+\text{B}h^3\,\text{sen.}\,3t'$$
$$-\frac{2hh'\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\cos.\,t'\cos.\left[\left(t'-k\right)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\right].$$

Per trovare le massime deviazioni del pendolo dalla verticale dobbiamo porre $0=\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial\theta}{\partial t'}\sqrt{\frac{g}{a}}$, cioè

$$0=h\cos.\,t'-\text{A}h^3\cos.\,t'+\text{A}h^3t'\,\text{sen.}\,t'+3\text{B}h^3\cos.\,3t'$$

$$+\frac{2hh'\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\,\text{sen.}\,t'\cos.\Big[\Big(t'-k\Big)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\Big]$$
$$+\frac{2hh'}{a}\cos.\,t'\,\text{sen.}\Big[\Big(t'-k\Big)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\Big].$$

per mezzo della qual equazione potremo esprimere t' in una serie ordinata per le potenze e per i prodotti di h^2 ed h'. Facciamo $t'=\text{M}+\text{N}h^2+\text{P}h'+\text{ec.}$, e sostituendo questo valore nella equazione precedente, e trascurando i termini h^5 ed h^3h' come sopra avremo

$$0=h\cos.\text{M}-h\,\text{sen.M}\,(\text{N}h^2+\text{P}h')-\text{A}h^3\cos.\text{M}+\text{A}h^3\text{M}\,\text{sen.M}$$
$$+\frac{2hh'\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\,\text{sen.M}\cos.\Big[\Big(\text{M}-k\Big)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\Big]$$
$$+\frac{2hh'}{a}\cos.\text{M}\,\text{sen.}\Big[\Big(\text{M}-k\Big)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\Big].$$

Il paragone dei termini simili ci darà $\cos.\text{M}=0$, cioè $\text{M}=\frac{2i+1}{2}\pi$, essendo i un numero intero qualunque, e 2π la circonferenza del cerchio che ha per raggio l'unità; $\pm\text{N}\mp\text{AM}=0$, $\pm\text{P}\mp\frac{2\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\cos.\Big[\Big(\text{M}-k\Big)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\Big]=0$, cioè $\text{N}=\text{A}\,\frac{2i+1}{2}\pi$, e $\text{P}=\frac{2\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\cos.\Big[\Big(\frac{2i+1}{2}\pi-k\Big)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\Big]$. Sarà pertanto

$$t'=t\sqrt{\frac{g}{a}}+k=\Big(1+\text{A}h^2\Big)\frac{2i+1}{2}\pi+\frac{2h'\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\cos.\Big[\Big(\frac{2i+1}{2}\pi-k\Big)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k$$

Relativamente a questi valori di t' troveremo dentro i limiti della nostra approssimazione

$$\pm\theta=h-\text{B}h^3$$

lo che ci avverte che le massime deviazioni del pendolo da una parte e dall'altra della verticale sono tutte eguali tra loro.

Chiamando $t^{(1)}$, $t^{(2)}$, $t^{(3)}$, ec. i tempi, che il pendolo impiega per giungere dall'origine del moto alla massima deviazione la prima volta, la seconda, la terza ec., avremo

$$t^{(1)}\sqrt{\frac{g}{a}}+k=\Big(1+\text{A}h^2\Big)\frac{\pi}{2}+\frac{2h'\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\cos.\Big[\Big(\frac{\pi}{2}-k\Big)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\Big]$$
$$t^{(2)}\sqrt{\frac{g}{a}}+k=\Big(1+\text{A}h^2\Big)\frac{3\pi}{2}+\frac{2h'\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\cos.\Big[\Big(\frac{3\pi}{2}-k\Big)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\Big]$$

e generalmente

$$t^{(i)}\sqrt{\frac{g}{a}}+k=\left(1+Ah^2\right)\frac{2i-1}{2}\pi+\frac{2h'\sqrt{\omega}}{a\sqrt{a}}\left[\left(\frac{2i-1}{2}\pi-k\right)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\right].$$

Pertanto la durata di una oscillazione qualunque sarà

$$t^{(i+1)}-t^{(i)}=(1+Ah^2)\pi\sqrt{\frac{a}{g}}-\frac{4h'\sqrt{\omega}}{a\sqrt{g}}\,\text{sen.}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{\omega}}\,.\,\text{sen.}\left[(i\pi-k)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\right].$$

Nel caso contemplato nella memoria citata h' è dell'ordine $h^2\omega$, e quindi $h'\sqrt{\omega}$ dell'ordine $h^2\omega\sqrt{\omega}$, cioè una quantità piccolissima quando il filo è pochissimo estendibile. Se in grazia della sua piccolezza ci permettiamo di trascurare il termine moltiplicato per $\frac{4h^2\omega\sqrt{\omega}}{a\sqrt{g}}$, le oscillazioni saranno isocrone, e chiamando T la durata di ciascuna di esse avremo

$$T=(1+Ah^2)\pi\sqrt{\frac{a}{g}}=\left[1+\frac{h^2}{16}\left(1+\frac{11\omega}{a}\right)\right]\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Facendo T = 1 ricaveremo da questa equazione la lunghezza a del pendolo, il quale compie le sue oscillazioni nell'unità di tempo, che sarà

$$a=\frac{g}{\pi^2}\left[1-\frac{h^2}{8}\left(1+\frac{11\omega\pi^2}{g}\right)\right].$$

Questi valori sono un poco diversi da quelli della predetta memoria per un piccolo sbaglio ivi occorso, che abbiamo adesso corretto.

Ma se per le condizioni del problema $\frac{4h'\sqrt{\omega}}{a\sqrt{g}}$ non sarà così piccola perchè possiamo trascurare il termine per essa moltiplicato, allora le oscillazioni non saranno isocrone a motivo della quantità sen. $\left[\left(i\pi-k\right)\sqrt{\frac{a}{\omega}}+k'\right]$ la quale varia da una oscillazione all'altra. Qualora però, come si pratica d'ordinario, cercheremo la durata media di una oscillazione deducendola dal tempo che il pendolo impiega nel fare un gran numero di vibrazioni, dopo che per la prima volta è giunto alla massima deviazione dalla verticale, essa si troverà eguale al valor precedente di T; e questa riflessione si deve al

Sig. *Poisson*. Infatti questa durata media è $= \frac{t^{(i+1)} - t^{(1)}}{i}$, o sia

$$(1 + Ah^2)\pi\sqrt{\frac{a}{g}} - \frac{4h'\sqrt{\omega}}{ia\sqrt{g}} \text{sen.} \frac{i}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{\omega}} . \text{sen.} \left[\left(\frac{i+1}{2}\pi - k\right)\sqrt{\frac{a}{\omega}} + k'\right]$$

ove quantunque il coefficiente $\frac{4h'\sqrt{\omega}}{a\sqrt{g}}$ non sia abbastanza piccolo per esser trascurato, lo diviene però quando è diviso pel numero considerabile i. È facile il vedere che otterremo il medesimo resultato, se invece d'incominciare l'osservazione dalla prima massima deviazione la incomincieremo da una qualunque delle seguenti.

SULL' URTO DEI FLUIDI

MEMORIA

Del Signor Vincenzo Brunacci.

Ricevuta li 19 *Agosto* 1814.

Il Sig. Cav. *Morosi* celebre inventore di macchine e congegni meccanici si avvisò di aumentare l'urto di una vena fluida su di una lastra, col circondare questa di un orlo, congetturando che nel trattenere che questo faceva l'acqua, la quale per ogni banda sfuggiva dopo avere urtato, dovea essa in questo contrasto comunicare un'altra spinta alla lastra medesima; egli poi ne inferiva di qui che utile doveva essere il contornare di un bordo le palette, o ali delle rote idrauliche, in quanto che la stessa corrente dell'acqua, le avrebbe mosse o più velocemente, o caricate di maggior peso. Gli sperimenti confermarono le di lui congetture, ed ei ne diè sommaria contezza al Reale Istituto Italiano, del quale fa parte.

Questa cosa la mi è paruta tanto importante, che io mi sono determinato ad assoggettarla ad esame, rintracciandone la ragione nelle stesse leggi del moto dei fluidi. La sola osservazione ed esperienza, può in certe favorevoli circostanze scoprire un fenomeno, e da questo si possono congetturare alcune forze naturali; ma la scoperta di tutti gli altri fenomeni, che hanno relazione con quello, la di loro valutazione, e la determinazione delle circostanze più favorevoli a produrli, non si possono ottenere che coll'ajuto delle geometrie; così la pensò il divino *Neutono*, quando scrisse *a phoenomenis motuum investigemus vires naturae, et ab hisdem viribus phoenomena reliqua*.

§. 1. Per riuscire in quest'indagine io farò uso della dottrina che sull'urto dei fluidi ci dette l'immortale *La-Grange negli atti dell'Accademia di Turino del* 1784; non che questa dottrina non sia soggetta ad alcune difficoltà, come lo sono, e lo saranno sempre tutte quelle, le quali i Geometri hanno date su qualunque argomento, che al moversi dei fluidi si riferisca, ma la mi è sembrata la più sicura e la più conforme pel computo dell'effetto preso di mira.

Una colonna di fluido EF *fig.* 1, la quale per un momento fingiamo solo dotata di due dimensioni, cioè, della lunghezza EF, e della larghezza AE, si muova lungo la linea AB; a questa linea AB con un angolo qualunque ne sia unita un'altra BC, la quale obblighi la colonna EF a piegare e cangiare direzione. Nella piegatura questa colonna fluida descriverà un arco MN, e nel triangolo mistilineo MBN, il fluido resterà come stagnante; la qual cosa non è, per vero dire, che un'ipotesi, ma il mentovato Geometra pensa, che essa sia molto vicina alla verità, e per tale possa prendersi nell'attuale ricerca; ecco dunque che il fluido si muoverà entro un canale AMNC, la di cui porzione MN sarà curvilinea, e dalla forza centrifuga del fluido nel correre entro questa curva, ne verrà una pressione o spinta sul fondo del canale medesimo.

§. 2. Siccome nulla accelera o ritarda la velocità dell'acqua nel canale, ne segue che la sua larghezza sarà per tutto costante. Sia dunque b questa larghezza; sia a l'altezza dovuta alla velocità dell'acqua in una qualunque sezione pq; sia r il raggio di curvatura di qualunque punto p della curva MN; sia pq una linea fluida perpendicolare nel punto p all'arco MN: ora questa linea di fluido in virtù della sua forza centrifuga, eserciterà contro la curva MN, e precisamente nel punto p, una pressione eguale a $\frac{2a}{r}\,b$, essendo questo $\frac{2a}{r}$ l'espressione della forza centrifuga di una molecola qualunque. Risguardandosi poi il fluido MBN come stagnante, bisognerà che

che la pressione su tutti i punti della superficie sua MN sia la stessa, e che perciò $\frac{2a}{r}b$ sia una quantità costante; sarà dunque anco costante il valore di r, e quindi MN sarà un arco di cerchio.

§. 3. La pressione fatta su ciascun punto p della superficie MN del fluido stagnante MBN si comunica a ciascun punto delle linee MB, BN, e giusta i principj dell'Idrostatica, ciascun punto di queste è premuto perpendicolarmente da una forza eguale a $\frac{2a}{r}b$; dunque tutta la forza perpendicolare ad MB, da cui è premuta la linea stessa sarà $\frac{2a}{r}b\,.\mathrm{MB}$; e quella perpendicolare a BN, e da cui la stessa BN è premuta, sarà $\frac{2a}{r}b\,.\mathrm{BN}$.

Ora prolungato il lato CB (*Fig.* 2) in H sia l'angolo $\mathrm{ABH}=\omega$: rappresentiamo con LF perpendicolare a BN la forza $\frac{2a}{r}b\times\mathrm{BN}$, e condotta FG parallela, ed LG perpendicolare ad AB, onde si abbia il triangolo rettangolo LFG, si avrà

$$\mathrm{LF}=\frac{2a}{r}b\,.\,\mathrm{BN};$$

$$\mathrm{LG}=\frac{2a}{r}b\,.\,\mathrm{BN}\,.\,\cos.\,\omega;$$

$$\mathrm{FG}=\frac{2a}{r}b\,.\,\mathrm{BN}\,.\,\mathrm{sen}.\,\omega;$$

§. 4. Supponendo che la linea BC sia tanto lunga, che il fluido allorchè l'abbandona, corra con direzione a lei parallela, l'arco di cerchio MN sarà toccato allora nei punti M, N dalle due rette AB, BC unite in B; e sarà $\mathrm{BN}=\mathrm{BM}$; di più conducendo nei punti M, N due perpendicolari alle rette AB, BC, il loro punto Q d'incontro sarà il centro dell'arco MN, e sarà MQ il raggio di curvatura, che rappresentato abbiamo con r; l'angolo poi MQN sarà eguale ad MBH; cioè, ad ω; avremo pertanto $\frac{\mathrm{MB}}{r}=\frac{\mathrm{NB}}{r}=\mathrm{tang}.\,\frac{\omega}{2}$.

La forza adunque che spingerà la linea AB in una direzione ad essa normale sarà $2ab \,.\, \text{tang.}\frac{\omega}{2}$;

La forza che spingerà la linea BC in una direzione parimente ad essa perpendicolare sarà ancor essa $2ab \,.\, \text{tang.}\frac{\omega}{2}$;

La forza che premerà questa stessa linea BC in una direzione perpendicolare ad AB, sarà $2ab \,.\, \cos.\,\omega \,.\, \text{tang.}\frac{\omega}{2}$;

La forza infine che premerà questa medesima linea in una direzione parallela ad AB, sarà

$$2ab \,.\, \text{sen.}\,\omega \,.\, \text{tang.}\frac{\omega}{2}\,.$$

§. 5. Chiamando ψ la somma delle forze le quali spingono le due linee AB, BC unite insieme, nella direzione perpendicolare ad AB, sarà $\psi = 2ab \,.\, \text{tang.}\frac{\omega}{2} + 2ab \,.\, \cos.\,\omega\, \text{tang.}\frac{\omega}{2}$, che ridotta diviene

$$\psi = 2ab(\,1 + \cos.\,\omega)\, \text{tang.}\frac{\omega}{2}\,;$$

$$\psi = 2ab\left\{\overline{\cos.\frac{\omega}{2}}^{2} + \overline{\text{sen.}\frac{\omega}{2}}^{2} + \overline{\cos.\frac{\omega}{2}}^{2} - \overline{\text{sen.}\frac{\omega}{2}}^{2}\right\}\frac{\text{sen.}\frac{\omega}{2}}{\cos.\frac{\omega}{2}}\,;$$

$$\psi = 2ab \,.\, 2\cos.\frac{\omega}{2} \,.\, \text{sen.}\frac{\omega}{2}\,;$$

$$\psi = 2ab \,.\, \text{sen.}\,\omega\,.$$

Il valore poi di ω, il quale rende la quantità ψ massima sarà $\omega = 90°$, e si avrà allora $\psi = 2ab$; dovrà dunque BN esser perpendicolare ad MB affinchè la somma ψ di quei sforzi sia massima; conseguenza rimarcabile in quanto che allora è nulla quella forza, la quale si esercita sopra BN in direzione normale a BM.

§. 6. Supponiamo ora che la vena fluida dopo essersi ripiegata in MN *fig.* 3, abbandoni la linea BN facendo con essa prolungata in L un angolo LNF: anco in questa supposizione troviamo la spinta che le due linee AB, BN sopportano in direzione perpendicolare ad MB.

Prolungata BN in H, ed NF in D sia $DBH = \omega$, $DBN = 180^\circ - \omega$; $LNF = \phi$; $BDN = \omega - \phi$; e sarà

$$BD = DN \,.\, \frac{\text{sen.}\,\phi}{\text{sen.}\,(180^\circ - \omega)};$$

$$BN = DN \,.\, \frac{\text{sen.}\,(\omega - \phi)}{\text{sen.}\,(180^\circ - \omega)};$$

nei punti M, N condotti i raggi MQ, NQ dell'arco MN, ed unito il punto D col centro Q sarà $DQM = \frac{\omega - \phi}{2}$; dunque

$DN = r\,.\,\text{tang.}\,\frac{\omega - \phi}{2} = DM$; e quindi $DB = r\,\frac{\text{sen.}\,\phi\ \text{tang.}\,\frac{\omega-\phi}{2}}{\text{sen.}\,(180^\circ - \omega)}$;

$$BN = r\,\frac{\text{sen.}\,(\omega - \phi)}{\text{sen.}\,(180^\circ - \omega)}\,.\,\text{tang.}\,\frac{\omega - \phi}{2};$$

È poi BN premuto perpendicolarmente da una forza eguale a $BN\,.\,\frac{2a}{r}\,b$; e questa decomposta in due, che una normale, l'altra a DB parallela, si avrà $\frac{2a}{r}\,b\,.\,BN\,.\,\cos.\,\omega$ per la forza normale alla DB; e postovi il valore di BN, sarà una tale forza

$$\frac{2a}{r}\,br\,.\,\frac{\text{sen.}\,(\omega - \phi)}{\text{sen.}\,(180^\circ - \omega)}\,.\,\text{tang.}\,\frac{\omega - \phi}{2}\,.\,\cos.\,\omega;$$

tutto lo sforzo adunque che fa la vena fluida EF per spingere le due linee AB, BN in una direzione ad AB normale, sarà

$$\frac{2a}{r}\,b\,.\,MD + \frac{2a}{r}\,b\,.\,DB + \frac{2a}{r}\,b\,.\,BN\,.\,\cos.\,\omega;$$

e fatte le opportune sostituzioni, e riduzioni, sarà questa forza, la quale indicheremo per ψ,

$$\psi = 2ab\left\{1 + \frac{\text{sen.}\,\phi}{\text{sen.}\,\omega} + \frac{\text{sen.}\,(\omega - \phi)}{\text{sen.}\,\omega}\cos.\,\omega\right\}\text{tang.}\,\frac{\omega - \phi}{2};$$

$$\psi = 2ab\left\{1 + \frac{\text{sen.}\,\phi}{\text{sen.}\,\omega} + \frac{\text{sen.}\,\omega\,.\,\cos.\,\phi - \text{sen.}\,\phi\,\cos.\,\omega}{\text{sen.}\,\omega}\cos.\,\omega\right\}\text{tang.}\,\frac{\omega - \phi}{2};$$

$$\psi = 2ab\left\{1 + \frac{\text{sen.}\,\phi}{\text{sen.}\,\omega} + \cos.\,\phi\,\cos.\,\omega - \frac{\text{sen.}\,\phi}{\text{sen.}\,\omega}\,.\,\cos.\,\omega^2\right\}\text{tang.}\,\frac{\omega - \phi}{2};$$

$$\psi = 2ab\left\{1 + \text{sen.}\,\phi\,.\,\text{sen.}\,\omega + \cos.\,\omega\,.\,\cos.\,\phi\right\}\text{tang.}\,\frac{\omega - \phi}{2};$$

$\psi = 2ab \left\{ 1 + \cos.(\omega - \varphi) \right\} \text{tang.} \frac{\omega - \varphi}{2}$;
$\psi = 2ab \text{ sen.} (\omega - \varphi)$;
onde poi questa forza ψ sia massima, dovrà essere $\omega - \varphi = 90^\circ$, e sarà allora $\psi = 2ab$.

§. 7. Una colonna fluida EO *fig.* 4, come quella immaginata al §. 1 vada a battere sulla linea CC', alle cui estremità siano le linee C'D', CD unite ad essa con qualunque angolo. Cerchiamo lo sforzo che fa l'acqua su questo sistema di linee in una direzione perpendicolare a CC', supponendo che l'urto si faccia in una tal direzione, cioè che EO sia normale a CC'.

La colonna EO all'avvicinarsi alla linea su di cui ha da urtare, si dividerà in due rami OF, OF' e ciascuno di questi rami, dopo essersi ripiegato, anderà scorrendo l'uno da una banda, l'altro dalla opposta, lungo il piano CC'. Verso il punto B centro dell'urto, cui corrisponde l'asse della colonna urtante, si formerà un ridosso triangolare NON' di fluido, il quale si potrà sensibilmente considerare stagnante. I due rami poi della colonna fluida OFH, OF'H' incontrando le linee CD, C'D' da esse saranno obbligati a ripiegarsi per potere scappar via, lasciando negli angoli C, C' due masse di fluido stagnanti come nel caso del §. 2. Non faccio una descrizione più minuta delle circostanze fisiche dell'urto, perchè è facile ad immaginarsele.

Ora indicando con $2b$ la larghezza della colonna fluida urtante, ognuno dei due rami in cui si divide avrà per larghezza b, ed a tenore di ciò che si è dimostrato al §. 4, lo sforzo o pressione sopra NB nella direzione a lei normale sarà

$$2ab \text{ sen. } 90^\circ \text{ tang. } \frac{90^\circ}{2} = 2ab;$$

egualmente la spinta, o la pressione sopra BN' sarà $2ab$; onde se non ci fossero le due linee CD, C'D' l'impulsione sopra il piano CC' sarebbe $2a \,.\, 2b$; cioè eguale al peso di una colonna di fluido avente per base l'area $2b$ della sezione della vena urtante, e per altezza il doppio di quella dovuta alla velocità dell'acqua urtante.

§. 8. Per ciò che spetta all'impulsione del fluido sulle linee componenti gli angoli C, C'. Se questi angoli sono tra loro eguali ed eguali ciascuno a $180 - \omega$, e se di più si suppone che le linee CD, C'D' siano di tale lunghezza che il fluido nell'abbandonarli corra con direzioni loro parallele, sarà $2 \cdot 2ab \,\text{sen.}\, \omega$ la somma delle impulsioni del fluido fatte sulle linee D'C', C'N', DC, CN in una direzione parallela ad OB; e questa quantità esprimerà l'aumento dell'urto, che si è ottenuto aggiungendo alla linea CC' le due linee CD, C'D', sulle quali, il fluido che scappava dopo avere urtato la semplice linea CC', è obbligato a battere. Questo aumento poi dell'urto sarà massimo, quando $\omega = 90^\circ$, ed allora avrà per misura $2a \cdot 2b$, cioè la stessa misura che ha l'urto sopra CC'. Dunque coll'aggiunta delle due linee CD, C'D' poste ad angolo retto nei punti C, C' abbiamo potuto rendere doppio l'effetto dell'urto della nostra vena fluida.

§. 9. Se le due linee aggiunte CD, C'D' non avessero tale estensione che il fluido, dopo averle abbandonate, potesse correre con direzioni parallele alle medesime, ma corresse con tali direzioni, che facessero con quelle linee un angolo ϕ, allora da ciò che si è dimostrato al §. 6 si ricava che l'aumento dell'urto originato da queste linee CD, C'D', sarebbe $2 \cdot 2ab \cdot \text{sen.}(\omega - \phi)$, e questo sarebbe massimo quando $\omega - \phi = 90^\circ$, e diverrebbe, come al §. ant., $2a \cdot 2b$; così se le linee CD, C'D' fossero mobili attorno degli angoli C, C', per avere il massimo aumento d'impulsione converrebbe portarle ad angolo retto colla retta CC', quando in questa situazione il fluido dopo averle abbandonate, tornasse indietro con direzione parallela ad OB; e ciò non succedendo converrebbe rendere gli angoli in C, C' acuti, cioè ω ottuso, ed in modo che diminuito di ϕ, vale a dire, dell'angolo che fa il fluido con queste rette, si abbia $\omega - \phi = 90^\circ$; la quale cosa in ambidue i casi si riduce a fare in guisa, che *i due rami* *della vena fluida si ripieghino indietro con direzioni normali a* CC'.

§. 10. Il caso contemplato di una vena fluida piana, la quale, cioè, non abbia altro che due dimensioni (§. 1), è puramente immaginario; ma supponiamo che la colonna fluida abbia la figura di un parallelepipedo rettangolo, e che scorrendo essa tra due piani, di cui fan parte le facce opposte del parallelepipedo, sia obbligata a conservare sempre la stessa grossezza, che è la distanza di quei due piani; allora se questi fanno angolo retto con i due piani AB, BC *fig.* 1, formanti il fondo del canale, o con i tre piani CC', CD, C'D' *fig.* 4, allora dico, tutto ciò che abbiamo detto nei §§. precedenti, è egualmente vero per questo caso concreto, e legittime sono le tirate conseguenze, purchè alle parole *linee* CD, C'D', CC' si sostituiscano le parole *piani* CD, C'D', CC'; dunque l'effetto di una cotal vena urtante ad angolo retto sur un piano tanto esteso, che essa dopo l'urto scappi con direzioni parallele al piano stesso, si può accrescere fino a rendere doppio, coll'alzare alle estremità del piano urtato un orlo, il quale obblighi il fluido a ripiegarsi indietro con direzioni normali al medesimo piano urtato.

§. 11. Veniamo a parlare dell'urto di una vena cilindrica, la quale batta un piano CC' con direzione ad esso normale. Il fenomeno seguirà come ci mostra la figura 5. La colonna EO nell'avvicinarsi al piano anderà allargandosi da ogni banda, ed essendo da ogni banda eguali le circostanze, essa formerà un solido di rivoluzione ACC'D, il cui asse BO sarà lo stesso asse EO della colonna fluida cilindrica. L'acqua poi che forma la superficie della conoide, all'incontro del piano anderà ripiegandosi, e se il piano è abbastanza esteso, correrà su di esso con direzioni a lui parallele, se no lo abbandonerà partendo con direzioni ad esso inclinate. Nell'interno del solido di rivoluzione acqueo, vi si troverà un imbuto conoideo NON', e l'acqua che lo compone giusta l'ipotesi assunta (§. 1) si potrà risguardare come stagnante.

Se per l'asse EOB si conduce un piano, la sezione di questo con la vena fluida, porrà sotto gli occhi la figura piana, dalla rivoluzione della quale nascerà quel solido di rivoluzione del quale si parla; così il triangolo mistilineo OBN produrrà l'imbuto conoideo; la figura AOC produrrà il canale conoideo nel quale corre il fluido; la linea CB il piano circolare su cui si fa l'urto, ec.

Ora preso un punto qualunque G nell'asse OB si conduca MM′ parallela a CC′, e che incontri le curve ON, ON′ in M, M′. Nei medesimi punti si conducano le rette MP, M′P′, le quali siano perpendicolari alle curve OMN, OM′N′ ed incontrino in P, P′ le curve esterne APS, DP′S′. Nella rotazione attorno dell'asse OB, queste descriveranno un tronco di cono, la cui superficie sarà la sezione del canale conoideo pel quale scorre il fluido.

§. 12. Queste cose premesse facciamo BG $= x$, GM $= y$; π la semicirconferenza di un cerchio che ha per raggio l'unità; sarà allora $2\pi y$ la circonferenza del cerchio descritta col raggio MG. Ora indichiamo per z quella funzione dell'y per la quale moltiplicando $2\pi y$, si ha la superficie del tronco di cono descritto da PM. Il valore della z è facile a trovarsi, ma non ci fa di bisogno: sarà dunque $2\pi yz$ l'area della sezione del canale conoideo per cui corre l'acqua.

Questo $2\pi yz$ esprimerà anco il velo fluido che passa per la sezione del canale conoideo. Non gli considero alcuna grossezza, perchè questa dimensione sparirebbe dal computo. Rappresentando poi con r il raggio di curvatura della curva OMN corrispondente al punto M, e con a l'altezza dovuta alla velocità dell'acqua scorrente nel canal conoideo, sarà $\frac{2a}{r} \cdot \frac{2\pi yz}{2\pi y} = \frac{2a}{r} z$ l'espressione della forza centrifuga su ciascun punto M della circonferenza del cerchio da MG descritto; ma la celerità del fluido dovendo essere la stessa in qualunque luogo del canale, ed in qualunque sezione, giacchè non vi è alcuna causa, la quale inclini a far crescere o scemare questa velocità, sarà dunque l'area $2\pi yz$ una quantità costante qualunque sia y, ed eguale alla sezione della vena cilindrica. Sia dunque B l'area di questa sezione, e sarà $2\pi yz = B$, e quindi $z = \frac{B}{2\pi y}$.

L'espressione allora della forza centrifuga su ciascun punto M della superficie dell'imbuto conoideo sarà $\frac{2aB}{2\pi} \cdot \frac{1}{yr}$, essendo r, come si è detto, il raggio osculatore corrispondente all'ordinata y.

§. 13. Siccome l'acqua la quale forma l'imbuto conoideo NON' si suppone stagnante, perciò la pressione qui sopra determinata dovrà essere dappertutto la stessa. Rappresentiamo ora per p questa pressione costante, ed in ciascun punto della superficie dell'imbuto conoideo, dovrà essere $\frac{2aB}{2\pi} \cdot \frac{1}{ry} = p$. Questa equazione ci dichiara che la curva OMN debbe avere in qualunque punto M il raggio osculatore in ragione inversa dell'ordinata MG; ed ecco in questa guisa ridotta l'indagine alla soluzione di un problema Geometrico.

§. 14. Essendo $r = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)}$ cercasi la curva che avrà per equazione

$$(1) \ldots \quad \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)}{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} = my \text{ essendo } m \text{ una costante data.}$$

Moltiplicata l'equazione (1) per $\left(\frac{dy}{dx} \right) dx$, ovvero per dy, ed integrata si ha

$$(2) \ldots \quad \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]}} = C - m \frac{y^2}{2},$$

essendo C la costante arbitraria aggiunta integrando.

Per determinare questa costante, osservo che quando $y = 0$, cioè quando il punto considerato è in O, la curva tocca l'asse OB, ed allora $\left(\frac{dy}{dx} \right) = 0$; con questa condizione

trovo

trovo $C = 1$. Si avrà dunque

$$(3) \ldots\ldots \frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}} = 1 - \frac{m}{2} y^2 .$$

§. 15. Da questa equazione (3) si può intanto trovare il valore dell'impulsione della vena sul piano CC'. Infatti, posto che il piano circolare su cui si fa l'urto, sia così esteso che l'acqua lo abbandoni, dopo avere urtato, con direzioni parallele ad esso, se facciamo $BN = y$, si ha allora nel punto N

$$\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}} = 0, \text{ e perciò } 1 - \frac{m}{2} y^2 = 0;$$

e di qui si ricava, facendo $m = \frac{2\pi p}{2a\mathrm{B}}$, $\frac{2\pi y^2}{2} p = 2a\mathrm{B}$; ma $\frac{2\pi y^2}{2}$ esprime l'area del cerchio che ha per raggio BN, e p esprime la pressione che soffre ciascun dei suoi punti, dunque $\frac{2\pi y^2}{2} p$ esprimerà la pressione totale, che sopporta il piano CC' per causa dell'urto della colonna fluida; dunque questa pressione o quest'urto sarà eguale *al peso di un cilindro fluido, il quale abbia per base la base* B *della colonna urtante, e per altezza il doppio di quella dovuta alla velocità dell'acqua, colla quale si fa l'urto* (a).

§. 16. Se il piano circolare su del quale si fa l'urto non è tanto esteso, che il fluido possa scappare con direzioni ad esso parallele, allora chiamando ϕ l'angolo che fanno queste direzioni col piano urtato, sarà BN l'ordinata della curva OMN a quel punto N, ove la tangente fa con l'asse un angolo $= 90° - \phi$; avremo dunque

$$\frac{1}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}} = \cos.(90° - \phi) = \mathrm{sen}.\phi, \text{ e di qui}$$

(a) Nel Tomo VIII dei Commentari dell'Accademia di Pietroburgo dell'anno 1736, il celebre *Daniele Bernulli* aveva per questo caso trovato la stessa misura dell'urto, deducendola però da una dottrina differente da quella del Signor *La-Grange*.

$$\text{sen.}\,\phi = 1 - \frac{m}{2} y^2,$$

$$\frac{2\pi y^2}{2} p = 2aB(1 - \text{sen.}\,\phi);$$

allora, cioè, la misura dell'urto sarà *il peso di quel doppio cilindro,* come alla fine del §. precedente, *moltiplicato però per la differenza tra il seno tutto, ed il seno dell'angolo che le direzioni del fluido fanno nello scappare col piano urtato.*

§. 17. Col ritrovamento della formola qui sopra riferita, il Sig. *La-Grange* messe in qualche modo d'accordo le sperienze dei fisici sull'urto di una vena fluida; alcuni, in fatti, come il *Mariotte*, il *Gravesand,* l'*Eulero,* ec. aveano stabilito colla teorica, e confermato coll'esperienze, che una tale impulsione aver dovea per misura il peso di una colonna di fluido, che avesse per base l'area della sezione della vena fluida urtante, e per altezza quella dovuta alla velocità, con cui il fluido fa l'urto; altri come il *Bernulli Daniele,* il *Krafft,* il *Michelotti,* il *Bossut,* ec. volevano una misura doppia di questa; il *D' Alambert* infine ne voleva una poco minore di quest'ultima. Il Sig. *Zuliani nella prima parte del Tomo III degli atti dell' Accademia di Padova del* 1794, dà contezza di tutto ciò che a questo proposito, per ciò che spetta alle sperienze, si era ritrovato, onde io a quella memoria rimando i miei lettori. Qui soltanto mi basta di osservare che nella formola del Sig. *La-Grange* sono comprese tutte quelle misure date per l'impulsione di una vena fluida. La circostanza che questo Geometra ha messo in computo, è la direzione colla quale i filetti fluidi abbandonano il piano dopo d'averlo urtato; e siccome questa circostanza nasce dall'altra dell'estensione del piano su del quale si fa l'urto, perciò possiamo dire che nella formola Grangiana è in certo modo contenuto l'elemento dell'estensione del piano; dico in certo modo, perchè sebbene s'intenda come dalla estensione del piano su cui si fa l'urto, dipenda la direzione colla quale i filetti fluidi abbandonano il piano, pure ci è ignota la legge di questa dipendenza , e non si saprebbe fare uso della formola di *La-Grange*, se invece di esser data quella direzione, data fosse la grandezza del piano mentovato (*a*).

Questo sullodato Sig. *Zuliani* riferisce nella memoria sopracitata una serie di sperienze, da lui fatte colla mira di stabilire, quanto ha che fare l'estensione del piano urtato nella misura dell'urto, e così esse e la formola del Sig. *La-Grange* vengono a confermarsi reciprocamente. Perspicacia nell'instituire l'esperienze, diligenza nell'eseguirle, tutto si trova in queste, ma si resta col desiderio di vederle ripetute più in grande, onde poterne ricavare più sicure conseguenze; non ostante finchè non se ne abbiano delle migliori, giova valersi di quelle.

§. 18. Nella terza parte adunque della qui riferita memoria sono registrate queste sperienze.

Conservata l'acqua in un vaso ad una altezza maggiore di due piedi, in un adattato pertugio circolare il cui centro era per l'appunto due piedi sotto la superficie dell'acqua, furono posti successivamente l'uno dopo dell'altro tre cannelli orizzontali, i quali tutti dotati dello stesso diametro di mezzo pollice, aveano però lunghezze diverse, uno essendo di due, uno di quattro, uno di dodici pollici. L'acqua sgorgando per questi a piena gola andava ad urtare un piano circolare di metallo dello stesso diametro di mezzo pollice, e collocato ad un pollice di distanza dalla bocca dei cannelli. Con adattato ordigno il Sig. *Zuliani* misurò le forze di questi urti, e nel tempo stesso fece in ciascuna sperienza il calcolo del peso di un cilindro di acqua avente per base l'area della sezione della vena urtante e per altezza quella dovuta alla velocità con cui si faceva l'urto. Di qui si può ricavare a qual porzione di questo cilindro equivaleva la misura dell'urto.

(*a*) *Alberto Eulero* figlio del gran *Leonardo*, in una dissertazione sul modo d'applicar l'acqua a muovere col massimo vantaggio gli edifizi, premiata nel 1754 dalla Reale Società di Gottinga, fe un cenno dell'aumento dell'impeto di una vena fluida coll'aumentare il piano su del quale va a battere.

Collo stesso vaso, ed alla stessa profondità adattando in un pertugio che aveva per diametro un pollice, altri tre tubi di quel diametro, e di lunghezza di 4, 8, 12 pollici, ricevè l'urto della vena fluida, che sboccava a piena gola da essi, su di un piano circolare metallico di un pollice, e ne assegnò le misure come nell'altro caso.

Ecco la Tabella di questi sperimenti.

Le dimensioni sono in pollici del piede di Parigi; i pesi sono in once di Padova, di cui dodici fanno una libbra piccola, ed un'oncia è grani 546.

	1.° 2.° 3.° Cannelli del diametro di mezzo pollice 4.° 5.° 6.° detti del diametro di un pollice.			
	Lunghezza in pollici	Misure dell' urto in grani	Peso del cilindro d' acqua	Misura dell' urto in parti del cilindro
1.°	2	810	1043	0, 776
2.°	4	770	990	0, 777
3.°	12	702	909	0, 772
4.°	4	3316	4119	0, 805
5.°	8	3015	4016	0, 750
6.°	12	2782	3652	0, 762

E prendendo un medio tra questi sei sperimenti, stabiliremo che quando il piano circolare su di cui si fa l'urto ha per area quella della sezione della vena cilindrica urtante, l'urto è eguale al peso di $\frac{773}{1000}$ del cilindro che ha per base l'area della detta sezione, e per altezza quella dovuta alla celerità dell'acqua. Anco le altre sperienze riportate dal Sig. *Zuliani* nella seconda parte della mentovata memoria, nelle quali l'altezza dell'acqua nel vaso al di sopra dei cannelli è talvolta sei piedi, conducono prossimamente alla stessa conseguenza.

Avremo adunque $2(1 - \text{sen.}\,\varphi) = 0,773$, dalla quale equazione ricaveremo il valore di φ, cioè dell'angolo, che fanno i filetti fluidi col piano urtato nell'abbandonarlo, quando questo piano è della stessa grandezza della sezione della vena fluida. Sarà pertanto $\text{sen.}\,\varphi = 1 - 0,386 = 0,614$, e quindi $\varphi = 37^\circ . 53'$.

Al §. 16 abbiamo trovato $\frac{2\pi y^2}{2} p = 2aB(1 - \text{sen.}\,\varphi)$; ora posto b il raggio della vena cilindrica abbiamo

$$\frac{2\pi b^2}{2} p = 2aB(1 - \text{sen.}\,\varphi) = aB . 0,773;$$

ma $B = \frac{2\pi}{2} b^2$, dunque $p = 0,773 . a$. Ottenuto il valore del p, si potrà trovare il valore del raggio del piano circolare, che dà la massima misura dell'urto, cioè, di quel piano, che dall'acqua dopo l'urto è abbandonato con direzioni ad esso parallele; infatti dal §. 15 si avrà

$$\frac{2\pi y^2}{2} = \frac{2aB}{p}; \text{ e quindi } y^2 = b^2 . \frac{2a}{0,773 . a};$$

$$y = b\sqrt{\frac{2}{0,773}} = 1,6 . b;$$

dunque il raggio di siffatto piano circolare sarebbe eguale al raggio della vena cilindrica più $\frac{6}{10}$ di questo raggio, e l'area sarebbe due volte e mezzo circa l'area della vena cilindrica; ma questo non corrisponde bene alle sperienze del Sig. *Zuliani*, le quali danno per questo piano un raggio assai maggiore.

Il valore del p trovato nel supposto che il piano urtato sia eguale alla sezione della vena, l'ho ritenuto lo stesso per un piano anco di maggiore estensione. Ciò nasce dalla supposizione da noi fatta, che il fluido contenuto nello spazio NON' si ha da risguardare come stagnante, pel che le curve MO, M'O, pelle quali si è trovato il valore di p, non cangiano, se l'urto invece di farsi sopra MM' si farà sul piano NN'.

§. 19. Nelle sperienze del Sig. *Zuliani* si trova che fatto il piano circolare su cui caderà la vena fluida quattro ed anco sei volte più grande in diametro del diametro della vena medesima, non arrivava mai l' urto a contrabbilanciare il peso di un cilindro d'acqua d'altezza doppia di quella dovuta alla velocità dell'acqua, per quanto poco se ne allontanasse; anzi vi si accostava a segno di non differire che di un settimo circa del detto peso, quando il piano aveva un diametro semplicemente doppio di quello della vena.

Ciò al parer mio nasce da questo che lo spandimento dell'acqua in giro, obbligando il suolo di acqua, che scorre sul piano ad assottigliarsi continuamente, è necessario onde avvenga questo assottigliamento (il quale continua anco dopo che l'acqua ha abbandonato il piano), che le particelle acquee, le quali non radono il piano immediatamente, abbiano direzioni tendenti ad avvicinarle al piano stesso, siano, cioè, a questo piano inclinate, e quindi non avviene mai che tutte abbandonino il piano con direzioni ad esso parallele. Il sullodato Fisico dichiara nel §. 43 della detta Memoria, d'avere osservato appunto questo accidente. Ora di una tale circostanza non avendone tenuto conto nella Teorica, la formola non risponde bene alle sperienze; così la formola dichiara che quando il diametro del piano è eguale ad un diametro e sei decimi di quello della vena, aver si debbe il massimo urto, poichè i filetti acquei dovrebbero allora abbandonare il piano con direzioni parallele; ma la sperienza non dà questo massimo urto, perchè i mentovati filetti, mercè quella circostanza non computata nel calcolo, scappano via con direzioni a quel piano inclinate.

§. 20. Riprendiamo l'equazione del §. 14

$$(3) \ldots\ldots \frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}} = 1 - \frac{m}{2}y^2,$$

da questa si ricava

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\left(1-\frac{m}{2}y^2\right)^2} - 1 = \frac{my^2 - \frac{m^2}{4}y^4}{\left(1-\frac{m}{2}y^2\right)^2};$$

$$(4)\ldots\ldots\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{y\sqrt{\left(m-\frac{m^2}{4}y^2\right)}}{1-\frac{m}{2}y^2};$$

$$\frac{\left(1-\frac{m}{2}y^2\right)dy}{y\sqrt{\left(m-\frac{m^2}{4}y^2\right)}}=dx;$$

ed integrando

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{\left(m-\frac{m^2}{4}y^2\right)}}-\frac{m}{2}\int\frac{ydy}{\sqrt{\left(m-\frac{m^2}{4}y^2\right)}}=x+6;$$

ma

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{\left(m-\frac{m^2}{4}y^2\right)}}=\frac{2}{m}\int\frac{dy}{y\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}}=\frac{1}{2\sqrt{m}}\log.\frac{\frac{2}{\sqrt{m}}-\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}}{\frac{2}{\sqrt{m}}+\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}};$$

$$\int\frac{ydy}{\sqrt{\left(m-\frac{m^2}{4}y^2\right)}}=\frac{2}{m}\int\frac{ydy}{\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}}=-\frac{2}{m}\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)};$$

dunque

$$(5)\ldots\ldots\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}+\frac{1}{2\sqrt{m}}\log.\frac{\sqrt{\frac{4}{m}}-\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}}{\frac{2}{\sqrt{m}}+\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}}=x+C.$$

E quest'è l'equazione della curva cercata.

Per determinare C osservo che quando $x=0$ dobbiamo avere $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\infty$, e perciò l'equazione (4) ci darà $1-\frac{m}{2}y^2=0$, da cui $y^2=\frac{2}{m}$; sarà dunque

$$C=\sqrt{\frac{2}{m}}+\frac{1}{2\sqrt{m}}\log.\frac{\frac{2}{\sqrt{m}}-\sqrt{\frac{2}{m}}}{\frac{2}{\sqrt{m}}+\sqrt{\frac{2}{m}}};$$

e l'equazione della curva NMO sarà

$$(6)\ldots\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}-\sqrt{\frac{2}{m}}+\frac{1}{2\sqrt{m}}\log.\frac{\left\{\frac{2}{\sqrt{m}}-\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}\right\}\left\{\frac{2}{\sqrt{m}}+\sqrt{\frac{2}{m}}\right\}}{\left\{\frac{2}{\sqrt{m}}+\sqrt{\left(\frac{4}{m}-y^2\right)}\right\}\left\{\frac{2}{\sqrt{m}}-\sqrt{\frac{2}{m}}\right\}}=x.$$

§. 21. Supponiamo che alla periferia del piano circolare CC', su del quale si fa l'urto, sia adattata una fascia o contorno CD; ma per formarsi una chiara idea di questo congegno, su del quale fingo, che si faccia l'urto, poniamo che all'asse OB *fig.* 6, unita ad angolo retto la linea BC, ed a questa nel punto C con un angolo qualunque, la retta DC, poniamo dico che le rette DC, CB si ravvolgano attorno l'asse OB. Allora CB descriverà il circolo su di cui si ha da far l'urto, e CD descriverà un tronco di cono, la superficie del quale sarà quella fascia posta alla periferia del cerchio.

Ora la vena cilindrica scappando da ogni banda, dopo avere urtato il piano circolare descritto da CB, incontrerà quella fascia dalla quale sarà obbligata a ripiegarsi; e se la figura 6 rappresenta la sezione, che un piano passando per l'asse OB fa della vena cilindrica, e delle superficj sulle quali essa vena urta, è facile a comprendere, che la curva DQ potrà rappresentare la piegatura del fluido all'incontro della fascia, e dalla forza centrifuga che esercitava il fluido in questa ripiegatura, ne nascerà una nuova spinta o pressione nella direzione stessa dell'asse OB, e questa sarà l'aumento dell'effetto dell'urto della vena cilindrica, procurato dall'aggiunta di quella fascia CD. L'acqua poi contenuta nello spazio QCDM la continueremo a risguardare come sensibilmente stagnante.

Supponiamo che la fascia sia tanto grande che l'acqua scappi secondando la direzione di essa; supponiamo anco che il piano circolare sia così esteso, che tra il punto N, ove terminando la piegatura della vena fluida essa tocca il piano, ed il punto Q, ove la medesima vena mercè l'avvicinamento della fascia CD, torna a piegarsi, ci sia un qualche intervallo.

Sia $BG = x$, $y = GM$ parallela a BC; l'angolo fatto dal prolungamento di BC e da DC chiamisi ω; sarà $DCB = 180^\circ - \omega$. Siano in D e Q i punti ove la curva QMD tocca le rette BC, CD. Sia $BQ = \beta$.

Seguendo parola a parola il discorso dei §§. 12, 13, 14, si arriva alla medesima equazione (2), cioè

$$(2) \ldots . \frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}} = C - m\frac{y^2}{2},$$

essen-

essendo C la costante arbitraria portata dall' integrazione.

Per determinarla io osservo che quando $y=\beta$ debbe essere $\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}=0$; sarà dunque $C-m\frac{\beta^2}{2}=0$, $C=m\frac{\beta^2}{2}$, e perciò

$$(7)\ldots\ldots\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}=\frac{m}{2}(\beta^2-y^2).$$

Conduciamo l'ordinata FD al punto D, prolunghiamo BC finchè incontri la DX abbassata dal punto D su di lei perpendicolare; ed essendo in questo punto D, $\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}=\text{sen}.\,\omega$, si avrà $\frac{m}{2}\left(\overline{BX}^2-\overline{BQ}^2\right)=-\text{sen}.\,\omega$; sostituendo in questa equazione il valore di m, il quale è $\frac{2\pi p}{2aB}$, si troverà

$\frac{2\pi(\overline{BX}^2-\overline{BQ}^2)}{2}p=-2aB\,\text{sen}.\,\omega$.

Ora se si ha una forza normale a DC, ed alla stessa DC proporzionale, si potrà questa decomporre in due altre normali e proporzionali una ad XD, l'altra ad XC; e di qui ne deriva che le pressioni del fluido sopra le due linee DC, CQ considerate queste pressioni nella direzione parallela all' asse OB, sono le stesse che sopporterebbe tutta la linea QX; frattanto è facile vedere che $2\pi\,.\,\frac{\overline{BX}^2-\overline{BQ}^2}{2}p$ rappresenta la pressione o la spinta del fluido sulla zona circolare descritta da QC, e sulla fascia descritta DC; sarà dunque questa pressione $2aB\,\text{sen}.\,\omega$; così l'aggiunta di quella fascia, o contorno inclinato dell'angolo ω al piano circolare, aumenterà l'effetto dell'urto di una vena fluida, e mentre prima la sua misura era $2aB$, essa è ora

$$2aB+2aB\,\text{sen}.\,\omega.$$

§. 22. Se poi si cercasse quale esser debbe l'angolo ω onde quell' aumento $2aB\,\text{sen}.\,\omega$ sia massimo, si troverebbe

$\omega = 90^{\circ}$, ed allora l' effetto dell' urto sarebbe doppio di prima, e l' urto eguaglierebbe un peso eguale a $4aB$.

§. 23. Se la fascia CD non fosse tanto estesa, che l' acqua scappar potesse con direzioni ad essa parallele, allora chiamato φ l' angolo fatto dai filetti dell' acqua con la direzione CD, si avrà $\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}\right\}}} = \cos.(\varphi + 90 - \omega) = \text{sen}.(\omega - \varphi)$;

e quindi ragionando come al §. 21, si avrà

$$\frac{2\pi(\overline{BX}^{2} - \overline{BQ}^{2})}{2}p = -\,2aB\,.\,\text{sen}.(\omega - \varphi)\,.$$

Sarà pertanto $2aB\,\text{sen}.(\omega - \varphi)$ l' aumento dell' urto che porta l' aggiunta di quella fascia, il quale aumento sarà massimo quando $\omega - \varphi = 90$, il quale risultamento è compagno a quello ottenuto al §. 9; e quando gli angoli ω e φ avranno questa relazione tra di loro, l' urto totale su quel piano contornato dalla fascia sarà come qui sopra (§. 22), $4aB$.

§. 24. Al §. 21 noi abbiamo supposto che i due punti N e Q *fig.* 6 avessero qualche distanza tra loro, ora riflettendo a quanto si è detto di poi si vedrà, che di questa condizione non abbiamo tenuto alcun conto, e che essa nulla ha che fare nel risultamento, così l' intervallo QN può anco ridursi a nulla, e tutto ciò che abbiamo dimostrato è parimente vero; anzi se noi ci figuriamo il piano circolare ed il contorno di tali dimensioni che le curve fluide, OND, O'N'D' *fig.* 7 non vadano a toccare il piano circolare, ma si ripieghino prima di giungersi, e facciano come ci mostra la figura, la misura dell' urto sarà anco quella che abbiamo assegnata qui sopra; giacchè l' acqua contenuta nello spazio ONDCBC'D'N'O risguardandosi come stagnante, possiamo fingere un piano EF, il quale tocchi quelle curve nei punti N, N', e che sia il piano, su del quale si fa l' urto.

In generale qualunque superficie concava di rivoluzione descritta dalla curva DBD' *fig.* 8, la quale sia urtata da una vena fluida, il cui asse sia l' asse stesso della superficie urtata, la misura dell' urto non potrà essere mai maggiore di $4aB$, cioè del quadruplo del peso del cilindro che ha per base l'area della sezione della vena fluida, e per altezza quella dovuta alla velocità.

Infatti se noi poniamo che OND, ON'D' siano le piegature del fluido all'incontro della concava superficie, siccome l'acqua che è contenuta entro lo spazio ONDBD'N'O si risguarda come stagnante, così se noi conduciamo un piano EGF, che tocchi quelle curve nei punti N, N', e se noi supponiamo che questo piano circolare sia contornato da una fascia conica, la quale tocchi la superficie di rivoluzione nel cerchio descritto dal punto D, nulla con queste supposizioni si cangerà nelle ripiegature del fluido, e quindi la misura dell'urto esercitato contro quella superficie di rivoluzione, sarà la stessa che quella dell'urto sull'immaginato piano circolare circondato da quella fascia. Sarà dunque una tal misura quella da noi determinata al §. 23, il cui massimo valore è $4aB$.

§. 25. Il sullodato Sig. *Morosi*, nella sommaria relazione che ei fe all'Istituto di Milano delle sperienze sull'urto dei fluidi ci assicurò di avere potuto per mezzo di contorni posti al piano urtato dall'acqua rendere l'effetto dell'urto due, tre, quattro, ed anco sei volte maggiore. Ora non sapendosi come erano disposti i contorni posti dal Sig. *Morosi*, non sapendosi da qual misura egli partiva, nè conoscendosi altri dettagli delle sperienze, nulla si può dire su di esse; certo si è, che se la prima misura dell'urto da cui partiva questo Meccanico, era la misura dell'urto di una vena fluida su di un piano avente un'area eguale a quella della sezione della vena urtante, allora essendo una tal misura circa $\frac{3}{4}$ del peso del cilindro (§. 18) che ha per base l'area della sezione della vena, e per altezza quella alla velocità dovuta, certo si è, io dico, che col crescere l'area del piano urtato, e coll'aggiungerci anco un contorno, si può ridurre quell'urto ad aver per misura il quadruplo di quel cilindro (§. 23), ed in conseguenza ad essere cinque volte ed $\frac{1}{4}$ maggiore di quella prima misura dell'urto; e se quella prima misura fosse stata quella dell'urto su di un piano anco più piccolo, allora il peso del quadruplo cilindro a cui si può portare l'urto, poteva essere anco sei, otto, e più volte maggiore di quel primo urto.

§. 26. Comunque però sia la faccenda, è indubitato che obbligando l'acqua che scappa dopo avere urtato, a ripiegarsi, in tali ripiegature che si fanno sempre per mezzo di curve, ella eserciterà una forza centrifuga, la quale potrà operare in guisa da aggiungere spinta al piano urtato. Io sono persuaso che se in qualunque delle sperienze del Sig. *Morosi*, descritto fosse con esattezza il congegno, e fosse anco fatto in modo da poterne valutare le dimensioni, allora colle Teoriche dimostrare si potrebbe l'effetto, in quelle sperienze annunziato.

Queste stesse Teoriche rendono anco ragione dell'aumento dell'urto, che si ottiene facendo che la vena fluida, non sur una superficie piana, ma sur una concava faccia l'impulsione, e mostrano l'avvedutezza di quei, che hanno fatto le ali o palette delle rote concave verso la venuta dell'acqua.

§. 27. Ma nel fare le sperienze sull'urto dei fluidi conviene avere avvertenza di non attribuire all'urto, ciò che da altre circostanze può dipendere; così se la colonna fluida è verticale, ed il piano è orizzontale conviene (*fig.* 4) valutare il peso di quei ridossi di acqua, che si trovano tanto negli angoli C, C', quanto attorno del centro B, come pure il peso di quell'acqua, che è in moto, entro quella specie di cassetta, che formano i piani HC, H'C', giacchè per essere essa in moto non cessa già di essere pesante, ed aggravare la bilancia, colla quale si misura l'urto. La somma poi di questi pesi si ha da sottrarre dal peso totale, che la detta bilancia avrà dato per misura dell'urto. La stessa avvertenza si ha da avere quando sia orizzontale la direzione dell'urto, e verticale il piano CC', almeno per quella porzione di acqua, la quale può esser trattenuta dai contorni nella parte inferiore. Ma è facile prescrivere così in generale queste avvertenze, difficilissimo nell'atto pratico ad eseguire quanto esse richiedono.

AGGIUNTA.

Al §. 2 abbiamo ritrovato che la pressione, la quale per cagione della forza centrifuga si fa su ciascun punto p (*fig.* 1) della curva MN, è $\frac{2a}{r}b$: Ora potendosi fare alcune difficoltà alla dottrina, che ha condotto a quella misura, ho cercato di ottenerla per un'altra via.

Non accelerandosi nè ritardandosi la vena fluida nella piegatura, cui l'obbliga l'angolo ABC (*fig.* 9), il primo filetto acqueo descriverà la curva MN, e gli altri filetti descriveranno delle curve a lui parallele, di modo che l'ultimo descriverà una curva EqF parallela ad MN, e distante da essa della quantità b, se b indica, come si disse, la larghezza della vena piana. Ogni filetto acqueo conserverà nella piegatura la velocità che aveva prima; dal che ne conseguita, che per tutto lo spazio della piegatura, le particelle come p, a, q che si ritrovano insieme in una sezione pq, non si trovano più unite tra loro in una qualunque sezione successiva, giacchè a misura che esse sono vicine a q hanno una maggior velocità rotatoria.

Ora tutte le particelle, che si trovano nella sezione pq, avendo diversa celerità di rotazione, aver debbono diversa forza centrifuga, e la pressione che si esercita sul punto p, si ha da ricavare dalle diverse forze centrifughe di cui sono dotate le particelle acquee componenti la linea pq.

Siano ora LP, PQ i due assi ortogonali ai quali si riferiscono le curve. Siano le coordinate $\mathrm{PR} = x$; $\mathrm{R}p = y$. Sia ef la curva descritta da un filetto acqueo qualunque. Sia $\mathrm{PS} = t$, $\mathrm{S}a = u$; essendo ef una curva parallela ad MN, se facciamo la distanza $ap = z$ sarà

$$t = x + z \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}; \quad u = y + z \frac{1}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}};$$

avremo poi essendo z costante rispetto ad α,

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)=1+z\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}};$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=-\left(\frac{dy}{dx}\right)-\frac{z\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=-\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right):$$

al differenziale dell'y ho dato il segno negativo, perchè y scema quando x cresce.

Ora il raggio di curvatura della curva ef nel punto α, se lo rappresentiamo con R, è

$$R=\frac{\left\{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)-\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)};$$ se dunque in questa formola facciamo $\left(\frac{du}{dx}\right)=-\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)$, e

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)-\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right),$$

si avrà

$$R=-\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}\left(\frac{dt}{dx}\right)=-\frac{\left\{1+\left(\frac{dx}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}-z;$$

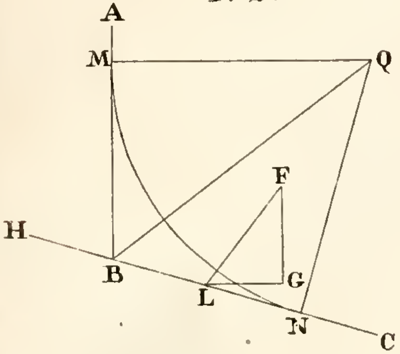
ma $-\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$ è l'espressione del raggio di curvatura nel punto p, dunque, se questo raggio è indicato con r, sarà $R=r-z$.

Condotte nei punti M, N le perpendicolari MM', NN' l'arco mn della curva ef compreso tra quelle perpendicolari, sarà (*) $mn=\text{MN}-z\text{A}$ essendo A l'arco, che misura l'angolo fatto dalle normali MM', NN' e descritto col raggio 1.

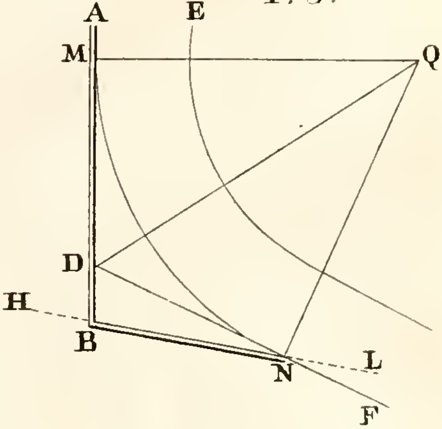
Sia dz la grossezza della molecola acquea la quale si tro-

(*) Si veda una Memoria del Signor *Bordoni* inserita nel Tomo XVI degli atti della Società Italiana, nella quale la dottrina delle curve delle superficj parallele è compiutamente trattata.

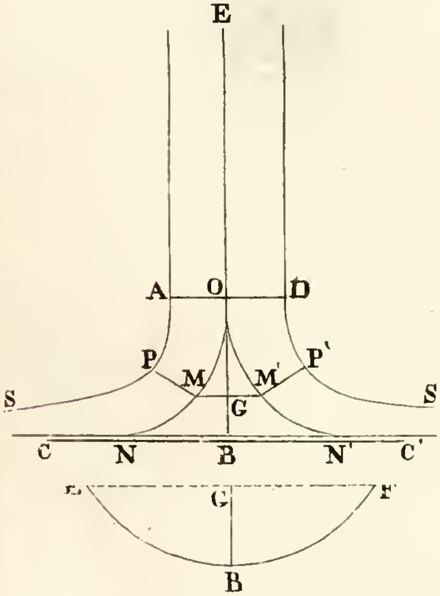
F. 2.


A
M
Q
F
H
B
G
L
N
C

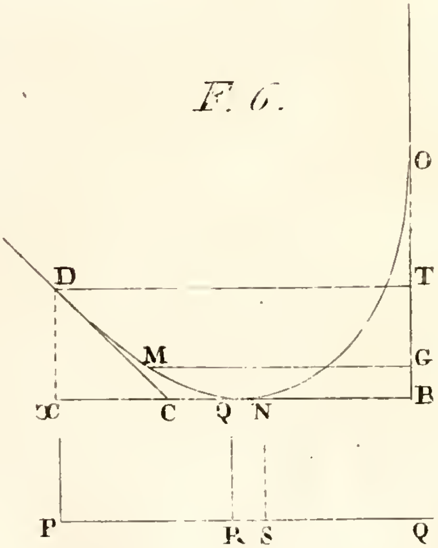
F. 3.


A
E
M
Q
D
H
B
N
L
F

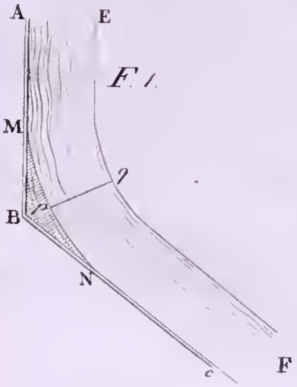
F. 5.


E
A
O
D
P
M
M'
P'
S
S'
G
C
N
B
N'
C'
E
G
F
B

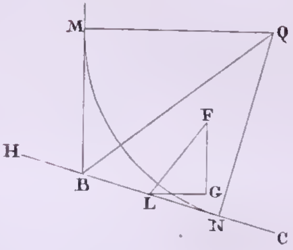
F. 6.


O
D
T
M
G
B
x
C
Q
N
P
R
S
Q

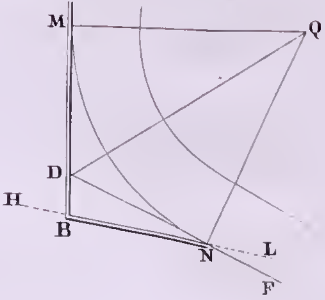
F. 1.



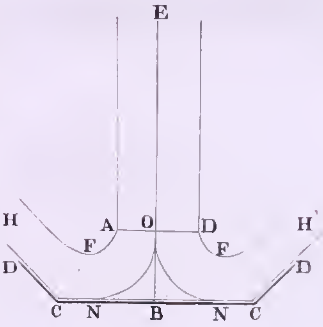
F. 2.


A
M
Q
F
H
B
G
L
N
C

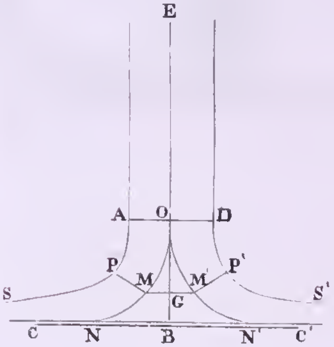
F. 3.


A
E
M
Q
D
H
B
N
L
F

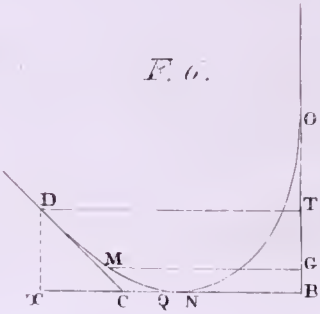
F. 4.


E
H
A
O
D
H'
F
F
D
D
C
N
B
N
C

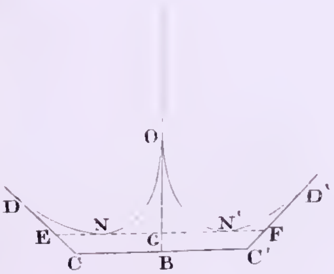
F. 5.


E
A
O
D
P
M
M'
P'
S
S'
G
C
N
B
N'
C'

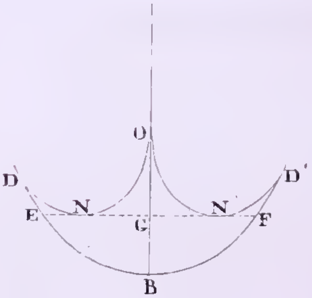
F. 6.


O
D
T
M
G
T
C
Q
N
B

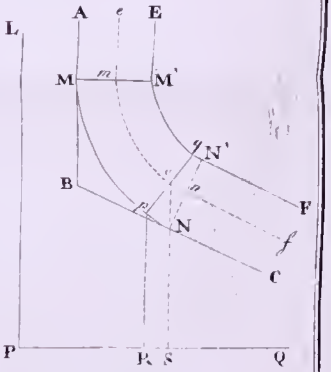
F. 7.


O
D
N
N'
D'
E
G
F
C
B
C'

F. 8.



F. 9.


L
A
e
E
M
m
M'
q
N'
B
n
F
p
N
f
C
P
R
S
Q

va in α, e sarà $\frac{2a}{r-z}\,dz$ la pressione che questa molecola esercitar debbe a causa della forza centrifuga: ora la pressione su tutti i punti dell'arco MN dovendo essere la stessa, ed in ciascun punto p questa pressione non potendo essere che una funzione dei raggi osculatori delle molecole che si trovano tra p e q, cioè una funzione di r, dovrà questa funzione essere una quantità costante per tutti i punti tra M ed N; sarà dunque r costante, ed MN in conseguenza un arco di cerchio. La somma allora di tutte le pressioni nate dalle forze centrifughe delle molecole contenute nel filetto fluido mn sarà $(\mathrm{MN}-z\mathrm{A})\frac{2a}{r-z}\,dz$, cioè $\mathrm{MN}\,.\,\frac{2a\,dz}{r-z}+2a\mathrm{A}\left\{1-\frac{r}{r-z}\right\}dz$, ed integrando rispetto a z, avremo la somma di tutte le pressioni, che nascono da tutte le forze centrifughe delle particelle acquee comprese nello spazio MNN'M', e perpendicolari queste pressioni all'arco MN, e questa somma indicata per S sarà

$$\mathrm{S}=-\mathrm{MN}\,.\,2a\log.(r-z)+2a\mathrm{A}z+2a\mathrm{A}r\log.(r-z)+\mathrm{C}.$$

Determiniamo la costante per modo che $z=0$ dia $\mathrm{S}=0$, e poscia estendendo l'integrale sino a $z=b$, sarà

$$\mathrm{S}=-\mathrm{MN}\,.\,2a\log.(r-b)+2a\,.\,\mathrm{A}b+2a\mathrm{A}r\log.(r-b):$$

Ora essendo $\mathrm{A}r=\mathrm{MN}$, si avrà

$$\mathrm{S}=\mathrm{MN}\left\{-2a\log.(r-b)+\frac{2a}{r}b+2a\log.(r-b)\right\}.$$

$\mathrm{S}=\mathrm{MN}\,.\,\frac{2a}{r}b$. La pressione infine su di un qualunque punto p dell'arco MN, sarà $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{MN}}=\frac{2a}{r}b$ come trovammo al §. 2.

SOPRA L'EQUAZIONI PRIMITIVE CHE SODDISFANNO ALL'EQUAZIONI DIFFERENZIALI TRA TRE O UN PIU' GRAN NUMERO DI VARIABILI.

RIFLESSIONI

Del Signor Pietro Paoli.

Ricevuta li 25 *Agosto* 1814.

I grandi geometri del nostro secolo hanno portata al più alto grado di perfezione la teoria delle soluzioni particolari dell' equazioni differenziali tra due variabili. Ma allorchè l'equazioni differenziali contengono tre o un maggior numero di variabili, s'ignorano in generale i mezzi di rintracciare le loro soluzioni particolari. Eppure sarebbe importantissimo di poterla scuoprire, perchè quando l'equazioni differenziali non soddisfanno alle condizioni d' integrabilità, queste soluzioni particolari sono le sole che possano verificare l'equazioni date, se pure non si faccia qualche ipotesi per diminuire il numero delle variabili indipendenti. Si deve però osservare, che il Sig. Conte *Laplace* nelle sue eccellenti ricerche sopra le soluzioni particolari pubblicate nell'anno 1772 diede le regole necessarie per determinare in tutti i casi le soluzioni particolari dell'equazioni differenziali del prim'ordine tra tre variabili. A ciò si riduce tutto quello che fin qui si conosce, e niuno, ch'io sappia, ha procurato di estendere le medesime regole all' equazioni degli ordini superiori. Dopo molti inutili tentativi per vincere le difficoltà, che presenta la risoluzione del problema, son giunto finalmente a dedurre dai primi principj della teoria delle funzioni un metodo generale per trovar le soluzioni particolari dell'equazioni differenziali di tutti gli ordini tra un numero qualunque di variabili, o più generalmente per determinare tutte l'equazioni primitive senza differenziali, non esclusa la primitiva completa quando può aver luogo, le quali soddisfanno all'equazioni differenziali date. Un tal metodo forma l'oggetto di questa memoria; ma prima di esporlo comincierò dal fare alcune riflessioni sopra l'equazioni differenziali del prim'ordine, le quali non soddisfanno alle condizioni d'integrabilità, affine di ben distinguere la natura delle diverse specie di soluzioni, e la loro dipendenza da quel sistema composto di più equazioni simultanee, che dal Sig. Conte *Monge* vien chiamato l'integrale completo di questa sorta di equazioni differenziali.

1. È noto che l'equazione differenziale tra tre variabili

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q\,\frac{\partial y}{\partial x},$$

la quale non soddisfà alla condizione d'integrabilità, non ha equazione primitiva completa, finchè si riguardano le variabili x ed y come tra loro indipendenti, e la z come funzione di x ed y. Ma se si suppone una relazione qualunque tra x ed y, si potrà soddisfare alla proposta in infiniti modi, ed il sistema formato da due equazioni, che gli comprende tutti, si chiama il suo integrale completo. Il Sig. *Monge* ed io abbiamo dati varj metodi per la ricerca di questo integrale completo richiamandola all'integrazione dell'equazioni tra due sole variabili: tutti questi metodi possono ridursi al seguente. Supponghiamo y costante, e sia M il fattore che in questa ipotesi rende esatta la differenziale $\left(\frac{\partial z}{\partial x} - p\right)\partial x$, in modo che sia $\int M\left(\frac{\partial z}{\partial x} - p\right)\partial x = N$; ed avremo per una dell' equazioni integrali della proposta

$$0 = N + F.y,$$

ove $F.y$ è una funzione arbitraria di y, perchè y è stata supposta costante. Per trovare la seconda equazione, che insieme con la prima soddisfà alla proposta, prendiamo il differenziale della prima facendo variare x ed y, ed avremo

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p + \frac{1}{M}\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\right]\frac{\partial y}{\partial x}$$

la qual equazione paragonata con la proposta ci darà

$$0 = \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial y} + Mq\,.$$

Dunque l'integrale cercato sarà rappresentato dalle due equazioni simultanee

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} 0 &= N + F\,.\,y \\ 0 &= \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial y} + Mq\,. \end{aligned}$$

Se da queste due equazioni si elimina z, si otterrà una equazione tra x, y, $F\,.\,y$, e $\frac{\partial F}{\partial y}$, la quale si potrà prendere in luogo di una delle due equazioni integrali, per esempio della seconda. La variabile x non potrà mai mancare nella equazione proveniente dalla eliminazione, perchè altrimenti questa ci darebbe il valore di $F\,.\,y$, e questo valore essendo determinato da una equazione differenziale conterrebbe una costante arbitraria. Sostituendo il valore di $F\,.\,y$ la prima equazione sarebbe la primitiva completa della proposta, lo che è contro la nostra ipotesi, perchè abbiamo supposto che la condizione d'integrabilità non sia soddisfatta, e per conseguenza che la proposta non possa avere un integrale completo rappresentato da una sola equazione.

Invece di y si potrebbe egualmente supporre x costante, e P essendo il fattore che rende esatta la differenziale $\left(\frac{\partial z}{\partial y} - q\right)\partial y$, e $Q = \int P\left(\frac{\partial z}{\partial y} - q\right)\partial y$, si avrebbe il medesimo integrale completo della proposta espresso sotto un'altra forma dal sistema delle due equazioni simultanee

$$\text{(b)}\quad \begin{aligned} 0 &= Q + f\,.\,x \\ 0 &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial x} + Pp\,. \end{aligned}$$

2. Quantunque l'equazione, che risulta dall'eliminazione di z dalle due equazioni (a), debba in generale contenere

x ed y, contuttociò può accadere che dandosi un valore conveniente alla funzione $F.y$ essa sia verificata indipendentemente da x, in modo che i termini che contengono x e quei che non la contengono si annullino separatamente. In questo caso sostituendo il valore trovato di $F.y$ le due equazioni (a) si ridurranno ad una sola, ed avremo un integrale della proposta espresso da una sola equazione, ma questa non conterrà costante arbitraria, perchè per ipotesi la proposta non ammette un integrale di questa forma.

Sia data per esempio l'equazione

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - 1 - \sqrt{(z-x-y)} - (1+x-2y)\frac{\partial y}{\partial x}$$

la quale non soddisfà alla condizione d'integrabilità. Supposta y costante la differenziale $\left(\frac{\partial z}{\partial x} - 1 - \sqrt{z-x-y}\right)\partial x$ diventa esatta essendo moltiplicata per $\frac{1}{\sqrt{(z-x-y)}}$, ed il suo integrale è $2\sqrt{(z-x-y)}-x$. Abbiamo adunque $M = \frac{1}{\sqrt{(z-x-y)}}$, $N = 2\sqrt{(z-x-y)} - x$, e l'integrale completo è dato dalle due equazioni simultanee

$$0 = 2\sqrt{(z-x-y)} - x + F.y$$

$$0 = \sqrt{(z-x-y)}.\frac{\partial F}{\partial y} - x + 2y.$$

Eliminandone z avremo l'equazione

$$0 = (x - F.y)\frac{\partial F}{\partial y} - 2x + 4y.$$

Se la ponghiamo sotto la forma

$$0 = x\left(\frac{\partial F}{\partial y} - 2\right) + 4y - F.y\,\frac{\partial F}{\partial y},$$

è evidente che possiamo farne sparire la x ponendo $\frac{\partial F}{\partial y} = 2$, cioè $F.y = 2y + c$, e che il medesimo valore soddisfà al rimanente dell'equazione purchè si prenda la costante arbitraria $c = 0$. Dunque facendo $F.y = 2y$, le due equazioni integrali si riducono alla medesima equazione

$$0 = 2\sqrt{(z-x-y)} - x + 2y,$$

e perciò esiste un integrale particolare espresso da una sola equazione, il quale soddisfà alla proposta, e questo integrale particolare è compreso nell'integrale completo, e se ne deduce dando il valore determinato $2y$ alla funzione arbitraria $F.y$.

3. L'equazione differenziale

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q\,\frac{\partial y}{\partial x}$$

non ha una equazione primitiva completa, quando la condizione

$$0 = p\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right) - q\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

non è identica indipendentemente da una relazione qualunque tra le variabili x, y e z. Ma se non essendo identica, soddisfà però all'equazione differenziale, in questo caso ne è un integrale ma particolare, perchè non ha costante arbitraria, o piuttosto non ne è propriamente che una soluzione particolare, perchè la proposta non ha equazione primitiva completa. Nell'esempio precedente la condizione d'integrabilità diventa

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{(z-x-y)}}\cdot\left[2\sqrt{(z-x-y)} - x + 2y\right],$$

e ci dà quella medesima relazione, che abbiamo trovato esser compresa nell'integrale completo formato da due equazioni. Lo stesso accade in molti altri casi, e ci fa conoscere l'origine di queste relazioni particolari, e la loro dipendenza dall'integrale completo. Perchè abbiamo veduto che esse hanno luogo, quando per un conveniente valor determinato della funzione arbitraria le due equazioni integrali si riducono ad una sola, cioè quando divengono affatto simili.

4. Accade contuttociò qualche volta, che la condizione d'integrabilità dia una relazione soddisfaciente all'equazione differenziale, che non sia compresa nel suo integrale completo. Così per l'equazione

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{x + x\sqrt[3]{(z^2 - x^2 - y^2)}}{z} - \frac{z^2 - x^2}{yz} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

la condizione d'integrabilità

$$0 = \frac{x}{yz}\sqrt[3]{(z^2 - x^2 - y^2)}$$

ci dà la relazione $z^2 - x^2 - y^2 = 0$, la quale verifica la proposta. Se adesso cerchiamo l'integrale completo, lo troveremo espresso dalle due equazioni simultanee

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} 0 = 3\sqrt[3]{(z^2 - x^2 - y^2)^2} - x^2 + 2F \,.\, y \\ 0 = z^2 - x^2 - y^2 + y\dfrac{\partial F}{\partial y}\sqrt[3]{(z^2 - x^2 - y^2)}, \end{cases}$$

e si vede facilmente che non è possibile di dare un valore determinato alla funzione $F \,.\, y$, in modo che le due equazioni integrali si riducano ad una sola. Dunque la soluzione $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ annunziata dalla condizione d'integrabilità non è compresa nell'integrale completo.

Se integrando la proposta in luogo di y si supponesse x costante, si avrebbe il medesimo integrale espresso in altro modo dalle due equazioni

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} 0 = z^2 - x^2 + y^2 f \,.\, x \\ 0 = y^2\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2x\sqrt[3]{(z^2 - x^2 - y^2)} \end{cases}$$

le quali posta $f \,.\, x = -1$ si riducono all'equazione unica $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ annunziata dalla condizione d'integrabilità. Sembra dunque che l'integrale (b) sia più generale dell'integrale (a), in quanto il primo contiene la soluzione $z^2 - x^2 - y^2 = 0$, che non è compresa nel secondo. Ma si potrà dedurre la medesima soluzione anche dall'integrale (a) col seguente ragionamento.

L'equazione

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{x[1 + \sqrt[3]{(z^2 - x^2 - y^2)}]}{z}$$

nella ipotesi di y costante ha per integrale completo

$$0 = 3\sqrt[3]{(z^2 - x^2 - y^2)^2} - x^2 + 2F \,.\, y$$

ove $F \,.\, y$ rappresenta la costante arbitraria. Siccome l'equazione $z^2-x^2-y^2=0$ non è compresa nell'integrale completo, qualunque valore si dia a $F.y$, e contuttociò soddisfà all'equazione differenziale, converrà che ne sia una soluzione particolare, e questa si troverà, com'è noto, differenziando l'integrale per rapporto a z ed a $F.y$, ed eguagliando a zero il valore di $\frac{\partial z}{\partial F}$, che se ne ricava. Infatti abbiamo $\frac{\partial z}{\partial F}$ $=\frac{\sqrt[3]{(z^2-x^2-y^2)}}{4z}$.

5. Può ancora succedere che la relazione data dalla condizione d'integrabilità non sia contenuta nè nell'una nè nell'altra forma dell'integrale completo. Sia data per esempio l'equazione

$$0=\frac{\partial z}{\partial x}-2-y\sqrt{(z-2x+3y)}+[3-xy\sqrt[4]{(z-2x+3y)^3}].\frac{\partial y}{\partial x}$$

per la quale la condizione d'integrabilità annunzia la soluzione $z-2x+3y=0$. L'integrale completo della proposta sarà rappresentato dal sistema dell'equazioni

$$0=2\sqrt{(z-2x+3y)}-xy+F.y$$
$$0=\sqrt{(z-2x+3y)}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-x+xy\sqrt[4]{(z-2x+3y)}\right].$$

oppure da quello delle seguenti

$$0=8\sqrt[4]{(z-2x+3y)}-xy^2+f.x$$
$$0=\sqrt{(z-2x+3y)}\left[2y+\left(\frac{\partial f}{\partial x}-y^2\right)\sqrt[4]{(z-2x+3y)}\right]$$

ma nè l'uno nè l'altro contiene l'equazione $z-2x+3y=0$. Bisognerà dunque dedurla da ciascuno degl'integrali col metodo che *Lagrange* ha insegnato per trovare le soluzioni particolari; cioè eguagliare a zero il valore di $\frac{\partial z}{\partial F}$ ricavato dal primo, o quello di $\frac{\partial z}{\partial f}$ ricavato dal secondo.

6. *Euler* pensava che l'equazioni differenziali tra più variabili, le quali non hanno una equazione primitiva completa, non potessero esser verificate che dalle sole relazioni da-

te dalle condizioni d'integrabilità. Il Sig. *Laplace* nelle sue ricerche sulle soluzioni particolari pubblicate tra le Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi dell'anno 1772 dimostrò che questa regola non era generale coll'esempio dell'equazione

$$0=\frac{\partial z}{\partial x}-1-\sqrt[3]{(z-x-y)}\left[y+a\sqrt[4]{(z-x-y)}-b\sqrt[3]{(z-x-y)}\right]-\left[1+x\sqrt[3]{(z-x-y)}\right].\frac{\partial y}{\partial x}$$

alla quale soddisfà l'equazione $z-x-y=0$, quantunque la condizione d'integrabilità non ne dia alcuno indizio. Quando questo caso ha luogo, ciascuna delle forme dell'integrale completo non conterrà la soluzione soddisfaciente, ma bisognerà dedurla da esse in forma di soluzione particolare, come dimostreremo in seguito. Intanto per darne un esempio ripigliamo l'equazione del Sig. *Laplace*

$$0=\frac{\partial \mu}{\partial x}-\sqrt[3]{\mu}\left(y+a\sqrt[4]{\mu}-b\sqrt[3]{\mu}\right)-x\sqrt[3]{\mu}\,.\,\frac{\partial y}{\partial x}$$

ove per più semplicità ho posto μ in luogo di $z-x-y$. L'integrale completo di questa equazione sarà rappresentato dall'uno o dall'altro dei sistemi seguenti

$$\left\{\begin{aligned}
0&=\int\frac{\partial \mu}{\sqrt[3]{\mu}\left(y+a\sqrt[4]{\mu}-b\sqrt[3]{\mu}\right)}-x+\mathrm{F}\,.\,y\\
0&=\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}-\int\frac{\partial \mu}{\sqrt[3]{\mu}\left(y+a\sqrt[4]{\mu}-b\sqrt[3]{\mu}\right)^2}\right)\sqrt[3]{\mu}\left(y+a\sqrt[4]{\mu}-b\sqrt[3]{\mu}\right)+x\sqrt[3]{\mu}
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
0&=\frac{3\sqrt[3]{\mu^2}}{2}-xy+f\,.\,x\\
0&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+a\sqrt[4]{\mu}-b\sqrt[3]{\mu}\right)\sqrt[3]{\mu}\,.
\end{aligned}\right.$$

Niuno di questi sistemi comprende come integrale particolare l'equazione $\mu=0$, che si deduce però dal primo mediante l'equazione $\frac{\partial \mu}{\partial \mathrm{F}}=0$, o dal secondo per mezzo della equazione $\frac{\partial \mu}{\partial f}=0$.

7. Vediamo adesso da che dipenda, che l'equazioni primitive soddisfacienti all'equazione differenziale $0=\frac{\partial z}{\partial x}-p-q\frac{\partial y}{\partial x}$

alcune volte siano comprese nell' integrale completo formato da due equazioni, e prendano perciò il carattere d' integrale particolare, altre volte non vi siano contenute e si presentino sotto l' aspetto di soluzioni particolari. Se $\mu = 0$ ove μ è una funzione data di x, y e z soddisfà all' equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q \frac{\partial y}{\partial x}$, soddisferà ancora all' equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$ nella ipotesi di y costante. Ora in questo caso ha dimostrato il Sig. *Laplace* nella Memoria citata, che ponendo in luogo di z il suo valore in x, y e μ nell' equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$ si può trasformar questa nella seguente $0 = \frac{\partial \mu}{\partial x} - h\mu^n$, ove h è una funzione di x, y e μ che non diventa nè zero nè infinita quando vi si fa $\mu = 0$, n un numero positivo, e precisamente $n =$ o > 1 se $\mu = 0$ è un integrale particolare dell' equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, $n < 1$ se n' è una soluzione particolare. L' equazione $\mu = 0$ soddisfarà ancora nella ipotesi di x costante all' equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, che potrà egualmente ridursi alla forma $0 = \frac{\partial \mu}{\partial y} - h' \mu^{n'}$, ove h' ed n' sono astrette alle medesime condizioni di h ed n. Pertanto riunendo le due equazioni parziali precedenti, quando si fa insieme variare x ed y, si potrà sempre trasformar la proposta $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q \frac{\partial z}{\partial y}$ nella seguente $0 = \frac{\partial \mu}{\partial x} - h\mu^n - h'\mu^{n'} . \frac{\partial y}{\partial x}$.

Ora se ciascuno dei numeri n ed n' è uguale o maggiore dell' unità, l' equazione $\mu = 0$ sarà un integrale particolare dell' equazioni $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, e si potrà dedurre dalle loro equazioni primitive complete, quando si darà un valore determinato conveniente alle funzioni $F.y$ e $f.x$; dunque la soluzione $\mu = 0$ sarà compresa in ciascuna delle due

forme

forme (a) e (b) dell' integrale completo. Se n è uguale o maggior dell' unità, ma $n' < 1$, la soluzione $\mu = 0$ sarà un integrale particolare di $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, ed una soluzione particolare di $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$; perciò essa sarà contenuta nella forma (a) ma non nella forma (b). Finalmente se n ed n' sono ambedue < 1, $\mu = 0$ sarà soluzione particolare di $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, e $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, e non sarà compresa nè nell' una nè nell' altra forma dell' integrale completo. Quest' ultimo caso avrà sempre luogo, quando l' equazione $\mu = 0$ non è data dalla condizione d' integrabilità. Poichè il Sig. *Laplace* ha dimostrato che la condizione d' integrabilità comprenderà sempre la soluzione $\mu = 0$ quando ciascuno dei due numeri n ed n' è $= 0 > 1$; ma col medesimo ragionamento si può provare, che affinchè ciò succeda basta che la somma dei due numeri n ed n' sia maggiore dell' unità. Per conseguenza quando l' equazione $\mu = 0$ non sarà annunziata dalla condizione d' integrabilità, bisognerà che ciascuno dei due numeri n ed n' sia < 1, e saremo perciò nell' ultimo dei casi contemplati.

Non è però necessario che si conosca l' integrale completo composto di due equazioni per trovare le relazioni singolari, che sole soddisfanno alla proposta $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q \frac{\partial y}{\partial x}$, poichè dalle riflessioni precedenti apparisce, che quest' equazioni singolari saranno per lo più comprese in quella, che rappresenta la condizione d' integrabilità, e se mai n' esiste alcuna che non vi sia contenuta, questa sarà soluzione particolare di ciascuna dell' equazioni $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, ove y ed x sono respettivamente riguardate come costanti, e potremo ottenerla cercando con i metodi conosciuti le soluzioni particolari, che sono comuni a quelle due equazioni.

8. Passiamo all' equazione tra quattro variabili

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q\,\frac{\partial y}{\partial x} - r\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

la quale non soddisfaccia a tutte o ad alcuna delle tre note condizioni d'integrabilità. Supponendo y ed u costanti sia M il fattore che rende esatta la differenziale $\left(\frac{\partial z}{\partial x} - p\right)\partial x$, e sia $\int M\left(\frac{\partial z}{\partial x} - p\right)\partial x = N$; avremo

$$0 = N + F(y, u)$$

per una dell'equazioni integrali della proposta. Affine di trovar le altre che devono aver luogo insieme con essa, prendiamone il differenziale facendo variare x, y, ed u, ed otterremo

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p + \frac{1}{M}\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\right]\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{M}\left[\left(\frac{\partial N}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

ed il paragone di questa con la proposta ci darà

$$0 = \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + Mq$$

$$0 = \left(\frac{\partial N}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) + Mr.$$

Pertanto l'integrale completo della proposta sarà rappresentato dal sistema delle tre equazioni simultanee

$$\begin{aligned} & 0 = N + F(y, u) \\ (c)\quad & 0 = \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + Mq \\ & 0 = \left(\frac{\partial N}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) + Mr. \end{aligned}$$

Il Sig. *Monge* nel suo supplemento all'Analisi pubblicato tra le Memorie dell'accademia delle Scienze di Parigi dell'anno 1784 pensava, che ad eccezione di alcuni casi particolari tre equazioni fossero necessarie per rappresentare in generale l'integrale completo dell'equazione tra quattro variabili $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q\frac{\partial y}{\partial x} - r\frac{\partial u}{\partial x}$. Io osservai nel sesto volume delle Memorie della Società Italiana delle Scienze, che si poteva in tutti i casi ridurre l'equazioni (c) a due sole limitando convenientemente la generalità della funzione F(y,u). Infatti se si eliminano dall'equazioni (c) le variabili x e z, si giungerà ad una equazione a differenze parziali tra y, u e F(y,u), la quale potrà tener luogo di una qualunque dell' equazioni (c). Integrando questa equazione a differenze parziali avremo il valore di F(y,u), il quale sostituito nell'equazioni (c) le ridurrà a due sole, perchè due di esse comporteranno la terza, o sia la terza non sarà che una combinazione delle altre due.

Sia data per esempio l'equazione

$$0=\frac{\partial z}{\partial x}-1-z+x+2y+3u-[2+x(z-x-2y-3u)^2].\frac{\partial y}{\partial x}-[3+y(z-x-2y-3u)].\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Integrandola nella ipotesi di y ed u costanti abbiamo

$$0=e^{-x}(z-x-2y-3u)+\mathrm{F}(y,u),$$

e essendo il numero che ha per logaritmo iperbolico l'unità. Prendiamo il differenziale dell' equazione trovata facendo variar tutto, e paragonandolo con la proposta avremo le altre due equazioni

$$0=e^{x}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\right)+x(z-x-2y-3u)^2$$

$$0=e^{x}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\right)+y(z-x-2y-3u).$$

Per diminuirne il numero eliminiamo z dalla prima e dalla terza, con che sparirà anche la x, e giungeremo all'equazione a differenze parziali $\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\right)-y\mathrm{F}(y,u)=0$, la quale integrata ci dà $\mathrm{F}(y,u)=e^{yu}\phi.y$. Dopo la sostituzione di questo valore l'integrale completo della proposta sarà rappresentato dalle due equazioni simultanee

$$0=z-x-2y-3u+e^{x+yu}.\phi.y$$

$$0=x(z-x-2y-3u)^2+e^{x+yu}\left(u\phi y+\frac{\partial \phi}{\partial y}\right).$$

In luogo di una di esse si può prendere la seguente

$$0=xe^{x+yu}.\overline{\phi.y}^2+u\phi y+\frac{\partial \phi}{\partial y},$$

e questa diventa identica se si fa $\phi \,.\, y = 0$; dunque la sola equazione $0 = z - x - 2y - 3u$ soddisfà alla proposta, e ne è integrale particolare.

9. Potremmo con un ragionamento simile a quello usato al n.° 7 distinguere i diversi casi, nei quali queste speciali relazioni contenute in una sola equazione e soddisfacienti alla proposta sono comprese nell'integrale completo composto di due equazioni, come integrali particolari, o se ne deducono a guisa di soluzioni particolari. Piuttosto indicheremo il modo di ritrovare tali singolari relazioni, quando l'integrale completo non è conosciuto, lo che forma l'oggetto principale di queste ricerche. Sia dunque $\mu = 0$ una speciale relazione, che soddisfaccia all'equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q\frac{\partial y}{\partial x} - r\frac{\partial u}{\partial x}$, essa soddisfarà ancora all'equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$ allorchè y ed u si riguarderanno come costanti, e perciò questa equazione sostituitovi il valore di z in x, y, u e μ si ridurrà alla forma $0 = \frac{\partial \mu}{\partial x} - h\mu^n$, ove n è un numero positivo, ed h una tal funzione di x, y, u e μ, che non divenga nè zero nè infinita quando $\mu = 0$. Così l'equazioni $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, $0 = \frac{\partial z}{\partial u} - r$, ove si suppongono respettivamente x ed u, x ed y costanti, ed alle quali in queste ipotesi soddisfà l'equazione $\mu = 0$, si cangeranno nelle seguenti $0 = \frac{\partial \mu}{\partial y} - h'\mu^{n'}$, $0 = \frac{\partial \mu}{\partial u} - h''\mu^{n''}$. Dunque riunendo queste parziali equazioni potremo mettere la proposta sotto la forma $0 = \frac{\partial \mu}{\partial x} - h\mu^n - h'\mu^{n'} \,.\, \frac{\partial y}{\partial x} - h''\mu^{n''} \,.\, \frac{\partial u}{\partial x}$.

Le condizioni d'integrabilità per questa equazione o sia per la proposta sono, com'è noto, le seguenti:

$$0 = (n' - n)hh'\mu^{n+n'-1} + \mu^{n+n'}\left[h\left(\frac{\partial h'}{\partial \mu}\right) - h'\left(\frac{\partial h}{\partial \mu}\right)\right] + \mu^{n'}\left(\frac{\partial h'}{\partial x}\right) - \mu^{n}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

$$0 = (n' - n'')h'h''\mu^{n'+n''-1} + \mu^{n'+n'}\left[h''\left(\frac{\partial h'}{\partial \mu}\right) - h'\left(\frac{\partial h''}{\partial \mu}\right)\right] + \mu^{n}\left(\frac{\partial h'}{\partial u}\right) - \mu^{n''}\left(\frac{\partial h''}{\partial y}\right)$$

$$0=(n''-n)hh''\mu^{n+n''-1}+\mu^{n+n''}\left[h\left(\frac{\partial h''}{\partial\mu}\right)-h''\left(\frac{\partial h}{\partial\mu}\right)\right]+\mu^{n''}\left(\frac{\partial h''}{\partial x}\right)-\mu^{n}\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right).$$

Ora se la somma di due qualunque dei numeri n, n', n'' sarà maggiore dell'unità, queste tre equazioni saranno soddisfatte da $\mu=0$. Infatti le quantità h, h', h'' svolte in una serie ascendente per le potenze di μ avranno la forma

$$h = \mathrm{H} + \mathrm{H}'\mu^{i} + \mathrm{H}''\mu^{i'} + \text{ec.}$$

ove H, H', ec. sono funzioni di x, y ed u, e gli esponenti i, i', ec. tutti positivi e crescenti. Onde apparisce che tanto le quantità h, h', h'', quanto i loro differenziali presi per rapporto ad x, y ed u non diventano infiniti quando $\mu=0$, e quindi i termini $hh'\mu^{n+n'-1}$, $\left(\frac{\partial h'}{\partial x}\right)\mu^{n'}$, $\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)\mu^{n}$, ed i corrispondenti nelle altre equazioni si annulleranno allorchè $\mu=0$. Ma il termine per esempio $\left(\frac{\partial h}{\partial\mu}\right)$ potrà nel medesimo caso divenire infinito se $i<1$, perchè riescirà moltiplicato per μ^{i-1}, ove l'esponente $i-1$ è negativo; contuttociò il prodotto di $\left(\frac{\partial h}{\partial\mu}\right)$ per $\mu^{n+n'}$ conterrà la potenza $\mu^{n+n'+i-1}$, ove l'esponente sarà positivo a motivo di $n+n'>1$. Pertanto anche il termine $\mu^{n+n'}\left[h\left(\frac{\partial h'}{\partial\mu}\right)-h'\left(\frac{\partial h}{\partial\mu}\right)\right]$, ed i corrispondenti nelle altre equazioni svaniranno nel caso di $\mu=0$, e le tre condizioni d'integrabilità si uniranno tutte ad indicarci la soluzione $\mu=0$.

Quando adunque la proposta ammetterà una soluzione particolare $\mu=0$, la quale non venga indicata dalle condizioni d'integrabilità, bisognerà che la somma di due dei numeri n, n', n'' sia eguale o minore dell'unità, e tanto più ciascuno di essi <1. Perciò l'equazione $\mu=0$ sarà una soluzione particolare di due dell'equazioni $0=\frac{\partial z}{\partial x}-p$, $0=\frac{\partial z}{\partial y}-q$, $0=\frac{\partial z}{\partial u}-r$, e questa si troverà se con i metodi conosciuti si ricercheranno le soluzioni particolari, che sono comuni a due di tali equazioni, e soddisfanno alla terza.

10. In generale data l'equazione tra un numero qualunque di variabili

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - A - B\frac{\partial y}{\partial x} - C\frac{\partial u}{\partial r} - D\frac{\partial t}{\partial x} - \text{ec.}$$

la quale non ammetta una equazione primitiva completa, siccome l'equazioni esprimenti le condizioni d'integrabilità mantengono sempre una forma simile a quelle contemplate nel numero antecedente, se ne potranno dedurre conseguenze analoghe. Quindi le soluzioni particolari o ci verranno indicate dalle condizioni tutte d'integrabilità, o potranno ritrovarsi tra le soluzioni particolari di due dell'equazioni $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - A$, $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - B$, $0 = \frac{\partial z}{\partial u} - C$, $0 = \frac{\partial z}{\partial t} - D$, ec.; in modo che la loro ricerca si ridurrà sempre a quella delle soluzioni particolari dell'equazioni tra due sole variabili.

11. Fin qui abbiamo parlato dell'equazioni, le quali non soddisfanno alle condizioni d'integrabilità; diciamo ancora una parola di quelle, che ammettono una equazione primitiva completa. Sia

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q\,\frac{\partial y}{\partial x}$$

una tale equazione: io comincio dall'osservare che si può giungere alla di lei primitiva completa nel modo seguente. S'integri l'equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, ove y è supposta costante; l'integrale conterrà una funzione arbitraria di y, e potrà esser rappresentato dall'equazione $F(x, y, z, \varphi . y) = 0$: s'integri pure l'equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, ove x si suppone costante, e l'integrale ne sia espresso da $f(x, y, z, \psi . x) = 0$: adesso si diano i valori i più generali alle funzioni $\varphi . y$ e $\psi . x$, con i quali le due equazioni trovate si riducono alla medesima, e questa equazione unica sarà la primitiva completa della proposta. Ciò posto se $\mu = 0$ è un integrale particolare di ambedue l'equazioni $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, e $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, dando dei valori determinati alle funzioni $\varphi . y$ e ψx le due equazioni $F(x, y, z, \varphi . y) = 0$, $f(x, y, z, \psi . x) = 0$ si ridurranno alla medesima $\mu = 0$, e perciò questi valori determinati saranno compresi in quei più generali, i quali somministrano la primitiva completa. Dunque $\mu = 0$ sarà un caso particolare dell'equazione primitiva completa, cioè sarà un integrale particolare della proposta. Viceversa se $\mu = 0$ è una soluzione particolare della proposta, non potrà essere integrale particolare di ambedue l'equazioni $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, ma dovrà essere soluzione particolare di una almeno di esse. Dunque cercando con le regole note le soluzioni particolari di queste, che sono tra due sole variabili, troveremo le soluzioni particolari della proposta. È facile estendere il medesimo ragionamento all'equazioni del prim'ordine tra un numero qualunque di variabili.

Le riflessioni precedenti mentre rendono evidente la connessione e dipendenza, che esiste tra l'equazioni primitive singolari dell'equazioni differenziali del prim'ordine non soddisfacienti alle condizioni d'integrabilità, ed il loro integrale completo espresso in due o più equazioni, nel medesimo tempo ci somministrano il modo di ritrovare tutte quest' equazioni singolari. Sotto questo punto di vista esse non presentano nulla di nuovo, poichè il Sig. *Laplace* ha già insegnato a trovare in qualunque caso le soluzioni particolari della equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q \frac{\partial y}{\partial x}$. E quantunque egli non abbia estesi i suoi ragionamenti all'equazioni, che contengono più di tre variabili, l'applicazione n'è così ovvia, che a lui deve attribuirsi tutto il merito di questa ricerca. Ma quando si passa a cercare le soluzioni particolari dell' equazioni del second'ordine, sulle quali fino ad ora non è stato scritto da alcuno, il problema diventa assai più difficile a motivo del numero e della forma differente delle condizioni d'integrabilità, che bisogna discutere nel caso in cui la proposta non ammette una primitiva completa. Affine di non smarrirmi in mezzo a queste difficoltà, prenderò un'altra strada, la quale si applica ancora al ritrovamento della equazione primitiva completa, qualora essa può aver luogo. Intraprendo tanto più volentieri a far qualche tentativo in questa nuova carriera, in quanto che nei differenti trattati di calcolo integrale non si trova alcuna regola per l'integrazione dell'equazioni differenziali tra tre o più variabili al di là del prim' ordine. Del resto io devo avvertire che riguardo in ogni caso il problema come risoluto, quando è ridotto alle sole difficoltà, che sono proprie dell'equazioni tra due sole variabili. Ma prima di entrare in materia conviene che io rammenti alcuni principj della teorìa delle funzioni.

12. Data tra le variabili x, y e z una equazione qualunque $F(x, y, z) = 0$, segue dalla teoria delle funzioni, che avranno luogo insieme con essa l'equazioni derivate del prim' ordine

$$(a)\quad \begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\ 0 &= \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

e qualunque combinazione, che si faccia di esse e della proposta.

Dall'equazioni derivate del prim'ordine si deducono le seguenti del secondo

$$(b)\quad \begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \\ 0 &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) \\ 0 &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \end{aligned}$$

le quali sussisteranno insieme con la proposta, come pure avrà luogo qualunque combinazione, che si formi della proposta e dell'equazioni (a) e (b). E così in seguito.

13. Se nel prendere le funzioni derivate dai termini della equazione data non si riguardano le variabili x ed y come indipendenti, ma si suppone che y sia funzione di x, si giungerà in questa ipotesi all'equazione derivata

$$\text{(a}'\text{)}\quad 0=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Questa è ciò che si chiama una equazione differenziale ordinaria o totale, mentre quelle, che abbiamo considerate nel numero precedente, sono equazioni a differenze parziali. Ora io dico che questa equazione (a') sussisterà anch'essa nel medesimo tempo che la proposta, qualunque sia il valore della funzione $\frac{\partial y}{\partial x}$, cioè qualunque funzione di x si supponga la y. Infatti, poichè z è funzione di x ed y, ed y è riguardata come funzione di x, abbiamo $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}$; sostituito il qual valore l'equazione (a') diventa

$$0=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]\cdot\frac{\partial y}{\partial x},$$

e si vede chiaramente che a motivo dell'equazioni (a) essa ha luogo indipendentemente dal valore della funzione $\frac{\partial y}{\partial x}$. Sarà lo stesso di una combinazione qualunque, che si formasse della proposta e dell'equazione (a').

Dalla equazione (a') si passa nella medesima ipotesi all'equazione differenziale del second'ordine

$$\text{(b}'\text{)}\quad \begin{aligned}0=&\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)+2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}+2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\\&+2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\right)\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\frac{\partial z^2}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\end{aligned}$$

la quale ha egualmente la proprietà di sussistere nel medesimo tempo che la proposta. Poichè $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)$

$\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, e sostituendo questo valore e quello di $\frac{\partial z}{\partial x}$ l'equazione (b') si cangia in

$$\begin{aligned}
0 = & \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \\
& + 2\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\right] \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \\
& + \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right] \cdot \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \\
& + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

ed è visibile che a motivo dell'equazioni (a) e (b) essa ha luogo indipendentemente dai valori delle funzioni $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Lo stesso accaderà di una combinazione qualunque, che si formasse della proposta e dell'equazioni (a') e (b'). E si potrà applicare un ragionamento simile all'equazioni differenziali del terz'ordine e dei seguenti.

14. Dal modo, con cui abbiamo dimostrate le proposizioni enunziate nel numero precedente, si deducono conseguenze importantissime per l'oggetto, che abbiamo in vista. Data una equazione differenziale del prim'ordine tra le variabili x, y, z, se esiste una equazione primitiva che gli soddisfaccia, cioè se z è realmente funzione delle variabili indipendenti x ed y, la proposta dopo la sostituzione di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$ in luogo di $\frac{\partial z}{\partial x}$ sussisterà indipendentemente dal valore della funzione $\frac{\partial y}{\partial x}$: per conseguenza ordinati i suoi termini per le potenze di $\frac{\partial y}{\partial x}$ i coefficienti di ciascuna potenza eguagliati a zero daranno altrettante equazioni, ciascuna delle quali dovrà aver luogo separatamente. Se l'equazione differenziale proposta sarà del second'ordine, dopo la sostituzio-

ne dei valori precedenti di $\frac{\partial z}{\partial x}$ e di $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ sussisterà indipendentemente dai valori delle funzioni $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; pertanto se dopo di averla ordinata secondo le potenze ed i prodotti di $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ eguagliamo a zero i coefficienti di ciascun termine, avremo altrettante equazioni, che dovranno tutte aver luogo nel medesimo tempo. E così in seguito per l'equazioni differenziali degli ordini superiori. Una parte di quest'equazioni separate, alle quali giungeremo in ciascun caso, ci darà delle condizioni tra i coefficienti, le altre serviranno alla ricerca dell'equazione primitiva della proposta, e queste ultime saranno sempre tra due sole variabili, e si potranno ad esse applicare le regole conosciute.

Si vede facilmente che si può usare il medesimo metodo per l' equazioni differenziali tra un maggior numero di variabili, se non che bisogna aggiungere ai valori di $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ec. i termini, che vi sono introdotti dalle nuove variabili.

15. Facciamo l'applicazione dei principj esposti alla ricerca dell'equazioni primitive, che soddisfanno all'equazioni differenziali di tutti gli ordini; e quantunque sia noto tutto ciò che appartiene al prim'ordine pure per meglio illustrare il nostro metodo consideriamo in primo luogo l'equazione

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + A + B \frac{\partial y}{\partial x}$$

ove i coefficienti A e B sono funzioni date di x, y e z. Ponendovi in luogo di $\frac{\partial z}{\partial x}$ il suo valore $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) . \frac{\partial y}{\partial x}$ essa diventa

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A + \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + B\right] . \frac{\partial y}{\partial x},$$

e se esiste una relazione tra z e le due variabili indipendenti x ed y, che gli soddisfaccia, dovranno aver luogo separatamente le due equazioni

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A$$

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + B .$$

Sia M il fattore che rende la funzione $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A$ una derivata esatta, in modo che N ne sia la funzione primitiva, $N = \psi . y$ sarà l'integrale completo della prima equazione. Esso ci dà $\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, e quindi $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y} - \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)}$, sostituito il qual valore la seconda equazione diventa

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial y} - \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right),$$

e da questa dobbiamo dedurre il valore della funzione $\psi . y$.

Ora se la proposta ammette una equazione primitiva completa con una costante arbitraria, sarà questa contenuta nel valore di $\psi . y$, che risulterà dalla integrazione dell'equazione precedente. Ma affinchè essa possa integrarsi, bisogna che sostituitovi il valore di z dedotto dalla equazione $N = \psi . y$ sparisca anche la x, e non vi rimangano che le due variabili y e $\psi . y$. Converrà dunque che sia

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) - B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right) = \varphi(N, y);$$

e questa è la condizione necessaria, perchè la proposta ammetta un integrale completo.

La condizione trovata si può anch'esprimere indipendentemente dalla cognizione della funzione N. Infatti se prendiamo la funzione derivata da $\varphi(N, y)$ per rapporto ad x, ricordandoci che z è una funzione di x ed y data dall'equazione $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A = 0$ troveremo

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right)\left[\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right)\left[\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\right].$$

Ora siccome l'equazione $N = \psi . y$ è l'integrale di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A = 0$ abbiamo $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0$, e quindi $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ dev' essere $= 0$. Dunque ponendo in luogo di $\varphi(N, y)$ il suo valore $\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) - B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$ otterremo

$$0 = \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y \partial z}\right) - B\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z}\right) + AB\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right) + A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right).$$

L'equazione identica $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0$ essendo differenziata per rapporto alle variabili y e z riguardate come indipendenti ci dà

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y \partial z}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

e sostituendo questi valori nella equazione precedente si trova finalmente

$$0 = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) + A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right) - B\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right).$$

Questa condizione d'integrabilità è nota da lungo tempo, e vi si giunge in una maniera molto più semplice; ma quella che abbiamo usata ha il vantaggio di far conoscere più chiaramente la necessità della condizione, perchè si possa eseguire l'integrazione della proposta.

Se l'equazione di condizione non è identica, la proposta non potrà avere una equazione primitiva, la quale contenga una costante arbitraria. Poichè se non si può ridurre l'equazione

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial y} - \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

a non contenere altre variabili che y e $\psi . y$, non si potrà in generale integrarla. Contuttociò vi sono alcuni casi, nei quali un valore conveniente della funzione $\psi . y$ può soddisfargli, in quanto renda nulli separatamente i termini che contengono la variabile x e quei che non la contengono. In questi casi, poichè esiste un valore di $\psi . y$, il quale soddisfà all'equazione

$$o = \frac{\partial\psi}{\partial y} - \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right).$$

indipendentemente da x, l'equazione derivata da questa per rapporto ad x sarà soddisfatta dal medesimo valore di $\psi . y$. Ma questa equazione derivata non è che la condizione d'integrabilità; dunque la condizione deve dare il valore di $\psi . y$ dopo la sostituzione di quello di z, o sia prima della sostituzione deve avere per fattore l'equazione $N - \psi . y = o$. Intendo generalmente per fattore di una equazione ogni funzione eguale a zero che la rende identica.

La proposta adunque, sebbene priva di equazione primitiva completa, può avere altre soluzioni meno generali comprese nell'integrale completo $N = \psi y$, e queste, allorchè hanno luogo, devono esser sempre indicate dalla condizione d'integrabilità. Ma l'integrale $N = \psi . y$ non dà tutte l'equazioni primitive, che possono soddisfare all'equazione $o = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A$: per conoscerle tutte bisogna aggiungervi quelle che non sono comprese nel medesimo integrale completo, cioè le soluzioni particolari. Trovate con le note regole le soluzioni particolari dell'equazione $o = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A$, quelle tra esse, che soddisfanno all'equazione $o = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + B$, daranno altre equazioni primitive della proposta. È evidente che il discorso fatto relativamente all'equazione $o = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A$ può applicarsi egualmente all'equazione $o = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + B$, di cui le soluzioni particolari daranno nuove soluzioni della proposta, purchè soddisfacciano all'altra equazione $o = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A$.

16. Se fosse proposta l'equazione

$$0 = \frac{\partial z^2}{\partial x^2} + A\,\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + B - 2C\,\frac{\partial y}{\partial x} - 2D\,\frac{\partial z}{\partial x} - 2E\,\frac{\partial y}{\partial x}\,.\,\frac{\partial z}{\partial z}$$

ove i coefficienti A, B, ec. sono funzioni date di x, y e z, ponendo in luogo di $\frac{\partial z}{\partial x}$ il suo valore $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) . \frac{\partial y}{\partial x}$, ed ordinando i termini per le potenze di $\frac{\partial y}{\partial x}$ avremmo

$$\begin{aligned} 0 = {} & \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + B - 2D\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\ & + 2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - C - D\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - E\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] . \frac{\partial y}{\partial x} \\ & + \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + A - 2E\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] . \frac{\partial y^2}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Dunque se esiste una equazione primitiva, che soddisfaccia alla proposta, le tre equazioni

$$(1)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2D\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + B$$

$$(2)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2E\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + A$$

$$(3)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - D\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - E\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - C$$

dovranno aver luogo nel medesimo tempo. Eliminandone $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ e $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ avremo l'equazione di condizione

$$0 = BE^2 - AB + C^2 + 2CDE + AD^2,$$

la quale posta sotto la forma

$$(D^2 - B)(E^2 - A) = (DE + C)^2$$

ci avverte che, quando essa ha luogo, la proposta è risolubile in fattori del primo grado.

Se l'equazione di condizione non è identica, è evidente che la proposta non può avere altre soluzioni, che quelle, le quali sono fattori della medesima condizione, perchè qualunque altra relazione non può insieme soddisfare alle tre equazioni (1), (2), e (3). Se è identica, basta soddisfare alle due equazioni (1) e (2), le quali risolute diventano

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \mathrm{D} \pm \sqrt{(\mathrm{D}^2 - \mathrm{B})}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \mathrm{E} \pm \sqrt{(\mathrm{E}^2 - \mathrm{A})} = \mathrm{E} \pm \frac{\mathrm{DE} + \mathrm{C}}{\sqrt{(\mathrm{D}^2 - \mathrm{B})}},$$

e la questione rientra in quella del numero precedente.

Prendiamo per esempio l'equazione

$$0 = \frac{\partial z^2}{\partial x^2} - az^{2m} \cdot \frac{\partial y^2}{\partial x^2} - bz^{2n} - 2cz^{m+n} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

ove a, b, c sono quantità costanti, m ed n numeri positivi. È chiaro che ad essa soddisfà $z = 0$; vediamo come nei differenti casi si troverebbe questa soluzione, se non fosse stata avvertita. L'equazione di condizione diventa $(c^2 - ab)z^{2m+2n} = 0$, e non è identica se c^2 non è $= ab$, ma il fattore z^{2m+2n} ci avverte allora della soluzione $z = 0$. Se $c^2 = ab$, bisogna considerare le due equazioni $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \mp z^m \sqrt{a} = 0$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \mp z^n \sqrt{b} = 0$. La condizione necessaria, perchè esse somministrino una equazione primitiva completa, diventa $\sqrt{ab} \cdot (m - n) z^{m+n-1} = 0$. Questa non è identica se il numero m è diverso da n, ma il fattore z^{m+n-1} annunzia la soluzione $z = 0$, purchè sia $m + n > 1$. Se $m = n$, la proposta ha l'integrale completo $\frac{1}{(m-1)z^{m-1}} \pm x\sqrt{a} \pm y\sqrt{b} = \text{cost.}$, il quale posta la costante infinita ci dà la soluzione $z = 0$ quando $m > 1$: se poi $m < 1$ la soluzione $z = 0$ non è compresa nell'integrale completo, ma si trova cercando le soluzioni particolari dell'equazione $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \pm z^m \sqrt{a}$, o dell'equazione $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \pm z^m \sqrt{b}$. Finalmente allorchè m è diversa da n, ed $m + n < 1$, l'equazione $z = 0$ è soluzione particolare di ambedue l'equazioni $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \pm z^m \sqrt{a}$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \pm z^n \sqrt{b}$.

17. Pas-

17. Passiamo all'equazioni tra quattro variabili

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + A + B\,\frac{\partial y}{\partial x} + C\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

ove A, B, C sono funzioni date di x, y, u e z. Sostituendovi il valore di $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) . \frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) . \frac{\partial u}{\partial x}$ essa si cangia in

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A + \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + B\right] . \frac{\partial y}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + C\right] . \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Dunque se la proposta ha una equazione primitiva in x, y, u e z, questa equazione primitiva deve soddisfare alle tre equazioni

$$(1)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A$$

$$(2)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + B$$

$$(3)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + C.$$

Sia $N = \psi(y, u)$ l'integrale completo della prima; avremo

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)$$

e sostituendo nell'equazioni (2) e (3) i valori di $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ e $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ dati dalle precedenti otterremo

$$(2')\quad 0 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$(3')\quad 0 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial N}{\partial u}\right) + C\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right).$$

Perchè queste due equazioni ci diano il valore di $\psi(y, u)$ con una costante arbitraria, cioè perchè la proposta abbia una primitiva completa, bisogna che la sostituzione del valore di

z dedotto dalla equazione $N=\psi(y, u)$ faccia da esse sparire anche la x. Dovrà dunque in primo luogo essere

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)-B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)=F(N, y, u);$$

e poichè $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=0$ a motivo della equazione identica $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)-A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)=0$, sarà nulla la differenziale della funzione $\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)-B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$ presa relativamente ad x, cioè

$$0=\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial z}\right)-B\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)+AB\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)-\left[\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)-A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)\right]\cdot\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right).$$

Ma l'equazione identica $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)-A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)=0$ ci dà

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial z}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$
$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right);$$

dunque sostituendo questi valori nella equazione precedente, giungeremo all'equazione di condizione

$$\text{(a)}\quad 0=\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)+A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)-B\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$$

la quale dovrà essere identica, perchè la proposta ammetta una primitiva completa.

Nel caso, in cui la condizione trovata è identica, sia $f(y, u, \psi)=\varphi\,.\,u$ l'integrale completo della equazione (2'). Ponendovi N in luogo di ψ, e facendo $f(y, u, N)=P$ per più semplicità, $P=\varphi\,.\,u$ soddisfarà nel modo il più generale alle due equazioni (1) e (2); onde avremo

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)-A\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)=0$$
$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)-B\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)=0$$
$$\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

e l'equazione (3) diventerà

$$(3'') \quad 0 = \frac{\partial \phi}{\partial u} - \left(\frac{\partial P}{\partial u}\right) + C\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right),$$

dalla quale convien dedurre il valore della funzione $\phi . u$. Ma affinchè questo contenga una costante arbitraria, è necessario che dopo la sostituzione del valore di z ricavato da $P = \phi . u$ l'equazione (3″) non contenga altre variabili che u e $\phi . u$, e ciò non può accadere che quando $\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right) - C\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = F'(P, u)$. Ora poichè $\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right) = 0$ e $\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right) = 0$ a motivo dell'equazioni identiche $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - A\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - B\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0$, avremo in questo caso

$$0 = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial u}\right) - A\left(\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial z}\right) - C\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}\right) + AC\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) - \left[\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right) - A\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right)\right]\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

$$0 = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial u}\right) - B\left(\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial z}\right) - C\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}\right) + BC\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) - \left[\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right) - B\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right)\right]\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right).$$

Le medesime equazioni identiche ci danno

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial u}\right) - A\left(\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial z}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}\right) - A\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial u}\right) - B\left(\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial z}\right) = \left(\frac{\partial B}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}\right) - B\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) = \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right);$$

dunque combinando quest' equazioni con le due precedenti troveremo altre due condizioni

$$(b) \quad 0 = \left(\frac{\partial A}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right) + A\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right) - C\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$$

$$(c) \quad 0 = \left(\frac{\partial B}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right) - C\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right).$$

Le tre condizioni trovate devono essere identiche, perchè una medesima equazione primitiva contenente una costante indeterminata soddisfaccia insieme alle tre equazioni (1), (2) e (3), e per conseguenza alla proposta, e la ricerca di tale equazione primitiva dipenderà, come abbiamo veduto, dalla integrazione di equazioni tra due sole variabili.

Ma quantunque la proposta non ammetta una primitiva completa, potrà però esser soddisfatta da altre relazioni meno generali. Supponghiamo che le condizioni (b) e (c) o una di esse non siano identiche. Nella equazione (3″) dopo l'eliminazione di z rimarrà tuttavia quella tra le variabili x o y, che corrisponde alla condizione non identica. Quindi l'equazione (3″) non ci darà il valore di $\varphi.u$ con una costante arbitraria, ma alcune volte potrà soddisfarvi un valore meno generale di $\varphi.u$ indipendentemente da x o da y. In questo caso il medesimo valore di $\varphi.u$ soddisfarà ancora alla derivata della equazione (3″) presa relativamente ad x o ad y. Ma una tal derivata è la stessa che la condizione non identica; dunque la condizione non identica ci darà il valore particolare di $\varphi.u$ dopo l'eliminazione di z, e prima della eliminazione avrà per fattore l'equazione $P-\varphi.u=0$.

In questo medesimo caso si deduca dalla soluzione particolare $P-\varphi.u=0$ il valore corrispondente di $\psi(y,u)$; esso soddisfarà all'equazione (2′) quando la condizione (a) è identica, perchè è compreso nell'integrale completo della medesima equazione (2′). Ma se la condizione (a) non è identica, la x rimarrà nella equazione (2′) dopo l'eliminazione di z, ed il valore trovato di $\psi(y,u)$ non potrà verificarla che indipendentemente da x. Dunque in vigore del solito ragionamento la soluzione particolare $N-\psi(y,u)=0$ equivalente a $P-\varphi.u=0$ sarà fattore della condizione (a).

Dalle precedenti riflessioni si può concludere in generale, che tali relazioni singolari soddisfacienti alla proposta mancante della primitiva completa saranno sempre comprese in tutte le condizioni non identiche, ed al loro ritrovamento basterà la discussione dei fattori comuni alle condizioni non identiche, i quali soddisfanno alle tre equazioni (1), (2), e (3).

Le soluzioni della proposta, che abbiamo fin qui considerate, sono tutte comprese nell'integrale completo dell'equazione (1). Ma questa può esser soddisfatta indipendentemente dall'integrale completo anche per mezzo delle sue soluzioni particolari. E poichè i medesimi ragionamenti si applicano egualmente alle altr'equazioni (2) e (3), ne segue che per render completa la ricerca di tutte l'equazioni primitive della proposta bisogna aver riguardo anche alle soluzioni particolari di ciascuna dell'equazioni (1), (2) e (3), ed ammetter quelle che soddisfanno alle altre due. È facile il vedere che il metodo stesso si applicherà con un andamento sempre uniforme all'equazioni differenziali del prim'ordine tra un numero qualunque di variabili, qualora siano lineari per rapporto alle funzioni derivate.

18. Consideriamo adesso l'equazione

$$0 = \frac{\partial z^2}{\partial x^2} + A\,\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + B\,\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + C - 2D\,\frac{\partial y}{\partial x} - 2E\,\frac{\partial u}{\partial x} - 2F\,\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$- 2G\,\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - 2H\,\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - 2I\,\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$

ove i coefficienti A, B, ec. sono funzioni date di x, y, u, e z. Mettendovi in luogo di $\frac{\partial z}{\partial x}$ il suo valore $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$, ordinando i termini per le potenze ed i prodotti di $\frac{\partial y}{\partial x}$ e di $\frac{\partial u}{\partial x}$, ed eguagliando a zero il coefficiente di ciascun prodotto avremo le sei equazioni seguenti

$$(1)\quad 0 = \left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2 - 2F\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right) + C$$

$$(2)\quad 0 = \left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2 - 2H\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right) + A$$

$$(3)\quad 0 = \left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)^2 - 2I\left(\frac{\delta z}{\delta u}\right) + B$$

$$(4)\quad 0 = \left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)\cdot\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right) - F\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right) - H\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right) - D$$

$$(5)\quad 0=\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right).\left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)-F\left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)-I\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)-E$$

$$(6)\quad 0=\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right).\left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)-H\left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)-I\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)-G.$$

Eliminandone $\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$, $\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)$, $\left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)$ giungeremo alle tre equazioni di condizione

$$0=CH^2-AC+D^2+2DFH+AF^2$$
$$0=CI^2-BC+E^2+2EFI+BF^2$$
$$0=AI^2-AB+G^2+2GHI+BH^2.$$

Quest' equazioni sono quelle stesse, che devono aver luogo, perchè la proposta sia risolubile in fattori del primo grado. Se esse non sono identiche, la proposta non potrà avere altre soluzioni, che quelle, le quali sono fattori comuni alle medesime condizioni.

Se sono identiche, la ricerca dell' equazione primitiva della proposta dipende da quella della primitiva, che soddisfà all' equazioni (1), (2), (3), perchè le tre condizioni tengon luogo dell' equazioni (4), (5), e (6). L' equazioni (1), (2), e (3) risolute diventano

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)=F+\sqrt{(F^2-C)}$$
$$\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)=H+\sqrt{(H^2-A)}$$
$$\left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)=I+\sqrt{(I^2-B)}$$

e tutto si riduce al caso contemplato nell' articolo precedente.

19. Passiamo all' equazione del second' ordine

$$0=\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}+A\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}+B\frac{\delta z}{\delta x}+C\frac{\delta y}{\delta x}+D$$

lineare per rapporto alle funzioni derivate, ove i coefficienti A, B, ec. sono funzioni date di x, y e z. Ponendovi $\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)+\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right).\frac{\delta y}{\delta x}$ in luogo di $\frac{\delta z}{\delta x}$, e $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\right)+2\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}\right).\frac{\delta y}{\delta x}+\left(\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right).\frac{\delta y^2}{\delta x^2}+\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right).\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ in luogo di $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$ essa diventerà

$$0=\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\right)+B\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)+D+\left[2\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}\right)+B\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)+C\right]\cdot\frac{\delta y}{\delta x}$$
$$+\left(\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right)\cdot\frac{\delta y^2}{\delta x^2}+\left[\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)+A\right]\cdot\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}.$$

Eguagliando a zero i coefficienti delle funzioni $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{\delta y^2}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ avremo quattro equazioni

$$(1)\quad 0=\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\right)+B\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)+D$$

$$(2)\quad 0=2\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}\right)+B\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)+C$$

$$(3)\quad 0=\left(\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right)$$

$$(4)\quad 0=\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)+A.$$

Siccome due equazioni bastano per giungere all'equazione primitiva della proposta, avremo due equazioni di condizione, che troveremo col mezzo dell'eliminazione nel modo seguente. Prendiamo nell'equazione (4) le funzioni derivate relativamente ad y, ed avremo $0=\left(\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right)+\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right)+\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)$ $=\left(\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right)+\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right)-A\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)$, e sostituendo il valore di $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right)$ nella (3) troveremo la prima condizione

$$(a)\quad 0=\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right)-A\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right).$$

Prendendo nella medesima equazione (4) le funzioni derivate relativamente ad x avremo $0=\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}\right)+\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right)+\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$, e sostituendo i valori di $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}\right)$ e $\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)$ nella (2) otterremo

$$(2')\quad 0=2\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)+2\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right)+AB-C.$$

E poichè questa equazione dev' esser d' accordo con l'equazione (1), se sostituiamo nella seconda il valore di $\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$ preso dalla prima, avremo un'altra equazione di condizione. Facendo per più semplicità $\frac{C - AB - 2\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right)}{2\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)} = P$, questa equazione di condizione sarà

$$(b) \quad 0 = \left(\frac{\delta P}{\delta x}\right) + P\left(\frac{\delta P}{\delta z}\right) + BP + D.$$

Se le due condizioni (a) e (b) non sono ambedue identiche, bisognerà cercarne i fattori, e quei tra loro che soddisfanno all'equazioni (1) e (4) ci daranno altrettante soluzioni della proposta, e le sole che possa ammettere, se si prescinde da quelle, le quali sono soluzioni particolari dell'equazioni (4) e (2'). Per comprendere la ragione di questa distinzione basta riflettere, che siamo giunti alle condizioni (a) e (b) prendendo le funzioni derivate dall'equazioni (4) e (2'). Ora sappiamo che ogni integrale particolare di queste soddisfà a tutte le loro equazioni derivate, ma non è lo stesso delle soluzioni particolari, le quali in generale non soddisfanno alle loro equazioni derivate del second'ordine. Quindi ogni integrale particolare dell'equazioni (4) e (2'), che soddisfà all'equazioni (1), (2) e (3), dovrà ancora soddisfare alle condizioni (a) e (b). Ma una soluzione particolare di una delle due equazioni (4) e (2'), quantunque soddisfaccia all'equazioni (1), (2) e (3), potrà non verificare le condizioni (a) e (b). Per darne un esempio supponghiamo che A sia $= y\sqrt{z}$, che B non diventi infinita quando $z = 0$, e C e D siano nulle nel medesimo caso: l'equazione (4) avrà la soluzione particolare $z = 0$, ed è evidente che $z = 0$ soddisfà alle tre equazioni (1), (2) e (3), e per conseguenza alla proposta, ma non verifica la condizione (a). Pertanto dopo di avere esaminati i fattori di quelle tra le condizioni (a) e (b) che non sono identiche fa d'uopo tentare ancora le soluzioni particolari dell'equazioni (4) e (2'), la ricerca delle quali soluzioni particolari non presenta alcuna difficoltà.

Allorchè le condizioni (a) e (b) sono identiche, si cercherà

cherà l'equazione primitiva della (4), e siccome x vi è riguardata come costante, l'equazione primitiva, di cui si tratta, conterrà una funzione arbitraria di x che chiameremo $\psi . x$. Sostituendo il valore, che ci dà la predetta primitiva, nella (2') ne dedurremo il valore di $\psi . x$, il qual essendo determinato da una equazione differenziale del prim'ordine non potrà contenere che una costante arbitraria. Se adunque la proposta ammette una primitiva completa, si dovrà determinare il valore di $\psi . x$ dalla equazione (1), che essendo differenziale del second'ordine potrà darcelo con due costanti indeterminate. Ma questo valore di $\psi . x$ non potendo nella sua generalità soddisfare all'equazione (2'), la quale deve pure aver luogo, bisognerà che in questo caso l'equazione (2') sussista indipendentemente dal valore di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$. Avremo dunque le nuove condizioni

$$(c)\quad 0=\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right),\qquad (d)\quad 0=C-AB-2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right).$$

La seconda determina il coefficiente C, la prima paragonata con la condizione (a) ci dà $0=\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)$, e per conseguenza ci avverte che A non deve contenere nè y nè z, ma esser semplicemente funzione di x.

20. Ciò posto l'equazione primitiva della (4) sarà

$$z+Ay=\psi . x .$$

Se ne deduce $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial \psi}{\partial x}-y\,\frac{\partial A}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}-y\,\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$, e dopo la sostituzione di questi valori l'equazione (1) diventa

$$(1')\quad 0=\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+B\,\frac{\partial \psi}{\partial x}+D-y\left(B\,\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right).$$

Acciò questa equazione possa essere completamente integrata, bisogna che la sostituzione di $\psi . x - Ay$ in luogo di z ne faccia sparire la y, in modo che non vi rimangano altre variabili che x e $\psi . x$. È dunque necessario che sia in tal caso

$$\mathrm{B} = \mathrm{F}(x, z + \mathrm{A}y)$$

$$\mathrm{D} - y\left(\mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial x^2}\right) = f(x, z + \mathrm{A}y).$$

Potremo esprimere queste condizioni nel modo ordinario per mezzo delle differenze parziali dei coefficienti; poichè le funzioni derivate dai loro secondi membri relativamente ad y dovendo svanire a motivo dell'equazione (4), dovranno ancora esser nulle le medesime funzioni derivate dai primi membri, e quindi

$$(\mathrm{e}) \quad 0 = \left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}\right) - \mathrm{A}\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}\right)$$

$$(\mathrm{f}) \quad 0 = \left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial y}\right) - \mathrm{A}\left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial z}\right) - \mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial x^2}.$$

Bisogna che quest'equazioni siano ambedue identiche, perchè la proposta possa avere una equazione primitiva completa.

21. Se la sostituzione di $\psi \,.\, x - \mathrm{A}y$ in luogo di z nell'equazione (1') non ne fa sparire la variabile y, cioè se le condizioni (e) ed (f) non sono identiche, può accadere che divisa l'equazione (1') in due parti, una delle quali contenga ψ ed x, e l'altra ψ, x ed y, un medesimo valor di ψ renda nulla l'una e l'altra parte: ma questo valore e per conseguenza l'equazione primitiva della proposta, che se ne ricava, non potrà avere che una costante arbitraria. In questo caso poichè l'equazione (1') è soddisfatta qualunque sia y, se ne prendiamo le funzioni derivate per rapporto ad y avremo

$$(1'') \quad 0 = \left[\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}\right) - \mathrm{A}\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}\right)\right] . \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial y}\right) - \mathrm{A}\left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial z}\right) - \mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial x^2}$$
$$- y\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}\right) - \mathrm{A}\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}\right)\right]$$

e questa equazione (1'') dovrà sussistere nel medesimo tempo che l'altra (1'). Ma affinchè il valore di ψ contenga una costante arbitraria, conviene che dopo la sostituzione del valore di z l'equazione (1'') non comprenda altre variabili che x e ψ. Dunque dovrà essere

$$\frac{\left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial y}\right) - \mathrm{A}\left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial z}\right) - \mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial x^2} - y\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}\right) - \mathrm{A}\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}\right)\right]}{\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}\right) - \mathrm{A}\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}\right)} = \mathrm{F}'(x, z + \mathrm{A}y)$$

oppure sotto un'altra forma chiamando M il numeratore ed N il denominatore della frazione precedente

$$(g)\quad 0=N\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)-AN\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)-M\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)+AM\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right).$$

22. Se la funzione $\frac{M}{N}$ dopo la sostituzione del valore di z contiene tuttavia y, cioè se l'equazione (g) non è identica, succede alcune volte che si possa soddisfare all'equazione $\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{M}{N}=0$ con un valore di ψ, il quale renda nulli separatamente i termini che contengono y, e quei che non la contengono. In questo caso l'equazione che si ottiene col prender le funzioni derivate dall'equazione $\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{M}{N}=0$ relativamente ad y, cioè l'equazione (g) deve aver luogo. Se il valore di ψ, che ci dà, soddisfà ancora all'equazione (1'); ci somministrerà una soluzione della proposta ma molto particolare, perchè non conterrà alcuna costante arbitraria. È evidente che questa soluzione sarà fattore della condizione (g).

Per illustrare con esempj questi differenti casi consideriamo in primo luogo l'equazione

$$0=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+3x\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{z+x^2y}{x^2}.$$

Le condizioni (a), (c), (d), (e), (f) sono tutte identiche; dunque la proposta ha l'equazione primitiva completa $z+x^2y=\psi.x$, e $\psi.x$ è determinata dall'equazione

$$0=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{1}{x^2}\psi,$$

la quale ci dà $\psi=x(c+c'\log.x)$, c e c' essendo due costanti indeterminate; e quindi $z+x^2y=x(c+c'\log.x)$.

Sia data in secondo luogo l'equazione

$$0=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(y^3-2)\frac{\partial z}{\partial x}+x(xy^3-2x+4)\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+(2x-3x^2)y^4-3y^3z+(2-4x-3x^2)y-3z.$$

L'equazioni (a), (c) e (d) sono identiche, ma le (e) ed (f) non lo sono; dunque la proposta non ha una equazione primitiva completa. Ma poichè la condizione (g) è identica, la proposta può avere una soluzione, che contenga una costante indeterminata. Per trovarla qualora esista, esaminiamo l'equazioni

$$(1') \quad 0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (y^3 - 2)\frac{\partial \psi}{\partial x} - 3(x^2y^4 + 2y^3 + x^2y + z)$$

$$(1'') \quad 0 = 3y^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} - 9y^2(z + x^2y),$$

ove la seconda è la differenziale della prima relativamente ad y. Sostituito il valore di z l'equazione (1'') ci dà $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 3\psi$, onde si deduce $\psi = ce^{3x}$, e rappresentando il numero che ha per logaritmo iperbolico l'unità e c una costante indeterminata. E siccome questo valore di ψ soddisfà all'equazione (1'), ne segue che la proposta ha l'equazione primitiva $z + x^2y = ce^{3x}$.

Sia proposta finalmente l'equazione

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{y^2 - 2}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x(y^3 + 2)\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{2z}{x^2} - 2y^3$$
$$+ (z - x^2 + 2)y^4 + x^2y^5.$$

Le condizioni (a), (c) e (d) sono identiche, ma le condizioni (e), (f) e (g) non lo sono; dunque la proposta non ha equazione primitiva, che contenga due costanti indeterminate, o una solamente. Restano a considerarsi l'equazioni (1') e (g), che in questo caso sono

$$(1') \quad 0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{y^3 - 2}{x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{2z}{x^2} + 2y - 2y^3 + (z - x^2)y^4 + x^2y^5;$$

$$(g) \quad 0 = \frac{12y^4}{x}(z + x^2y - x^2).$$

La seconda ci dà $\psi = x^2$, e siccome questo valore soddisfà anche alla prima, la proposta ha la soluzione $z + x^2y = x^2$.

23. Ritornando all'equazione generale supponghiamo che le condizioni (a) e (b) essendo identiche le condizioni (c) e (d) non siano tali, in modo che l'equazione (2') non sia soddisfatta indipendentemente dal valore di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$: in questo caso

la proposta non avrà una equazione primitiva completa, ma potrà avere altre soluzioni meno generali, che si troveranno nel modo seguente. A motivo della condizione (a) la funzione $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+A$ essendo moltiplicata per $\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$ diventa una funzione derivata esatta, perchè $\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+A\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ $+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)$ è la funzione derivata da A relativamente ad y: pertanto $A=\psi\,.\,x$ è l'equazione primitiva completa dell'equazione (4). Se ne deduce $\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)=\frac{\partial \psi}{\partial x}$, e sostituito il valore di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ l'equazione (2') diventa

$$(2'') \quad 0=2\,\frac{\partial \psi}{\partial x}+AB-C\,.$$

Ora acciò questa ci dia il valore di ψ con una costante arbitraria, bisogna che la sostituzione del valore di z ricavato dall'equazione $A=\psi\,.\,x$ faccia sparire y dalla quantità $AB-C$, in modo che questa quantità si riduca a non esser funzione che di x e ψ. È dunque necessario che sia $AB-C=f(x, A)$, e quindi prendendo le funzioni derivate relativamente ad y giungeremo all'equazione identica

$$(h) \quad 0=A\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)-A^2\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)+A\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

24. Quantunque la sostituzione del valore di z non faccia sparire y dalla quantità $AB-C$, può accadere però che si soddisfaccia all'equazione (2'') con un valore conveniente di ψ, in quanto renda nulli separatamente i termini indipendenti da y, e quei che contengono questa variabile. In tal caso l'equazione (2'') avendo luogo qualunque sia y, l'equazione che se ne forma con prender le funzioni derivate relativamente ad y, cioè l'equazione (h), dovrà egualmente sussistere. Pertanto la soluzione ci sarà data da quel fattore della condizione (h), il quale soddisfà all'equazione (2'').

Nel percorrere questi differenti casi non abbiamo ancora ottenute tutte le soluzioni, che può aver la proposta. Restano a considerarsi quelle, che sono soluzioni particolari dell' equazione (4) ed insieme soddisfanno alle altre tre equazioni, oppure sono soluzioni particolari dell'equazioni (1), o (2') e nel medesimo tempo verificano le altr'equazioni (1), (2), (3) e (4). Ma la ricerca di queste soluzioni particolari non presenta alcuna difficoltà, e dipende dai metodi conosciuti, perchè l'equazioni (1), (2') e (4) sono equazioni derivate tra due sole variabili.

Segue dall'analisi precedente che, quando alla proposta corrisponde una equazione primitiva completa, si trovano facilmente l' equazioni primitive singolari, poichè tutto si riduce a cercare le soluzioni particolari dell'equazioni (1) e (4): ma allorchè la proposta non ha una primitiva completa, conviene esaminar molti casi per trovare l'equazioni primitive singolari, che essa può avere. Questa differenza ha luogo in generale, ma la stessa analisi, come negli esempj precedenti, ci somministrerà sempre con un andamento uniforme le condizioni d'integrabilità, che converrà discutere in ciascun caso, senza che siamo obbligati di cercarle altrove.

25. Il medesimo metodo applicato all'equazioni lineari del second'ordine tra un numero qualunque di variabili non ci presenterà alcuna nuova difficoltà. Consideriamo l'equazione tra quattro variabili

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + E\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\,\frac{\partial z}{\partial x} + C\,\frac{\partial y}{\partial x} + F\,\frac{\partial u}{\partial x} + D\,.$$

Sostituendovi il valore di $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ che in questo caso è $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial u}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \cdot \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial u}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right) \cdot \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e quello di $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$, ordinando i termini per le potenze ed i prodotti di $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ed eguagliando a zero il coefficiente di ciascun prodotto troveremo l'equazioni

$$(1)\quad 0=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+B\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+D$$

$$(2)\quad 0=2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)+B\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+C$$

$$(3)\quad 0=2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial u}\right)+B\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+F$$

$$(4)\quad 0=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$(5)\quad 0=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial u}\right)$$

$$(6)\quad 0=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)$$

$$(7)\quad 0=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+A$$

$$(8)\quad 0=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+E$$

le quali tutte devono insieme sussistere.

Se dall' equazioni (7) e (8) prendiamo i valori di $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)$, e li sostituiamo nelle (4), (5) e (6) avremo l'equazioni di condizione

$$(a)\quad 0=\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\qquad (b)\quad 0=\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)-E\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$$

$$(c)\quad 0=\left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)\qquad (d)\quad 0=\left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)-E\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right).$$

Di queste la terza è compresa nelle due prime: infatti l'equazioni identiche (a) e (b) ci danno

$$0=\left(\frac{\delta^2 A}{\delta y\delta u}\right)-A\left(\frac{\delta^2 A}{\delta u\delta z}\right)-\left(\frac{\delta A}{\delta u}\right)\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)$$

$$0=\left(\frac{\delta^2 A}{\delta y\delta z}\right)-A\left(\frac{\delta^2 A}{\delta z^2}\right)-\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)^2$$

$$0=\left(\frac{\delta^2 A}{\delta y\delta u}\right)-E\left(\frac{\delta^2 A}{\delta y\delta z}\right)-\left(\frac{\delta E}{\delta y}\right)\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)$$

$$0=\left(\frac{\delta^2 A}{\delta u\delta z}\right)-E\left(\frac{\delta^2 A}{\delta z^2}\right)-\left(\frac{\delta E}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)$$

ed eliminate da queste le funzioni derivate seconde

$$0=\left(\frac{\delta A}{\delta u}\right)-E\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)-\left(\frac{\delta E}{\delta y}\right)+A\left(\frac{\delta E}{\delta z}\right);$$

pertanto la condizione (c) è una conseguenza delle condizioni (a) e (b).

Prendiamo adesso i valori di $\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)$, $\left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)$, $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}\right)$, $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta u}\right)$ dalle medesime equazioni (7) e (8), e sostituiamoli nelle (2) e (3); queste si cangeranno nelle seguenti

$$(2') \quad 0=2\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)+2\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right)+AB-C$$

$$(3') \quad 0=2\left(\frac{\delta E}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)+2\left(\frac{\delta E}{\delta x}\right)+BE-F.$$

E poichè quest'equazioni devono esser d'accordo tra loro e con l'equazione (1), eliminandone $\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$ otterremo due nuove condizioni

$$(e) \quad 0=P\left(\frac{\delta E}{\delta z}\right)+2\left(\frac{\delta E}{\delta x}\right)+BE-F$$

$$(f) \quad 0=\left(\frac{\delta P}{\delta x}\right)+P\left(\frac{\delta P}{\delta z}\right)+BP+D,$$

ove $P=\dfrac{C-AB-2\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right)}{2\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)}$.

26. Supponghiamo in primo luogo che la proposta abbia una equazione primitiva completa. Con un ragionamento simile a quello del n.° 19 si dimostrerà, che in questo caso l'equazioni (2') e (3') devono aver luogo indipendentemente dal valore di $\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$, e per conseguenza è necessario che sia

$$0=\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right),\ 0=\left(\frac{\delta E}{\delta z}\right),\ 0=C-AB-2\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right),\ 0=F-BE-2\left(\frac{\delta E}{\delta x}\right).$$

Le due ultime condizioni determinano li coefficienti C ed F, le due prime paragonate con le precedenti (a), (b), (c), (d) ci avvertono che A ed E sono semplici funzioni di x. Ciò posto l'equazione (7) integrata ci dà $z + Ay = \varphi(x, u)$, e sostituito il valore di z la (8) diventa $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + E = 0$, onde si deduce $\varphi + Eu = \psi . x$; pertanto l'equazione

$$z + Ay + Eu = \psi . x$$

soddisfà nel modo il più generale all'equazioni (7) e (8). Se ne ricava $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial A}{\partial x} - u \frac{\partial E}{\partial x}$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - u \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$, e sostituiti questi valori la (1) si cangia in

$$(1') \quad 0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + B \frac{\partial \psi}{\partial x} + D - y \left(B \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) - u \Big(B \frac{\partial E}{\partial x} + \Big(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \Big) .$$

Affinchè questa possa avere una equazione primitiva con due costanti indeterminate, è necessario che la sostituzione di $\psi . x - Ay - Eu$ in luogo di z ne faccia sparire le variabili y ed u. Bisognerà dunque che sia

$$B = F(x, z + Ay + Eu)$$

$$D - y \left(B \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) - u \left(B \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right) = f(x, z + Ay + Eu).$$

E poichè le funzioni derivate dai secondi membri relativamente ad y ed u svaniscono a motivo dell'equazioni (7) e (8), le medesime condizioni si potranno esprimere nel modo seguente

$$0 = \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) - A \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)$$

$$0 = \left(\frac{\partial B}{\partial u}\right) - E \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)$$

$$0 = \left(\frac{\partial D}{\partial y}\right) - A \left(\frac{\partial D}{\partial z}\right) - B \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

$$0 = \left(\frac{\partial D}{\partial u}\right) - E \left(\frac{\partial D}{\partial z}\right) - B \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} .$$

Quando queste condizioni sono identiche, l'equazione (1') sarà integrabile completamente, ed il valore di $\psi . x$, che ci darà, posto nell'equazione $z+Ay+Eu=\psi.x$ fornirà l'equazione primitiva completa della proposta.

Ma se la sostituzione del valore di z non fa sparire le variabili y ed u dall'equazione (1'), può avvenire che si soddisfaccia alla medesima con un valore meno generale di $\psi.x$, il quale renda nulli separatamente i termini indipendenti da y e da u, e quei che contengono y ed u. In questi casi l'equazioni, che si formeranno con prendere dall'equazione (1) le funzioni derivate prime o seconde relativamente ad y o ad u, dovranno aver luogo nel medesimo tempo che l'equazione (1'); e col loro mezzo si troverà l'equazione primitiva con una sola costante indeterminata o senza costante, che soddisfà alla proposta nel modo stesso praticato per l'equazione tra tre variabili (num.^{i} 21 e 22).

27. Ponghiamo adesso che, le condizioni (a), (b), (c), (d), (e) ed (f) avendo luogo, le due equazioni (2'), (3'), o una di esse non siano soddisfatte indipendentemente dal valore di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$. Moltiplicando l'equazione (7) per $\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$ abbiamo $0=\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+A\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial A}{\partial y}$ a motivo della condizione (a), e quindi $A=\varphi(x,u)$. Se ne deduce $\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)$, e l'equazione (8) diventa $0=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)+E\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$ cioè $0=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)$ a motivo della condizione (b); perciò $\varphi(x,u)=\psi.x$. Pertanto $A=\psi.x$ è l'equazione primitiva la più generale, che soddisfaccia all'equazioni (7) e (8). Se ne prendiamo il valore di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, e lo sostituiamo nella (2'), essa diventerà

$$(2'')\quad 0=2\frac{\partial \psi}{\partial x}+AB-C,$$

e sopra questa faremo ragionamenti analoghi a quelli dell'articolo 23; avendo riguardo alla nuova variabile u.

28. Proponghiamoci adesso di trovare l'equazioni primitive di una equazione differenziale del second'ordine, in cui le funzioni derivate non siano lineari, considerando la seguente

$$0=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+B\frac{\partial z^2}{\partial x^2}+C\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+D\frac{\partial y^2}{\partial x^2}+E\frac{\partial z}{\partial x}+F\frac{\partial y}{\partial x}+G$$

ove i coefficienti A, B, ec. sono funzioni date di x, y e z.

Sostituendo in luogo di $\frac{\partial z}{\partial x}$ e di $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ i loro valori, ed eguagliando a zero i coefficienti di $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ avremo le quattro equazioni

$$(1)\quad 0=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+B\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+E\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+G$$

$$(2)\quad 0=2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)+2B\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)+E\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+F$$

$$(3)\quad 0=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+B\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+D$$

$$(4)\quad 0=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+A$$

ciascuna delle quali deve sussistere.

L' ultima differenziata relativamente ad y ci dà $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=-\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)+A\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$, e sostituendo questo valore come pure quello di $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ nella (3) avremo l'equazione di condizione

$$(a)\quad 0=\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)-A^2B+AC-D.$$

Dalla medesima equazione (4) differenziata relativamente ad x si deduce $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, e l'equazione (2) dopo la sostituzione dei valori di $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)$ e $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ diventa

$$(2')\quad 0=\left[2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)+2AB-C\right]\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)+AE-F\,.$$

E poichè questa equazione dev' esser d' accordo con l' equazione (1), se eliminiamo da esse $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ e $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, avremo una nuova equazione di condizione. Facendo per più semplicità $\frac{F-AE-2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)}{2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)+2AB-C}=P$, questa equazione di condizione sarà

$$(b)\quad 0=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)+P\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)+BP^2+EP+G\,.$$

Se ambedue l' equazioni (a) e (b) non sono identiche, bisognerà cercare i loro fattori, e quei che soddisfanno all' equazioni (4) e (2') ci daranno altrettante equazioni primitive della proposta, e le sole che la proposta possa ammettere, se si prescinda da quelle, le quali sono soluzioni particolari dell' equazioni (4) e (2'). (Si veda il n.° 19).

29. Ponghiamo adesso che le condizioni (a) e (b) siano identiche, e di più che l' equazione (2') sia soddisfatta indipendentemente dal valore di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, lo che è necessario perchè la proposta possa avere una equazione primitiva completa. In questo caso avremo due nuove condizioni

$$(c)\quad 0=2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)+2AB-C,\qquad (d)\quad 0=2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)+AE-F,$$

e poichè le tre condizioni (a), (c), (d) tengon luogo dell' equazioni (2) e (3), non rimarrà che a soddisfare alle altre (1) e (4). Sia $N=\psi\,.x$ l' equazione primitiva completa dell' ultima; avremo

$$0=\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$0=\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{\partial \psi}{\partial v}\,.$$

Prendendo da questa i valori di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ e $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, e sostituendoli nella equazione (1) otterremo

$$(1')\quad 0=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+P\frac{\partial\psi^2}{\partial x^2}+Q\frac{\partial\psi}{\partial x}+R\,,$$

ove sarà

$$P=\frac{B}{\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)}-\frac{\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)}{\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2}$$

$$Q=E-2P\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)-2\frac{\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)}$$

$$R=G\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)-Q\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)-P\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}\right).$$

Affinchè l'equazione (1′) possa darci il valore della funzione $\psi . x$ con due costanti arbitrarie, bisogna che la sostituzione del valore di z preso dall'equazione $N=\psi . x$ ne faccia sparire anche la y, e questo non può accadere che quando le quantità P, Q ed R sono ciascuna funzioni di x e di N. Tali sono le condizioni necessarie, perchè la proposta possa avere una equazione primitiva completa.

30. Tali condizioni si possono esprimere anche senza conoscere la funzione N. Infatti la differenziale presa per rapporto ad y di ogni funzione di x e di N essendo eguale a zero a motivo della equazione identica $\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)=0$, la stessa differenziale relativa ad y di ciascuna delle quantità P, Q ed R dovrà essere nulla. Pertanto, se ci rammentiamo che z è una funzione di x ed y data dall'equazione $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-A$, avremo l'equazioni identiche

$$0=\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2\left[\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)\right]+\left[2\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)-B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\right]\left[\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)\right]$$
$$-\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left[\left(\frac{\partial^3 N}{\partial y\partial z^2}\right)-A\left(\frac{\partial^3 N}{\partial z^3}\right)\right]$$

$$0=\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2\left[\left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)-2P\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y}\right)+2AP\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)\right]$$

$$-2\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left[\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x\partial y\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x\partial z^2}\right)\right]+2\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)\left[\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)\right]$$

$$0=\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left[\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)\right]+G\left[\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)\right]$$

$$-\left[Q+2P\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)\right]\left[\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)\right]-\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x^2\partial y}\right)+A\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x^2\partial z}\right).$$

Se adesso differenziamo l' equazione identica $\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)=0$ per rapporto alle variabili x, y, e z riguardandole come indipendenti tra loro, avremo

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x^2\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x^2\partial z}\right)=2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x\partial y\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x\partial z^2}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial z}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^3 N}{\partial y\partial z^2}\right)-A\left(\frac{\partial^3 N}{\partial z^3}\right)=2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right).$$

Sostituendo questi valori e quei di P e Q nell'equazioni precedenti avremo le tre condizioni cercate

$$\text{(e)}\quad 0=\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)-B\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right)$$

$$\text{(f)}\quad 0=\left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)-2B\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)-2\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial z}\right)$$

$$\text{(g)}\quad 0=\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)+G\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)-E\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right).$$

31. Per confermare i resultati ottenuti applicherò alla ricerca delle medesime condizioni il bel metodo proposto da *Lagrange* nelle sue lezioni sul calcolo delle funzioni. Coerentemente ai principj di questo metodo, se facciamo

$$f(x,y,z,y',z',y'',z'')=z''+Ay''+Bz'^2+Cy'z'+Dy'^2+Ez'+Fy'+G$$

ove secondo la notazione di *Lagrange* $z'=\frac{\partial z}{\partial x}$, $z''=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, cc., otterremo le condizioni necessarie perchè la proposta possa avere una equazione primitiva completa eliminando M dalle tre equazioni

$$\begin{aligned}
0 &= f'(y) + \mathrm{M}f'(z) + \mathrm{M}'f'(z') + \mathrm{M}''f''(z'') \\
0 &= f'(y') + \mathrm{M}f'(z') + 2\mathrm{M}'f'(z'') \\
0 &= f'(y'') + \mathrm{M}f'(z'') .
\end{aligned}$$

Secondo la medesima notazione

$$f'(y) = \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) = y''\left(\frac{\delta \mathrm{A}}{\delta y}\right) + z'^2\left(\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta y}\right) + y'z'\left(\frac{\delta \mathrm{C}}{\delta y}\right) + y'^2\left(\frac{\delta \mathrm{D}}{\delta y}\right) + z'\left(\frac{\delta \mathrm{E}}{\delta y}\right) + y'\left(\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta y}\right) + \left(\frac{\delta \mathrm{G}}{\delta y}\right)$$

$$f'(z) = y''\left(\frac{\delta \mathrm{A}}{\delta z}\right) + z'^2\left(\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta z}\right) + y'z'\left(\frac{\delta \mathrm{C}}{\delta z}\right) + y'^2\left(\frac{\delta \mathrm{D}}{\delta z}\right) + z'\left(\frac{\delta \mathrm{E}}{\delta z}\right) + y'\left(\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta z}\right) + \left(\frac{\delta \mathrm{G}}{\delta z}\right)$$

$$f'(y') = \mathrm{C}z' + 2\mathrm{D}y' + \mathrm{F}, \qquad f'(y'') = \mathrm{A},$$

$$f'(z') = 2\mathrm{B}z' + \mathrm{C}y' + \mathrm{E}, \qquad f'(z'') = 1 .$$

Ciò posto la terza equazione ci dà $\mathrm{M} = -\mathrm{A}$, e quindi

$$\mathrm{M}' = -\left(\frac{\delta \mathrm{A}}{\delta x}\right) - y'\left(\frac{\delta \mathrm{A}}{\delta y}\right) - z'\left(\frac{\delta \mathrm{A}}{\delta z}\right), \quad \mathrm{M}'' = -\left(\frac{\delta^2 \mathrm{A}}{\delta x^2}\right) - 2y'\left(\frac{\delta^2 \mathrm{A}}{\delta x \delta y}\right)$$

$$-2z'\left(\frac{\delta^2 \mathrm{A}}{\delta x \delta z}\right) - y'^2\left(\frac{\delta^2 \mathrm{A}}{\delta y^2}\right) - 2y'z'\left(\frac{\delta^2 \mathrm{A}}{\delta y \delta z}\right) - z'^2\left(\frac{\delta^2 \mathrm{A}}{\delta z^2}\right) - y''\left(\frac{\delta \mathrm{A}}{\delta y}\right) - z''\left(\frac{\delta \mathrm{A}}{\delta z}\right).$$

Sostituiti i valori di M e di M' nella seconda equazione, essa diventa

$$0 = \mathrm{F} - \mathrm{AE} - 2\left(\frac{\delta \mathrm{A}}{\delta x}\right) + \left[\mathrm{C} - 2\mathrm{AB} - 2\left(\frac{\delta \mathrm{A}}{\delta z}\right)\right]z' + \left[2\mathrm{D} - \mathrm{AC} - 2\left(\frac{\delta \mathrm{A}}{\delta y}\right)\right]y'.$$

Ora affinchè la proposta possa avere una equazione primitiva completa, quella che abbiamo trovata dev' essere identica indipendentemente da una relazione qualunque tra x, y, z, y' e z'; dunque essa ci dà le condizioni seguenti

$$(\mathrm{a}') \quad 0 = \mathrm{F} - \mathrm{AE} - 2\left(\frac{\delta \mathrm{A}}{\delta x}\right)$$

$$(\mathrm{b}') \quad 0 = \mathrm{C} - 2\mathrm{AB} - 2\left(\frac{\delta \mathrm{A}}{\delta z}\right)$$

$$(\mathrm{c}') \quad 0 = 2\mathrm{D} - \mathrm{AC} - 2\left(\frac{\delta \mathrm{A}}{\delta y}\right)$$

le quali sono d' accordo con le nostre condizioni (a), (c) e (d).

Sostituendo nella prima dell' equazioni di *Lagrange* i valori trovati di N, N', N'', e ponendovi in luogo di z'' il suo valore preso dalla proposta otterremo la seguente

$$\begin{aligned}
0 = z'^2 & \left[\left(\frac{\delta B}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta B}{\delta z}\right) - B\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right) - \left(\frac{\delta^2 A}{\delta z^2}\right)\right] \\
+ y'z' & \left[\left(\frac{\delta C}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta C}{\delta z}\right) - 2B\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right) - 2\left(\frac{\delta^2 A}{\delta y \delta z}\right)\right] \\
+ y'^2 & \left[\left(\frac{\delta D}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta D}{\delta z}\right) - C\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right) - \left(\frac{\delta^2 A}{\delta y^2}\right) + D\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)\right] \\
+ z' & \left[\left(\frac{\delta E}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta E}{\delta z}\right) - 2B\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right) - 2\left(\frac{\delta^2 A}{\delta x \delta z}\right)\right] \\
+ y' & \left[\left(\frac{\delta F}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta F}{\delta z}\right) - C\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right) - E\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right) - 2\left(\frac{\delta^2 A}{\delta x \delta y}\right) + F\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)\right] \\
+ & \left(\frac{\delta G}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta G}{\delta z}\right) - E\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right) - \left(\frac{\delta^2 A}{\delta x^2}\right) + G\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right).
\end{aligned}$$

E poichè questa equazione dev' essere identica indipendentemente da una relazione qualunque tra x, y, z, y' e z', ci darà le sei condizioni

$$\text{(d')} \quad 0 = \left(\frac{\delta B}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta B}{\delta z}\right) - B\,\frac{\delta A}{\delta z} - \left(\frac{\delta^2 A}{\delta z^2}\right)$$

$$\text{(e')} \quad 0 = \left(\frac{\delta C}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta C}{\delta z}\right) - 2B\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right) - 2\left(\frac{\delta^2 A}{\delta y \delta z}\right)$$

$$\text{(f')} \quad 0 = \left(\frac{\delta D}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta D}{\delta z}\right) - C\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right) - \left(\frac{\delta^2 A}{\delta y^2}\right) + D\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)$$

$$\text{(g')} \quad 0 = \left(\frac{\delta E}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta E}{\delta z}\right) - 2B\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right) - 2\left(\frac{\delta^2 A}{\delta x \delta z}\right)$$

$$\text{(h')} \quad 0 = \left(\frac{\delta F}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta F}{\delta z}\right) - C\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right) - E\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right) - 2\left(\frac{\delta^2 A}{\delta x \delta y}\right) + F\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)$$

$$\text{(i')} \quad 0 = \left(\frac{\delta G}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta G}{\delta z}\right) - E\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right) - \left(\frac{\delta^2 A}{\delta x^2}\right) + G\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right).$$

Di queste la prima, la quarta, e l'ultima sono le stesse che le nostre condizioni (e), (f), e (g); le altre tre sono sovrabbondanti, ed è facile provare che son comprese nelle precedenti. Infatti

$$\text{(e')} = \left(\frac{\delta\,\text{(b')}}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta\,\text{(b')}}{\delta z}\right) + 2A\,\text{(d')}$$

$$2\text{(f')} = \left(\frac{\delta\,\text{(c')}}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta\,\text{(c')}}{\delta z}\right) + A\,\text{(e')} + \text{(c')}\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right) - \text{(b')}\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right)$$

$$\text{(h')} = \left(\frac{\delta\,\text{(a')}}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta\,\text{(a')}}{\delta z}\right) + A\,\text{(g')} + \text{(a')}\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right) - \text{(b')}\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right).$$

32. Se

32. Se le condizioni trovate non sono identiche, l'equazione (1) non potrà darci per mezzo dell' integrazione un valore di ψ, il quale contenga due costanti arbitrarie, e per conseguenza la proposta non avrà una equazione primitiva completa. Contuttociò potrà accadere che un valore meno generale di ψ soddisfaccia all'equazione (1') rendendo nulli separatamente i termini, che dopo l'eliminazione di z contengono la variabile y, e quei che non la contengono. In questo caso nella equazione (1') non avremo riguardo che ai termini indipendenti da y trascurando gli altri che contengono questa variabile, ed integrando questa equazione parziale otterremo il valore di ψ con due costanti arbitrarie; dopo di che determineremo le due costanti o una di esse in modo che svaniscano ancora nella equazione (1) i termini che abbiamo trascurati. Così troveremo una equazione primitiva della proposta o con una sola costante, o senza costante arbitraria.

Ma potremo rendere questa ricerca più facile se riflettiamo, che quando esiste un valore di ψ, il quale soddisfà all'equazione (1') indipendentemente da y, l'equazioni derivate da questa per rapporto ad y dovranno esser soddisfatte dal medesimo valore di ψ. Dunque prevalendoci di quest'equazioni derivate piuttosto che della equazione (1') otterremo il valore di ψ mediante l'integrazione di una equazione del prim' ordine, e qualche volta ancora senza integrazione. Da ciò apparisce, perchè le due costanti, che troveremmo non considerando nell'equazione (1') che i termini indipendenti da y, non possano restare ambedue indeterminate.

Per trovare tutte l'equazioni primitive della proposta nel caso che abbiamo fin qui esaminato, restano a considerarsi le soluzioni particolari dell'equazioni (1) e (4), la ricerca delle quali non presenta alcuna difficoltà. Quelle tra tali soluzioni, che soddisfaranno al rimanente dell'equazioni (1), (2), (3) e (4), daranno altre equazioni primitive della proposta.

33. Supponghiamo adesso che le condizioni (a) e (b) essendo identiche l'equazione (2') non sia soddisfatta indipen-

dentemente dal valore di $\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$. Quando ciò accade convien dedurre il valore della funzione $\psi . x$ dall'equazione (2'). Sostituendovi in luogo di $\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$ il suo valore $\frac{\frac{\delta \psi}{\delta x} - \left(\frac{\delta N}{\delta x}\right)}{\left(\frac{\delta N}{\delta z}\right)}$, e facendo come sopra $\frac{F - AE - 2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)}{2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right) + 2AB - C} = P$, l'equazione (2') diventa

$$(2'') \quad 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - P\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right),$$

ed acciò possa darci il valore di ψ con una costante arbitraria, è necessario che la sostituzione del valore di z preso dall'equazione $N = \psi . x$ faccia sparire y dalla quantità $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ $+ P\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$. Dovrà dunque questa quantità essere una funzione di x e di N, e per conseguenza la sua differenziale presa relativamente ad y dovrà esser nulla. Pertanto avremo

$$0 = \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z}\right) + P\left[\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y \partial z}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)\right] + \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left[\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\right],$$

e sostituendo in luogo di $\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z}\right)$ e $\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y \partial z}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)$ i loro valori $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$ e $\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$

$$(h) \quad 0 = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right).$$

Questa è la condizione necessaria perchè la proposta abbia una equazione primitiva con una costante indeterminata, e quando essa è identica si trova l'equazione primitiva mediante l'integrazione dell'equazioni del prim'ordine (4) e (2'').

34. Quantunque la sostituzione del valore di z non faccia sparire y dall'equazione (2''), può accadere però che essa sia soddisfatta da un valore meno generale di ψ, in quanto renda nulli separatamente i termini indipendenti da y e quei che ne dipendono. In questo caso poichè l'equazione (2'') è

verificata qualunque sia y, la sua equazione derivata relativa ad y sarà soddisfatta dal medesimo valore di ψ. Ma è evidente che questa equazione derivata non è che la stessa condizione (h); dunque la condizione (h) ci darà il valore di ψ dopo l'eliminazione di z, e prima dell'eliminazione avrà per fattore l'equazione cercata $N - \psi . x = 0$, in modo che si avrà in tal caso l'equazione primitiva della proposta senza alcuna integrazione.

Anche rapporto al caso esaminato nei due precedenti articoli si deve osservare, che non abbiamo fin qui trovate tutte l'equazioni primitive, dalle quali la proposta può esser soddisfatta. Per averle tutte bisogna aggiungervi quelle, che sono soluzioni particolari dell'equazioni (4) o (2'), e verificano le altr'equazioni, le quali devono sussistere insieme con esse.

35. Negli esempj generali che abbiamo dati, e che potremmo facilmente moltiplicare, abbiamo procurato di mostrare il modo, con cui dobbiamo condurci nei diversi casi. Ma in ciascun caso particolare tornerà meglio applicare le operazioni ed i ragionamenti all'equazione data che riportarla ad un caso più generale, perchè le condizioni identiche spariranno dal calcolo, e così ci risparmieremo molte discussioni inutili. Porremo fine a queste ricerche con l'esempio di una particolare equazione del second'ordine, che abbiamo scelto espressamente per prevenire una objezione, la quale potrebbe esserci fatta relativamente alle soluzioni particolari. Sia dunque proposta l'equazione

$$0 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{2}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + 1 .$$

Dopo aver posti in luogo di $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ i loro valori $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial y}{\partial x}$, e $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) \frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial y^2}{\partial x^2}$, e dopo avere ordinato il primo membro per le potenze ed i prodotti di $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ otterremo molt'equazioni, delle quali la prima è

$$(1) \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{2}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 1 = 0$$

l' ultima è

$$(2) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 1 = 0$$

e tutte l' equazioni intermedie son tali che diventano identiche, quando l' ultima è soddisfatta da un integrale particolare (n.° 19). Questa integrata ci dà $z - y = \psi . x$, onde si deduce $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, e sostituito questo valore la (1) diventa

$$(1') \quad \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{2}{x}\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 1 = 0 .$$

E poichè non contiene altre variabili che x e ψ, essa ha un integrale completo, che si trova essere $\psi = cx + \frac{x^3}{12c} + c'$, essendo c e c' le due costanti indeterminate. Pertanto la proposta ha l' equazione primitiva completa

$$z = y + cx + \frac{x^3}{12c} + c' .$$

Per vedere se ha qualch' equazione primitiva singolare, bisogna cercare le soluzioni particolari dell' equazioni (1) e (2). La seconda non ne ha, la prima ha la soluzione particolare $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \pm x$ (si veda la lezione XV di *Lagrange*). Se ne deduce $z = \pm \frac{x^2}{2} + \phi . y$, ma quest' equazione non può nella sua generalità convenire alla proposta. Resta a vedere se dando un valore determinato alla funzione arbitraria $\phi . y$ l' equazione $z = \pm \frac{x^2}{2} + \phi . y$ può soddisfare all' equazione (2). Ciò si ottiene se si fa $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 1$, cioè $\phi . y = y + \text{cost.}$, dunque la proposta ha l' equazione primitiva singolare

$$z = \pm \frac{x^2}{2} + y + \text{cost.}$$

L' avremmo subito trovata, se avessimo cercate le soluzioni particolari dell' equazione (1').

SUL MOTO DISCRETO DI UN CORPO, OSSIA SOPRA I MOVIMENTI NEI QUALI SUCCEDONO DI TEMPO IN TEMPO DELLE VARIAZIONI FINITE

MEMORIA

Del Signor Antonio Bordoni.

Presentata li 15 *Settembre* 1814 *dal Sig. Brunacci ed approvata dal Sig. Ruffini.*

Nelle questioni di moto trattate sino ad ora, la velocità, ed altre quantità dalle quali dipende la conoscenza dello stato del corpo in moto ad un istante qualunque del suo movimento, o non variano, cioè sono le medesime per tutto il tempo che dura il moto, ovvero variando, le variazioni loro sono infinitesime, ed accadono continuamente, ossia senza intermissione, in tutti gl'istanti del movimento. Ma vi sono molte altre quistioni di moto, nelle quali le medesime quantità, oltre di essere sottoposte a quelle stesse affezioni, come nelle suddette, sono di più soggette ad altre variazioni, le quali per essere finite, e succedendo solamente di quando in quando, cambiano successivamente il moto, e qualche volta anche la sua natura, rendendolo una serie di moti ordinarj di una, o più specie.

Il moto continuato di un obus. è un esempio naturale di questa specie di moto, imperciocchè tutte le volte che esso percuote il suolo, quasi tutte le quantità, dalle quali dipende la cognizione del suo stato, variano di quantità finite.

La dichiarazione della teorica di questi movimenti, che denomineremo *discreti*, per distinguerli dagli ordinarj o comuni, unitamente ad alcune nuove considerazioni analitiche, è lo scopo di questa Memoria.

Il modo più naturale di trattare qualunque questione di moto discreto, sarebbe quello d'incominciare a trovare le quantità dalle quali dipende la conoscenza del moto prima di succedere il primo cambiamento finito in alcuni elementi del medesimo, e poi determinare cosa diventano queste quantità stesse per forza di questo cambiamento: fatto ciò, discoprire quelle dalle quali dipende la cognizione del moto nel tempo che trascorre dopo il primo cambiamento finito sino al secondo, e di nuovo determinare le medesime quantità, computando questo secondo cambiamento finito: e così continuare.

Ma siccome con questo metodo difficilmente si potrebbero determinare le quantità dalle quali dipende la conoscenza dello stato del corpo in moto ad un istante qualunque del suo movimento, stante la eccessivamente grande prolissità; perciò ne preferiremo un altro, col quale potremo trattare completamente molte questioni di questa specie di moto; vale a dire il seguente „ Incominceremo a trovare le sole quantità dalle quali dipende la conoscenza dello stato del corpo in moto negl' istanti prossimi a quelli nei quali succedono le variazioni finite in alcune di esse; e poscia passeremo a trovare quelle altre dalle quali dipende la cognizione del moto dello stesso corpo ad un istante qualunque di un qualsivoglia di quei tempi, che passano tra gl' istanti in cui accadono i cambiamenti finiti anzidetti „.

E siccome si possono determinare le prime di queste quantità col metodo che diede *Lagrange* per trovare i termini generali delle serie, allorchè si conoscono le loro equazioni di relazione, ed in conseguenza approfittare di alcuni vantaggi che somministra attualmente il calcolo delle differenze finite la cui fecondità si è moltissimo accresciuta nelle mani del cel. Geometra *Brunacci*; così usando questo metodo, procureremo alle soluzioni delle questioni di moto discreto, che tratteremo, la semplicità, la uniformità, e qualche volta anche la eleganza. Anzi risultando la determinazione delle altre quantità una questione di moto puramente ordinario, avremo particolarmente di mira in questa Memoria, la determinazione delle sole prime; e solamente qualche volta determineremo anco le seconde.

Avendo riguardo ai rapporti che hanno le proposizioni di moto discreto che esporremo, tanto fra loro, quanto colle proposizioni conosciute di moto ordinario, parleremo di esso seguendo quest'ordine, cioè; 1.° Del moto discreto rettilineo; 2.° Del moto su di un poligono dato; 3.° Di quello sopra di un dato poliedro; 4.° Di una specie di moto discreto che chiameremo *semilibero*; 5.° finalmente, del moto libero.

Del moto rettilineo.

Stante che, tutte le difficoltà rimarcabili, che s'incontrano nella teoria generale della prima specie di questi movimenti, cioè di quella nella quale il corpo descrive una sola retta, sono o soluzioni di equazioni, od integrazioni finite di date espressioni, o di equazioni delle differenze finite, vale a dire sono esse puramente analitiche, e non si possono superare, senza individuare le leggi del moto stesso; incominceremo immediatamente la teorica di questo moto colla proposizione che qui segue, e procureremo di trattarla completamente, ossia di non lasciare nulla a desiderare rispetto alla medesima, nella ipotesi che la resistenza del mezzo segua la ragione del quadrato della velocità del mobile; cioè nella ipotesi comunemente accettata.

Proposizione I.

„ Un grave di elasticità imperfetta cadendo verticalmen-
„ te urti un piano orizzontale, con una data velocità, e sa-
„ rà dal piano medesimo, obbligato a salire ad una certa al-
„ tezza, dalla quale scendendo, ed urtando di nuovo nello
„ stesso piano, sarà obbligato a risalire; e così continuerà il
„ suo movimento: alla fine della discesa xesima, quale sarà

„ la velocità, lo spazio percorso, ed il tempo corso, movendosi il grave in un mezzo resistente „.

Soluzione. Sia t_x il tempo corso dal principio della prima salita alla fine della x esima discesa; $2s_x$ lo spazio percorso in questo tempo; v_x la velocità alla fine della discesa x esima, ossia quella colla quale il corpo urta la $(x+1)$ esima volta il piano orizzontale; t_{x+1}, $2s_{x+1}$, e v_{x+1} siano per la discesa $(x+1)$ esima ciò che sono t_x, $2s_x$, e v_x per l'x esima; e sia tanto in questa, quanto in tutte le proposizioni seguenti, r il rapporto della elasticità del corpo alla percossa, g la forza costante di gravità, gk^2 il coefficiente pel quale moltiplicando il quadrato della velocità del mobile, si ottiene la forza ritardatrice della resistenza del mezzo, nel quale si move il corpo.

Egli è evidente, che sono eguali tra' loro la salita e la discesa $(x+1)$ esima, e che la salita continua fino a tanto che la resistenza del mezzo insieme alla gravità abbiano distrutto la velocità colla quale è stata incominciata; e la discesa finchè il corpo urti di nuovo nel piano orizzontale. Queste tre verità per sè stesse evidenti saranno il fondamento della soluzione presente.

Per quello che si è premesso, il corpo comincia la salita $(x+1)$ esima colla velocità rv_x, e sale all'altezza Δs_x; e però, colla teorica del moto verticale ascendente ne' mezzi resistenti, si avrà

$$2gk^2\Delta s_x = \log.(1 + k^2r^2v^2{}_x);$$

e finisce la discesa corrispondente coll'acquistare la velocità v_{x+1}, scendendo dalla medesima altezza Δs_x, adunque colla stessa teorica, rispetto ai gravi che scendono, avrassi pure

$$2gk^2\Delta s_x = -\log.(1 - k^2v^2{}_{x+1}).$$

Essendo uguali i primi membri di queste due equazioni, sarà anche

$\log.(1+k^2r^2v^2{}_x)=-\log.(1-k^2v^2{}_{x+1})$, ossia $(1+k^2r^2v^2{}_x)(1-k^2v^2{}_{x+1})=1$; cioè si avrà tra le velocità v_x, v_{x+1} l'equazione delle differenze finite seguente

$$k^2r^2v^2_x v^2_{x+1} + v^2_{x+1} - r^2v^2_x = 0 ,$$

la quale integrata, ci darà la velocità del corpo alla fine della discesa x esima, espressa per k, r, e pel numero x delle salite o discese.

Per integrare quest'ultima equazione da cui dipende attualmente la velocità cercata, supponghiamo $v^2_x = \frac{1}{y_x}$, y_x essendo una nuova funzione incognita, ed avremo

$$y_{x+1} - \frac{1}{r^2} y_x - k^2 = 0 ,$$

la quale è, come si vede, un'equazione anch'essa del primo ordine, ma lineare, in conseguenza integrabile colle regole generali a tutti note.

Con queste regole, integrando quest'ultima equazione, si ha (§. 40) (*)

$$y_x = \frac{c + k^2r^2r^{2x}}{(r^2 - 1)r^{2x}} ,$$

c rappresentando la costante arbitraria. Ma abbiamo supposto $v^2_x = \frac{1}{y_x}$, adunque il quadrato della velocità del corpo alla fine della discesa x esima sarà

$$\frac{(r^2 - 1)r^{2x}}{c + k^2r^2r^{2x}} ;$$

ossia tra la velocità stessa ed il numero x, vi sarà la relazione espressa dalla equazione

$$v^2_x = \frac{(r^2 - 1)r^{2x}}{c + k^2r^2r^{2x}} .$$

Per trovare la costante arbitraria c, osservisi, che per ipotesi si conosce la velocità colla quale il corpo ha urtato la prima volta il piano orizzontale, urtamento dal quale è nata la prima salita, che ha fatto il corpo, come nasce la

---

(*) In questa Mem. i §§. citati si riferiscono all'esimio Compendio del Calcolo Sublime del Prof. *Brunacci*.

$(x+1)$ esima dall'urtamento $(x+1)$ esimo; cioè pei dati della proposizione conosciamo la velocità v_0. Ma supponendo $x=0$ nell'equazione di relazione anzi trovata, tra x e v_x, hassi

$$v^2{}_0 = \frac{r^2-1}{c+k^2r^2}\text{, ossia } c = \frac{r^2-1-k^2r^2v^2{}_0}{v^2{}_0}\text{; adunque}$$

$$v_x = v_0 r^x \sqrt{\frac{r^2-1}{r^2-1+(r^{2x}-1)r^2k^2v^2{}_0}}:$$

espressione nella quale tutte le quantità sono immediatamente conosciute.

Sostituendo nella equazione

$$2gk^2\Delta s_x = \log.(1+k^2r^2v_x),$$

esposta superiormente, in vece di $v^2{}_x$ il suo valore $\frac{(r^2-1)r^{2x}}{c+k^2r^2r^{2x}}$, si ha

$$2gk^2\Delta s_x = \log.\frac{c+r^2k^2r^{2(x+1)}}{c+r^2k^2r^{2x}},$$

dalla quale desumesi

$$\Delta s_x = \frac{1}{2gk^2}\log.\frac{c+r^2k^2r^{2(x+1)}}{c+r^2k^2r^{2x}};$$

cioè l'altezza a cui sale, e da cui poscia discende la $(x+1)$ esima volta il corpo.

Per essere

$$\log.\frac{c+r^2k^2r^{2(x+1)}}{c+r^2k^2r^{2x}} = \Delta\log.(c+r^2k^2r^{2x})$$

l'ultima equazione equivale a quest'altra

$$2gk^2\Delta s_x = \Delta\log.(c+k^2r^2r^{2x})$$

che è per sè stessa integrabile, ed integrata dà

$$2gk^2s_x = \log.(c+k^2r^2r^{2x}) + \text{cost}.$$

Ma ad $x=0$ corrisponde $2s_0=0$, perchè comincia lo spazio $2s_x$ coll'incominciare della prima salita; adunque sarà

$$0 = \log.(c+k^2r^2) + \text{cost.}, \text{ ossia cost.} = -\log.(c+k^2r^2).$$

Quindi $2gk^2s_x = \log.(c+k^2r^2r^{2x}) - \log.(c+k^2r^2)$; e perciò lo spazio cercato

$$2s_x = \frac{1}{gk^2}\log.\frac{c+k^2r^2r^{2x}}{c+k^2r^2}.$$

Passiamo ora a trovare il tempo decorso dal principio della prima salita alla fine della x esima discesa, cioè la espressione del tempo t_x. Chiamando θ_x la somma dei tempi delle x prime salite, e δ_x quello delle corrispondenti discese, saranno $\Delta\theta_x$, $\Delta\delta_x$ i tempi della salita e discesa $(x+1)$ esima; e perciò, colla teorica del moto verticale dei gravi che si movano in mezzi resistenti, si avrà

$$2gk\Delta\delta_x = \log.\frac{1+kv_{x+1}}{1-kv_{x+1}}\,,\ \text{e}\ gk\Delta\theta_x = \text{Arc. tang.}\, rkv_x\,,$$

ossia $\Delta\delta_x = \frac{1}{2gk}\log.\frac{1+kv_{x+1}}{1-kv_{x+1}}$, e $\Delta\theta_x = \frac{1}{gk}\,\text{Arc. tang.}\, rkv_x$;

cioè il tempo δ_x delle discese sarà eguale all'integrale finito

$$\Sigma\frac{1}{2gk}\log.\frac{1+kv_{x+1}}{1-kv_{x+1}}$$

preso tra i limiti di 1 ad x; e quello delle salite, cioè θ_x sarà eguale all'altro

$$\Sigma\frac{1}{gk}\,\text{Arc. tang.}\, rkv_x$$

preso fra i limiti 0, ed $x-1$; vale a dire, sarà

$$\delta_x = \frac{1}{2gk}\left(\log.\frac{1+kv_x}{1-kv_x} + \log.\frac{1+kv_{x-1}}{1-kv_{x-1}} + \ldots\ldots + \log.\frac{1+kv_1}{1-kv_1}\right),$$

$$\text{e}\ \theta_x = \frac{1}{gk}\left(\text{A. tang.}\, rkv_{x-1} + \text{A. tang.}\, rkv_{x-2} + \ldots\ldots + \text{A. tang.}\, rkv_0\right).$$

Ma la somma dei logaritmi di un numero qualunque di quantità è eguale al solo logaritmo del loro prodotto, adunque sarà il tempo delle discese

$$\delta_x = \frac{1}{2gk}\log.\left(\frac{1+kv_x}{1-kv_x}\right)\left(\frac{1+kv_{x-1}}{1-kv_{x-1}}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1+kv_2}{1-kv_2}\right)\left(\frac{1+kv_1}{1-kv_1}\right).$$

Se è vantaggiosa la sostituzione fatta del solo logaritmo del prodotto delle quantità $\frac{1+kv_x}{1-kv_x}$, $\frac{1+kv_{x-1}}{1-kv_{x-1}}$, ….. $\frac{1+kv_2}{1-kv_2}$, $\frac{1+kv_1}{1-kv_1}$ in luogo della somma dei logaritmi delle medesime, molto più lo sarà la sostituzione di un solo arco in vece degli x archi

$\text{A. tang.}\, rkv_{x-1}$, $\text{A. tang.}\, rkv_{x-2}$, ….. $\text{A. tang.}\, rkv_1$, $\text{A. tang.}\, rkv_0$, la quale divisa per gk dà il tempo θ_x. Vediamo pertanto, come si possa trovare un solo arco eguale alla somma di quelli, che hanno per tangenti le quantità attualmente conosciute rkv_{x-1}, rkv_{x-2}, ... rkv_1, rkv_0.

Supponendo

$$\text{A.tang.}rkv_{x-1}+\text{A.tang.}rkv_{x-2}+\ldots+\text{A.tang.}rkv_1+\text{A.tang.}rkv_0=\xi_x$$

si ha $\text{tang.}\,\xi_{x+1}=\text{tang.}(\xi_x+rkv_x)=(rkv_x+\text{tang.}\,\xi_x):(1-krv_x\,\text{tang.}\,\xi_x)$, ossia l'equazione delle differenze finite

$$(\text{A})\ldots\, rkv_x\,\text{tang.}\,\xi_x\,\text{tang.}_{x+1}-\text{tang.}\,\xi_{x+1}+\text{tang.}\,\xi_x+rkv_x=0$$

dalla cui integrazione dipende il valore cercato dell'arco ξ_x.

Ad ottenere l'integrale dell'equazione qui trovata, suppongasi in essa $\text{tang.}\,\xi_x=\frac{rkv_x}{\pi_x-1}$, π_x esprimendo una nuova funzione incognita, e si cambierà in quest'altra

$$\pi_x\pi_{x+1}-b_x\pi_x-a_x=0,$$

$$\text{posto }-\frac{1+r^2k^2v^2_x}{v_x}v_{x+1}=a_x,\text{ e }\frac{v_x+v_{x+1}}{v_x}=b_x,$$

la quale dà evidentemente

$$\pi_x=b_{x-1}+\cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2}+\cfrac{a_{x-2}}{b_{x-3}+\cfrac{a_{x-3}}{\ddots\, b_2+\cfrac{a_2}{b_1+\cfrac{a_1}{\pi_1}}}}}.$$

Ma pel significato della funzione ξ_x si ha $\text{tang.}\,\xi_1=rkv_0$, e per forza della fatta supposizione, cioè di $\text{tang.}\,\xi_x=\frac{rkv_x}{\pi_x-1}$, hassi anche $\text{tang.}\,\xi_1=\frac{rkv_1}{\pi_1-1}$; adunque $rkv_0=\frac{rkv_1}{\pi_1-1}$, ossia $\pi_1=1+\frac{v_1}{v_0}$; e però

$$\pi_x=b_{x-1}+\cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2}+\cfrac{a_{x-2}}{\ddots\, b_1+\cfrac{a_1}{1+\cfrac{v_1}{v_0}}}}:$$

valore che messo in quello supposto di $\text{tang.}\,\xi_x$, ci dà la nuova e singolare formola trigonometrica

$$\text{tang.}\,\xi_x = \cfrac{rkv_x}{-1+b_{x-1}+\cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2}+\cfrac{a_{x-2}}{b_{x-3}+\cfrac{a_{x-3}}{\ddots\, b_2+\cfrac{a_2}{b_1+\cfrac{a_1}{1+\cfrac{v_1}{v_0}}}}}}}\,;$$

cioè l'arco cercato $\xi_x = \text{Arc. tang.}\cfrac{rkv_x}{-1+b_{x-1}+\cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2}+\text{ec.}}}$ Quindi il tempo delle salite, sarà anche eguale ad

$$\frac{1}{gk}\,\text{Arc. tang.}\cfrac{rkv_x}{-1+b_{x-1}+\cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2}+\cfrac{a_{x-2}}{b_{x-3}+\text{ec.}}}}$$

Ora, essendo il tempo cercato, cioè il decorso dal principio della prima salita alla fine della x esima discesa, eguale alla somma dei tempi corsi nelle x prime salite e nelle corrispondenti discese, vale a dire $t_x = \theta_x + \delta_x$, sarà esso eguale ad

$$\frac{1}{2gk}\log.\left(\frac{1+kv_x}{1-kv_x}\right)\left(\frac{1+kv_{x-1}}{1-kv_{x-1}}\right)\dots\left(\frac{1+kv_1}{1-kv_1}\right)+\frac{1}{gk}\,\text{A. tang.}\cfrac{rkv_x}{-1+b_{x-1}+\cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2}+\cfrac{a_{x-2}}{\ddots\, b_1+\cfrac{a_1}{1+\cfrac{v_1}{v_0}}}}}\,.$$

Corollario I. Essendo $\Delta\theta_x$ il tempo della $(x+1)$ esima salita, e $\Delta\delta_x$ quello della corrispondente discesa, sarà $\Delta t_x = \Delta\theta_x + \Delta\delta_x$, ossia

$$\frac{1}{gk}\left(\text{Arc. tang.}\,rkv_x + \tfrac{1}{2}\log.\frac{1+kv_{x+1}}{1-kv_{x+1}}\right)$$

il tempo corso tra gli urtamenti x, $(x+1)$ esimi. Similmente, per essere v_x la velocità del corpo alla fine della discesa x esima, sarà rv_x, ovvero

$$r^{x+1}v_0\sqrt{\frac{r^2-1}{r^2-1+(r^{2x}-1)\,r^2k^2v^2_0}}$$

la velocità colla quale il corpo comincierà la salita $(x+1)$ esima. In ultimo

$$\frac{1}{2gk^2}\log.\frac{c+k^2r^{2(x+2)}}{c+k^2r^{2(x+1)}}$$

sarà l'altezza, sopra il piano orizzontale, a cui salirà il corpo nella $(x+1)$ esima salita.

Corollario II. Facilmente colla teorica del moto verticale ascendente dei gravi ne' mezzi resistenti (*) e colle esposte nell'antecedente Corollario, si trovano le due equazioni seguenti

$$gkt'_x = \text{Arc.tang.}\,k\,\frac{rv_x - u_x}{1 + rk^2v_xu_x},\quad 2gk^2s'_x = \log.\frac{1 + r^2k^2v^2_x}{1 + k^2u^2_x},$$

nelle quali u_x, s'_x, e t'_x esprimono la velocità, lo spazio, e il tempo corrispondente, per la salita $(x+1)$ esima. Similmente, colla medesima teoria rispetto al moto discendente, trovansi le altre due equazioni

$$2gkt''_x = \log.\frac{1 + ku'_x}{1 - ku'_x},\quad 2gk^2(\Delta s_x - s''_x) = \log.\frac{1 - k^2u'^2_x}{1 - k^2v^2_{x+1}},$$

nelle quali u'_x, s''_x, t''_x esprimono la velocità, lo spazio, e il tempo corrispondente per la $(x+1)$ esima discesa.

Con queste quattro equazioni, insieme ai valori delle quantità v_x, s_x, e t_x trovate sopra, si conoscerà il moto del corpo in un istante qualunque del tempo Δt_x, che passa dall'urtamento x esimo all'$(x+1)$ esimo.

PROPOSIZIONE II.

„ Supposte le leggi del moto, come nella proposizione
„ antecedente, e dato di più una delle tre quantità, spazio,
„ velocità, e tempo, trovare le altre due corrispondenti, e
„ la distanza che avrà il corpo dal piano orizzontale.

Soluzione. Primieramente sia dato lo spazio S.

Ponendo nella equazione $2gk^2s_x = \log.\dfrac{c + k^2r^2r^{2x}}{c + k^2r^2}$ in luogo di $2s_x$ lo spazio dato S, ed x' invece di x; e poscia cavando l'x' dalla risultante, si ha

---

(*) Questa teorica si può vedere al §. 204 del primo volume della Meccanica del Sig. Professore *Venturoli*.

$$x' = \frac{\log.[(c + r^2k^2)e^{gkS} - c] - 2\log.kr}{2\log.r}.$$

Se il numero x', così determinato, sarà intero, nell'istante che il corpo avrà terminato di percorrere lo spazio dato S, si troverà nel piano orizzontale, sarà trascorso il tempo $t_{x'}$, ed avrà la velocità $v_{x'}$, o zero, ovvero $rv_{x'}$, secondo che si considererà prima o dopo la compressione, oppure dopo la stessa dilatazione.

Se poi x' sarà frazionario, per avere le stesse quantità, si osserverà primieramente, se S eguaglierà, o sarà minore, ovvero maggiore di $2s_m + \Delta s_m$, m esprimendo il maggior numero intero contenuto nell'x'; e nel primo di questi tre casi, il corpo troverassi distante dal piano orizzontale di Δs_m, non avrà velocità, e sarà corso il tempo $t_m + \Delta\theta_m$; nel secondo sarà distante dal piano di $S - 2s_m$, avrà la velocità u_m data dalla equazione

$$2gk^2s'_m = \log.\frac{1 + r^2k^2v^2_m}{1 + k^2u^2_m},$$

ed il tempo decorso sarà $t_m + t'_m$, t'_m essendo determinato mediante la equazione

$$gkt'_m = \text{Arc. tang.}\, k\frac{rv_m - u_m}{1 + rk^2v^2_mu^2_m}.$$

Finalmente nel terzo caso il corpo sarà distante dal piano orizzontale di $2s_{m+1} - S$, si moverà colla velocità u'_m cavata dalla equazione

$$2gk^2(2s_{m+1} - S) = \log.\frac{1 - k^2u'^2_m}{1 - k^2v^2_{m+1}},$$

e $t_m + \Delta\theta_m + t''_m$ sarà il tempo decorso, purchè t''_m venga desunto dalla equazione

$$2gkt''_m = \log.\frac{1 + ku'_m}{1 - ku'_m}.$$

Sia ora conosciuta la velocità V.

Sostituendo nella equazione, esposta anch'essa superiormente,

$$v_x = v_0r^x\sqrt{\frac{r^2 - 1}{r^2 - 1 + (r^{2x} - 1)r^2k^2v^2_0}},$$

invece di x l'y, e di v_x la velocità data V; poi liberando lo stesso y, hassi

$$y = \frac{\log. V^2(r^2 - 1 - r^2k^2v^2_0) - \log. v^2_0(r^2 - 1 - r^2k^2V^2)}{2\log. r},$$

espressione la quale potrà essere anch'essa intera o frazionaria.

Qualunque sia il numero y, il corpo si potrà trovare in una qualunque delle m prime salite, come in una qualsivoglia delle corrispondenti discese, m rappresentando il maggiore numero intero contenuto nell'y; e però sarà

$$s'_n = \frac{1}{2gk^2}\log.\frac{1 + r^2k^2v^2_n}{1 + k^2V^2}, \text{ o } \Delta s_n - s''_n = \frac{1}{2gk^2}\log.\frac{1 - k^2V^2}{1 - k^2v^2_{n+1}}$$

la distanza che esso avrà dal piano orizzontale, $2s_n + s'_n$, ovvero $2s_n + \Delta s_n + s''_n$ lo spazio che avrà percorso, e

$$t_n + \frac{1}{gk}\text{Arc. tang.}\, k\frac{rv_n - V}{1 + rk^2v^2_nV}, \text{ oppure } t_n + \Delta\theta_n + \frac{1}{2gk}\log.\frac{1 + kV}{1 - kV},$$

il tempo corso, qualunque numero rappresenti l'n, tra i positivi, interi, e non maggiori del maggior numero intero contenuto in y, cioè di m.

Di più, se sarà $v_m > V > rv_m$ il corpo potrà trovarsi nel piano orizzontale, aver percorso lo spazio $2s_m$, ed essere corso il tempo t_m, precisamente come nel caso di $V = v_m$; e se sarà $V = rv_m$, ovvero $rv_m > V > v_{m+1}$, il numero n contenuto nelle prime formole sopra esposte potrà essere eguale anche ad m maggior numero intero contenuto nell'y. Vale a dire, nel caso di $V = v_m$ il problema o la proposizione avrà $2m$ soluzioni, e negli altri $(2m + 1)$; cioè tante soluzioni quanti sono gl'istanti del tempo corso nella durata del moto continuato nei quali la velocità del corpo eguaglia la data V.

In ultimo sia dato il tempo T.

Troveremo la velocità, lo spazio, e la distanza dal piano orizzontale che corrispondono al tempo dato T, senza determinare il valore della quantità posta invece di x nella espressione di t_x espresso pel tempo dato T stesso; e si vedrà con ciò, come si possa scoprire il numero intero rappresentante

tante la stessa quantità, se essa è intera, o il maggior numero intero contenuto in essa, se sarà frazionaria, senza la suddetta determinazione.

S'incominci a supporre x, cioè il numero delle salite o discese uguale successivamente a 0, 1, 2, 3, ec. nella espressione generale del tempo t_x trovata nella precedente proposizione, e si continui questa operazione, finchè siasi trovato un numero intero m, che renda la stessa espressione uguale al tempo dato, cioè che dia $t_m = \mathrm{T}$; e se ciò non sarà possibile, come succederà quasi sempre, si continuerà la stessa operazione, finchè se ne saranno trovati due contigui m, $m+1$, che sostituiti invece di x nella medesima espressione, diano due risultamenti, tra i quali sia compreso lo stesso tempo dato, cioè che diano $t_m < \mathrm{T} < t_{m+1}$.

Quando succederà il primo di questi casi, cioè che un numero intero m, renderà $t_m = \mathrm{T}$, il corpo alla fine del tempo dato T si troverà nello stesso piano orizzontale; e però la velocità si avrà immediatamente, col sostituire il numero stesso m invece di x, o nella espressione di v_x trovata sciogliendo la proposizione antecedente, o in quella esposta nel suo Corollario 2.°, secondo che si vorrà il valore della velocità, prima, ovvero dopo la compressione istantanea del corpo; e lo spazio sarà $2s_m$, cioè si otterrà sostituendo in luogo di x il numero m nella espressione di $2s_x$ trovata anch'essa sciogliendo la proposizione precedente.

Negli altri casi, dopo avere trovato i numeri m, $m+1$, si osserverà, se T sarà eguale, o minore, ovvero maggiore di $t_m + \Delta\theta_m$; e nel primo di questi casi, il corpo sarà distante dal piano orizzontale di

$$\Delta s_m = \frac{1}{2gk^2} \log . \frac{c + k^2 r^2 r^{2(m+1)}}{c + k^2 r^2 r^{2m}},$$

non avrà nessuna velocità, ed avrà percorso lo spazio $2s_m + \Delta s_m$; nel secondo avrà velocità u_m data dalla equazione

$$k \frac{rv_m - u_m}{1 + rkv_m u_m} = \mathrm{tang}.\, gk(\mathrm{T} - t_m),$$

che desumesi dalla prima delle esposte nel Corollario 2.° della precedente proposizione, e sarà distante dal piano orizzontale di

$$s'_m = \frac{1}{2gk^2} \log . \frac{1 + r^2 k^2 v^2_m}{1 + k^2 u^2_m},$$

ed avrà trascorso uno spazio eguale a $2s_m + s'_m$. Finalmente nel terzo ed ultimo caso, avrà, alla fine del tempo T, la velocità u'_m che dà la equazione seguente

$$e^{2gkT} = \left(\frac{1 + ku'_m}{1 - ku'_m}\right) e^{2gk(t_m + \Delta\theta_m)},$$

dedotta anch'essa dalla terza dell'accennato Corollario, sarà distante dal piano di

$$\Delta s_m - s''_m = \frac{1}{2gk^2} \log . \frac{1 - k^2 u'^2_m}{1 - k^2 v^2_{m+1}},$$

ed avrà percorso lo spazio $2s_m + \Delta s_m + s''_m$.

Non aggiungo altre proposizioni di moto discreto rettilineo, persuaso che bastano le due trattate per indicare, come si debbono trattare le altre: anzi fo qui osservare, che la seconda delle medesime proposizioni, generalmente parlando, senza alcun cambiamento notabile, si estenderà anche alle proposizioni delle altre specie di movimento di cui si parlerà in questa Memoria.

Del moto sopra di un poligono dato.

PROPOSIZIONE III.

„ Data la velocità colla quale un corpo comincia a percorrere,
„ scendendo, il primo lato di un dato poligono qualunque,
„ tra quelli che hanno tutti gli angoli ottusi, comunque
„ disposto nello spazio, trovare la velocità, ed il
„ tempo corso, quando sarà giunto alla fine di un lato qualunque
„ del medesimo poligono.

SOLUZIONE. Sia OH (*Fig.* 1) una retta verticale; ... ABC ... il poligono a semplice o a doppia inflessione lungo al quale scende il corpo; $BC = l_x$ il suo lato $(x + 1)$ esimo; t_x il tempo decorso nell'arrivare in B, e Δt_x nel percorrere BC; v_x la velocità del corpo alla fine del lato AB, e v_{x+1} alla fine di BC; in ultimo, sia β_x l'angolo che fa il lato $(x + 1)$ esimo colla verticale, ed α_x quello che fa il medesimo lato col prolungamento del suo antecedente, cioè $\alpha_x = CBM$.

Rappresentando v_x la velocità del corpo alla fine del lato AB, $v_x \cos. \alpha_x$ esprimerà quella colla quale il corpo comincierà a percorrere BC; ma il moto secondo BC, essendo il corpo grave, è uniformemente accelerato, adunque, colla teorica conosciuta di questo moto si avrà

$$v^2_{x+1} = 2gl_x \cos. \beta_x + v^2_x \cos.^2 \alpha_x, \text{ ossia}$$

$$v^2_{x+1} - \cos.^2 \alpha_x v^2_x = 2gl_x \cos. \beta_x :$$

equazione la quale integrata colla regola colla quale s'integra qualsivoglia equazione delle differenze finite del primo ordine e lineare, somministra (§. 40)

$$v^2_x = e^{\Sigma \log. \cos.^2 \alpha_x} \left(C^2 + 2g \Sigma \frac{l_x \cos. \beta_x}{\cos.^2 \alpha_x} e^{-\Sigma \log. \cos.^2 \alpha_x} \right)$$

nella quale C^2 esprime la costante arbitraria, ed e la solita base; e perciò la velocità del corpo alla fine del lato x esimo, cioè

$$v_x = e^{\Sigma \log. \cos. \alpha_x} \sqrt{C^2 + 2g \Sigma \frac{l_x \cos. \beta_x}{\cos.^2 \alpha_x} e^{-\Sigma \log. \cos.^2 \alpha_x}}.$$

Percorrendosi il lato BC con moto uniformemente accelerato, si avrà, per ciò che si dimostra nella teorica ordinaria di questo movimento

$$v_{x+1} = v_x \cos. \alpha_x + g \cos. \beta_x \Delta t_x;$$

cioè la velocità alla fine del lato $(x + 1)$ esimo eguale a quella colla quale ha cominciato a percorrerlo, più il prodotto della forza acceleratrice, costante per tutto questo lato, moltiplicata pel tempo corso nel percorrerlo; e però

$$\Delta t_x = \frac{v_{x+1} - v_x \cos. \alpha_x}{g \cos. \beta_x}, \text{ ossia}$$

$$\Delta t_x = \frac{e^{\Sigma \log. \cos. \alpha_{x+1}}}{g \cos. \beta_x} \Delta \sqrt{C^2 + 2g \Sigma \frac{l_x \cos. \beta_x}{\cos.^2 \alpha_x} e^{-\Sigma \log. \cos.^2 \alpha_x}},$$

ponendo in luogo di v_x, e di v_{x+1} i loro valori. Quindi integrando quest'ultima espressione di Δt_x relativamente alla x, e trovando opportunamente l'arbitraria, avrassi il tempo corso nell'arrivare in B, cioè il dimandato.

Nella soluzione presente abbiamo supposto tacitamente che il poligono fosse nel voto, passiamo adesso a sciogliere la stessa proposizione, nella ipotesi che esso sia in un mezzo resistente.

È dimostrato nella teorica del moto scendente dei gravi ne' mezzi resistenti, che $-2ms = \log. \frac{\varphi - mu^2}{\varphi - ma^2}$, esprimendo m il nostro prodotto gk^2, ed s, φ, a, ed u, al solito, lo spazio, la forza acceleratrice costante, la velocità iniziale, e la finale; adunque, supponendo $s = l_x$, $\varphi = g \cos.\beta_x$, $a = v_x \cos.\alpha_x$, ed $u = v_{x+1}$,

$$\text{si avrà } 2ml_x = \log. \frac{\cos.\beta_x - k^2 v^2_x \cos.^2\alpha_x}{\cos.\beta_x - k^2 v^2_{x+1}};$$

cioè ordinando rispetto alla velocità v_x, sarà

$$v^2_{x+1} - e^{-2ml_x} \cos.^2\alpha_x v^2_x = \frac{\cos.\beta_x}{k^2}\left(1 - e^{-2ml_x}\right):$$

equazione la quale integrata colla regola anzi accennata, dà immediatamente

$$v_x = e^{\Sigma \log. e^{-ml_x} \cos.\alpha_x} \sqrt{\left(A^2 + \frac{1}{k^2} \Sigma \frac{(e^{2ml_x} - 1)\cos.\beta_x}{\cos.^2\alpha_x} e^{-\Sigma \log. e^{-2ml_x} \cos.^2\alpha_x}\right)}$$

A^2 esprimendo la costante arbitraria, la quale si determinerà secondo le circostanze.

Nella teorica medesima del moto dei gravi, si dimostra anche, che

$$2\theta\sqrt{m\varphi} = \log. \frac{(\sqrt{\varphi} + u\sqrt{m})(\sqrt{\varphi} - a\sqrt{m})}{(\sqrt{\varphi} - u\sqrt{m})(\sqrt{\varphi} + a\sqrt{m})},$$

θ rappresentando il tempo; e perciò, supponendo in questa equazione $\theta = \Delta t_x$, si avrà

$$2gk\Delta t_x \sqrt{\cos.\beta_x} = \log. \frac{(\sqrt{\cos.\beta_x} + kv_{x+1})(\sqrt{\cos.\beta_x} - kv_x \cos.\alpha_x)}{(\sqrt{\cos.\beta_x} - kv_{x+1})(\sqrt{\cos.\beta_x} + kv_x \cos.\alpha_x)}.$$

Quindi integrando il valore di Δt_x cavato da quest'ultima equazione, ed estendendo l'integrale fra i limiti prescritti, si otterrà il tempo dimandato t_x.

Corollario 1. Supponendo nell'ultima espressione della velocità $k=0$, cioè supponendo trascurabile la resistenza del mezzo nel quale è posto il poligono, si ha

$$v_x = e^{\Sigma \log.\cos.\alpha_x} \sqrt{A^2 + \Sigma \tfrac{0}{0}},$$

cioè un apparentemente indeterminato e di secondo ordine; e però il valore dell'integrale, che diventa indeterminato in questo caso, sarà eguale all'integrale finito del differenziale secondo del numeratore

$$(e^{2ml_x} - 1)\cos.\beta_x \, e^{-\Sigma \log. e^{-2ml_x} \cos.^2\alpha_x},$$

diviso per quello del denominatore $k^2 \cos.^2\alpha_x$, presi ambedue questi differenziali rispetto alla k, e fatto poscia in essi $k=0$ (§. 50): operazioni le quali eseguite danno

$$\Sigma \tfrac{0}{0} = 2g \, \Sigma \frac{l_x \cos.\beta_x}{\cos.^2\alpha_x} \, e^{-\Sigma \log.\cos.^2\alpha_x}; \text{ e perciò}$$

$$v_x = e^{\Sigma \log.\cos.\alpha_x} \sqrt{A^2 + 2g\Sigma \frac{l_x \cos.\beta_x}{\cos.^2\alpha_x} \, e^{-\Sigma \log.\cos.^2\alpha_x}},$$

come abbiamo superiormente trovato.

Corollario 2. Se il poligono fosse piano, e i lati e gli angoli fossero fra loro eguali, e che il primo lato cadesse secondo la verticale OH, si avrebbe, mediante la equazione $\beta_x = x\alpha$

$$v_x = \cos.^x\alpha \, e^{-mlx} \sqrt{A^2 + \frac{e^{2ml} - 1}{k^2 \cos.^2\alpha} \Sigma \frac{\cos.x\alpha}{\cos.^{2x}\alpha} \, e^{2mlx}},$$

ossia facendo l'integrazione ancora semplicemente indicata

$$v_x = \cos.^x\alpha \, e^{-mlx} \sqrt{\left(A^2 + \frac{e^{2ml} - 1}{k^2 \cos.^2\alpha} \cdot \frac{M\cos.x\alpha + N\,\text{sen}.x\alpha}{M^2 + N^2} \cdot \frac{e^{2mlx}}{\cos.^{2x}\alpha}\right)},$$

supposto $\frac{e^{2ml} - \cos.\alpha}{\cos.\alpha} = M$, e $\frac{\text{sen}.\alpha}{\cos.^2\alpha} e^{2ml} = N$.

Corollario 3. Ammesso che abbiano luogo simultaneamente le cose espresse nei due Corollari antecedenti, avrassi

$$v_x = \cos.^x\alpha \sqrt{\left(A^2 + \frac{2gl}{\cos.^2\alpha} \cdot \frac{M\cos.x\alpha + N\,\text{sen}.x\alpha}{M^2 + N^2} \cdot \cos.^{-2x}\alpha\right)},$$

essendo qui $M = \frac{1 - \cos.\alpha}{\cos.\alpha}$, ed $N = \frac{\text{sen}.\alpha}{\cos.^2\alpha}$.

Corollario 4. Nel caso che il poligono fosse tutto in un piano orizzontale, sarebbe β_x un angolo retto; e perciò

$$v_x = \mathrm{A}e^{\Sigma \log .\, e^{-ml_x} \cos .\, \alpha_x} .$$

E se il poligono fosse, di più, nel vòto, o fosse trascurabile la resistenza del mezzo, si avrebbe $v_x = \mathrm{A}e^{\Sigma \log .\, \cos .\, \alpha_x}$, ovvero (§. 28)

$$v_x = \mathrm{A} \cos .\, \alpha_{x-1} \cos .\, \alpha_{x-2} \cos .\, \alpha_{x-3} \ldots\ldots \cos .\, \alpha_2 \cos .\, \alpha_1 \cos .\, \alpha_0 ;$$

di più se gli angoli fossero tra di loro uguali, quest'ultima espressione darebbe $v_x = \mathrm{A} \cos .^x \alpha$, cioè le successive velocità $v_0, v_1, v_2, \ldots . v_{x-2}, v_{x-1}, v_x, \ldots$ formerebbero una progressione geometrica decrescente.

Osservazione 1. Ommetto qui un Corollario simile al secondo della prima proposizione, ed altri quattro rispetto al tempo analoghi agli anzi esposti per la velocità, perchè sarebbero quasi una ripetizione di quelli, e passo invece a generalizzare la proposizione esposta, cioè ad indicare come si possono trovare la velocità, e il tempo, nella ipotesi di qualunque poligono e di qualsivoglia moto ordinario, lungo a ciascun lato; tali però, come qui sotto suppongansi.

Qualunque sia il poligono dato, cioè sia a semplice, o a doppia inflessione, rettilineo, o curvilineo, ovvero mistilineo, rappresentando colla l_x la lunghezza del suo lato $(x+1)$ esimo, e colla $f(\theta)$ una funzione del tempo θ, la quale sia eguale allo zero con esso nel principio dell'$(x+1)$ esimo lato, e dia lo spazio percorso nel moto col quale il corpo percorre lo stesso lato, si avranno le due equazioni

$$l_x = f(\Delta t_x), \text{ e } v_{x+1} = \left(\frac{df(\Delta t_x)}{d\Delta t_x}\right),$$

colle quali si otterranno, siccome superiormente, i valori della velocità v_x, e del tempo t_x.

Osservazione 2. Conoscendo il poligono e la sua posizione, e però le espressioni del lato l_x, e degli angoli α_x, β_x, abbiamo veduto, come si possono trovare i valori e della velocità v_x e del tempo t_x; reciprocamente, conoscendo le espressioni del tempo t_x e della velocità v_x, e di un'altra delle cinque quantità l_x, α_x, β_x contenute anch' esse nelle due equazioni, che hanno servito per risolvere la proposizione diretta, troveransi facilmente le altre due. In generale, date tre delle stesse cinque quantità, si potranno rinvenire, colle medesime equazioni, le altre due corrispondenti: anzi le stesse tre quantità che le medesime equazioni lasciano indeterminate in modo tale, che il poligono abbia qualche singolare proprietà.

Osservazione 3. Volendo paragonare fra loro gli elementi dei moti di due o più corpi, che percorrono un medesimo poligono, ovvero poligoni diversi, che hanno tra loro dei rapporti dati, coll'ajuto delle formole esposte nella proposizione anzi trattata, si potranno seguire le stesse regole, che seguonsi in casi simili, quando i moti sono ordinarj; ossia quella che si seguirà nell'esempio seguente, esposto per tale soggetto, la quale è particolare alla natura del moto di cui si parla in questa Memoria.

Esempio. „ Quale distanza avranno due corpi, che per-
„ corrono lo stesso poligono rettilineo . . . ABC . . . (*Fig.* 1)
„ interamente posto in un piano orizzontale, quando il più
„ avanzato di essi sarà arrivato all'angolo x esimo B, essen-
„ do v_1, v'_1 le velocità colle quali hanno percorso il primo
„ lato del medesimo poligono, ed m la distanza che aveva-
„ no quando il più avanzato trovavasi alla fine dello stesso
„ lato; e tale essendo il poligono, che il primo corpo non
„ arriva giammai alla fine di un lato qualunque, prima che
„ non sia arrivato al medesimo il secondo corpo.

Soluzione. Supponendo il primo corpo giunto all'angolo x esimo B, e il secondo in n, δ_x la distanza nB cercata, v_x la velocità colla quale il primo corpo percorre l'x esimo lato AB, e v'_x quella del secondo, sarà $\delta_x : v'_x$ il tempo corso nel passare il secondo corpo dal punto n all'angolo x esimo B; e perciò $\delta_x : v'_x$ moltiplicato per la velocità v_{x+1}, ossia il prodotto $\delta_x v_{x+1} : v'_x$ sarà lo spazio o porzione del lato ($x+1$) esimo BC, che avrà percorso nel medesimo tempo

$\delta_x : v'_x$ il primo corpo; quindi alla fine di questo medesimo tempo sarà esso distante dall'angolo $(x+1)$ esimo C, di

$$l_{x+1} - \frac{\delta_x}{v'_x} v_{x+1} :$$

distanza o spazio, che percorrerà evidentemente nel tempo espresso da

$$\frac{l_{x+1}}{v_{x+1}} - \frac{\delta_x}{v'_x} .$$

Ma in questo stesso tempo il secondo corpo percorre lo spazio o porzione

$$\left(\frac{l_{x+1}}{v_{x+1}} - \frac{\delta_x}{v'_x}\right) v'_{x+1}$$

del medesimo $(x+1)$ esimo lato BC; adunque arrivato che sia il primo corpo, ossia il più avanzato all'angolo $(x+1)$ esimo, la distanza di essi sarà eguale ad

$$l_{x+1} - \left(\frac{l_{x+1}}{v_{x+1}} - \frac{\delta_x}{v'_x}\right) v'_{x+1} ;$$

e per tanto si avrà, fra le funzioni incognite δ_x, δ_{x+1} dimandate, la equazione

$$\delta_{x+1} = l_{x+1} - \left(\frac{l_{x+1}}{v_{x+1}} - \frac{\delta_x}{v'_x}\right) v'_{x+1} ,$$

la quale si riduce evidentemente, col Corollario ultimo della proposizione anzi esposta alla seguente

$$\delta_{x+1} - \cos.\, \alpha_x \delta_x = \frac{v_1 - v'_1}{v_1} l_{x+1} ,$$

che integrata dà (§. 40)

$$\delta_x = e^{\Sigma \log.\cos.\alpha_x} \left(B + \frac{v_1 - v'_1}{v_1} \Sigma \frac{l_{x+1}}{\cos.\alpha_x} e^{-\Sigma \log.\cos.\alpha_x} \right) ,$$

B rappresentando la costante arbitraria introdotta dalla integrazione, la quale si determinerà col soddisfare, con essa, alla equazione data $\delta_1 = m$.

Del moto sulla superficie di un poliedro dato .

PROPOSIZIONE IV.

„ Determinare le quantità dalle quali dipende la conoscenza sì geometrica che meccanica dello stato di un corpo obbligato a scorrere sopra la superficie di un dato poliedro di faccie piane, conoscendo le equazioni delle successive faccie del medesimo poliedro nelle quali trovansi i lati del poligono che descrive il corpo, e la grandezza e direzione della velocità colla quale comincia a moversi sulla medesima superficie, supposto che non sia stimolato da veruna forza acceleratrice .

SOLUZIONE . Siano $u^{(x)}$, $y^{(x)}$, e $z^{(x)}$ le coordinate di un punto qualunque di quel piano di cui è porzione la faccia del poliedro nella quale vi è il lato x esimo del poligono descritto dal corpo; $u^{(x+1)}$, $y^{(x+1)}$, e $z^{(x+1)}$ di quel nel quale vi è la faccia in cui trovasi il lato $(x+1)$ esimo; e

$$z^{(x)}+A_xu^{(x)}+B_xy^{(x)}+C_x=0\,,$$

$$z^{(x+1)}+A_{x+1}u^{(x+1)}+B_{x+1}y^{(x+1)}+C_{x+1}=0$$

le equazioni dei piani medesimi, A_x , B_x , e C_x rappresentando i tre soliti parametri, in questo caso funzioni conosciute della x, dai quali si fa dipendere ordinariamente la posizione del piano rispetto a tre assi ortogonali .

Similmente, siano $u_{,}^{(x)}$, $y_{,}^{(x)}$ le coordinate di un punto qualunque della projezione, sul piano delle coordinate u, y della retta nella quale si trova il lato x esimo del poligono che descrive il corpo; $u_{,}^{(x+1)}$, $y_{,}^{(x+1)}$ quelle della projezione di quella retta nella quale vi è il lato seguente; ed

$$y_{,}^{(x)}+\alpha_xu_{,}^{(x)}+\beta_x=0\,,\; y_{,}^{(x+1)}+\alpha_{x+1}u_{,}^{(x+1)}+\beta_{x+1}=0$$

le loro equazioni, α_x , e β_x esprimendo due funzioni incognite del numero x, dalle quali dipende, evidentemente, la conoscenza dello stato geometrico del corpo .

In ultimo,

$$z+M_xu+N_xy+P_x=0$$

sia la equazione del piano che passa pel lato x esimo del poligono suddetto, perpendicolarmente alla faccia del poliedro nella quale vi è il lato $(x+1)$ esimo dello stesso poligono; cioè li suoi parametri M_x, N_x, e P_x abbiano le relazioni espresse dalle seguenti equazioni

$$M_x - N_x\alpha_x + B_x\alpha_x - A_x = 0,$$
$$P_x - N_x\beta_x + B_x\beta_x - C_x = 0,$$
$$1 + M_xA_{x+1} + N_xB_{x+1} = 0.$$

Se la velocità che ha il corpo alla fine del lato x esimo del poligono che esso descrive, cioè nell'istante che urta nel piano della faccia del poliedro nella quale vi è il lato $(x+1)$ esimo del poligono stesso, si scompone in due, una perpendicolare e l'altra secondo il piano medesimo, la prima di queste componenti sarà interamente distrutta dal piano stesso, e la seconda sarà quella colla quale continuerà il movimento, descrivendo il lato $(x+1)$ esimo: e siccome la direzione di questa componente cade nella intersezione dei due piani espressi dalle equazioni

$$z^{(x+1)} + A_{x+1}u^{(x+1)} + B_{x+1}y^{(x+1)} + C_{x+1} = 0,$$
$$z + M_xu + N_xy + P_x = 0,$$

per cui ha per projezione sul piano delle coordinate u, y una retta avente per equazione

$$y^{(x+1)} + \frac{A_{x+1} - M_x}{B_{x+1} - N_x}u^{(x+1)} + \frac{C_{x+1} - P_x}{B_{x+1} - N_x} = 0,$$

la quale risulta eliminando l'ordinata z dalle due antecedenti: così, quest'ultima equazione, che rappresenta la projezione della direzione della velocità, sul piano delle coordinate u, y, colla quale il corpo percorre il lato $(x+1)$ esimo del poligono che esso descrive, dovrà coincidere colla equazione supposta del medesimo lato, cioè colla seguente

$y_{,}^{(x+1)} + \alpha_{x+1}u_{,}^{(x+1)} + \beta_{x+1} = 0$; e perciò sarà

$$\alpha_{x+1} = \frac{A_{x+1} - M_x}{B_{x+1} - N_x}, \text{ e } \beta_{x+1} = \frac{C_{x+1} - P_x}{B_{x+1} - N_x}.$$

Vale a dire fra le cinque funzioni ancora incognite M_x, N_x, P_x, α_x, e β_x si avranno le cinque equazioni seguenti

$$M_x - N_x\alpha_x + B_x\alpha_x - A_x = 0,$$
$$P_x - N_x\beta_x + B_x\beta_x - C_x = 0,$$
$$1 + M_xA_{x+1} + N_xB_{x+1} = 0,$$
$$M_x - A_{x+1} + (B_{x+1} - N_x)\alpha_{x+1} = 0,$$
$$N_x - C_{x+1} + (B_{x+1} - N_x)\beta_{x+1} = 0,$$

colle quali si potranno esse determinare.

Ponendo nella terza e quarta di queste equazioni in luogo della M_x il suo valore desunto dalla prima di esse, si ottengono le due nuove equazioni

$$\Delta(B_x\alpha_x - A_x) - N_x\Delta\alpha_x = 0,$$
$$1 + A_xA_{x+1} - B_xB_{x+1}\alpha_x + (B_x + A_{x+1}\alpha_x)N_x = 0;$$

e da queste eliminando la N_x, ed ordinando rispetto alla α_x la equazione risultante, hassi la sola equazione delle differenze finite seguente

$$(B)\ldots\ldots A_{x+1}\Delta B_x\alpha_x\alpha_{x+1} + (A_xA_{x+1} + B^2_{x+1} + 1)\alpha_{x+1} - (A^2_{x+1} + B_xB_{x+1} + 1)\alpha_x - B_{x+1}\Delta A_x = 0$$

dalla cui integrazione dipende attualmente il valore della funzione α_x.

Per integrare quest'ultima equazione, suppongasi

$$\alpha_x = \xi_x - \frac{A_xA_{x+1} + B^2_{x+1} + 1}{A_{x+1}\Delta B_x},$$

ξ_x esprimendo una nuova funzione incognita, e si avrà

$$\xi_x\xi_{x+1} - d_x\xi_x - e_x = 0$$

supposto $\dfrac{1 + A_xA_{x+1} + B^2_{x+1}}{A_{x+2}\Delta B_{x+1}} + \dfrac{1 + A^2_{x+1} + B_xB_{x+1}}{A_{x+1}\Delta B_x} = d_x$, e

$$\frac{B_{x+1}\Delta A_x}{A_{x+1}\Delta B_x} - \frac{(A_xA_{x+1} + B^2_{x+1} + 1)(A^2_{x+1} + B_xB_{x+1} + 1)}{(A_{x+1}\Delta B_x)^2} = e_x,$$

la quale dà immediatamente

$$\xi_x = d_{x+1} + \cfrac{e_{x-1}}{d_{x-2} + \cfrac{e_{x-2}}{d_{x-3} + \cfrac{e_{x-3}}{\ddots\; d_2 + \cfrac{e_2}{d_1 + \cfrac{e_1}{\xi_1}}}}}.$$

Quindi l'integrale completo della equazione (B) sarà

$$\alpha_x = -\frac{1 + A_xA_{x+1} + B^2_{x+1}}{A_{x+1}\Delta B_x} + d_{x-1} + \cfrac{e_{x-1}}{d_{x-2} + \cfrac{e_{x-2}}{d_{x-3} + \cfrac{e_{x-3}}{\ddots\; d_2 + \cfrac{e_2}{d_1 + \cfrac{e_1}{\xi_1}}}}},$$

ξ_1 esprimendo la costante arbitraria.

Dalle medesime cinque equazioni desumonsi anche i valori delle altre quattro funzioni M_x, N_x, β_x, P_x; cioè

$$M_x = A_x - B_x\alpha_x + \frac{\alpha_x}{\Delta\alpha_x}\Delta(B_x\alpha_x - A_x),$$

$$N_x = \frac{\Delta(B_x\alpha_x - A_x)}{\Delta\alpha_x},$$

$$\beta_x = \left(F + \Sigma\frac{\Delta C_x}{B_x - N_x}e^{\Sigma\log.\frac{B_{x+1}-N_x}{B_x-N_x}}\right)e^{\Sigma\log.\frac{B_x-N_x}{B_{x+1}-N_x}},\ \text{e}$$

$$P_x = C_x + (N_x - B_x)\beta_x,$$

F esprimendo una nuova costante arbitraria introdotta da una integrazione eseguita di una equazione lineare di primo ordine.

Le costanti ξ_1, ed F introdotte dalle integrazioni, determineransi col soddisfare, con esse, alle due condizioni espresse nel dato della proposizione; cioè che il corpo parte da un punto dato di una faccia del poliedro, vale a dire di quella nella quale trovasi il primo lato del poligono che esso descrive; e che dirigesi secondo una retta di direzione, pure data.

Ponendo nella equazione

$$y_1^{(x)} + \alpha_x u_1^{(x)} + \beta_x = 0$$

invece delle funzioni α_x, β_x i loro valori trovati sopra, otterrassi la equazione della projezione sul piano delle coordinate u, y, del lato x esimo del poligono che descrive il corpo, la quale combinata coll'altra della faccia x esima del poliedro, cioè colla

$$z^{(x)} + A_x u^{(x)} + B_x y^{(x)} + C_x = 0;$$

ovvero combinata colla seguente

$$z^{(x)} + (A_x - B_x\alpha_x)u^{(x)} - B_x\beta_x + C_x = 0,$$

che risulta eliminando la $y^{(x)}$ dalle due antecedenti, darà la posizione del medesimo lato x esimo del poligono descritto dal corpo.

Chiamate u_x, y_x, e z_x le tre coordinate del vertice dell'angolo formato dai lati x, $(x+1)$ esimi del poligono suddetto, avransi, fra esse, evidentemente le tre equazioni

$$y_x + \alpha_x u_x + \beta_x = 0,$$
$$y_x + \alpha_{x+1} u_x + \beta_{x+1} = 0,$$
$$z_x + (\mathrm{A}_x - \mathrm{B}_x \alpha_x) - \mathrm{B}_x \beta_x + \mathrm{C}_x = 0,$$

le quali danno $u_x = -\frac{\Delta\beta_x}{\Delta\alpha_x}$,

$$y_x = \frac{\alpha_x \Delta\beta_x - \beta_x \Delta\alpha_x}{\Delta\alpha_x},$$

$$z_x = \frac{\mathrm{A}_x \Delta\beta_x - \mathrm{C}_x \Delta\alpha_x + \mathrm{B}_x(\beta_x \Delta\alpha_x - \alpha_x \Delta\beta_x)}{\Delta\alpha_x},$$

per le coordinate del vertice dell'angolo sopradetto.

Ora, conoscendosi le equazioni dei vertici degli angoli del poligono che descrive il corpo, cioè le così dette equazioni del medesimo poligono, e perciò il poligono stesso; e pel dato della proposizione, conoscendosi la velocità colla quale il corpo descrive il primo lato del medesimo poligono, facilissimamente colla proposizione antecedente si determineranno tutte le altre quantità dalle quali dipende la conoscenza completa dello stato del corpo ad un istante qualunque del suo movimento.

Osservazione. Se i piani delle faccie del poliedro nelle quali vi sono i lati del poligono descritto dal corpo, fossero perpendicolari al piano delle coordinate z, y, od a quello delle u, z, si avrebbe nel primo caso $\mathrm{A}_x = 0$, e nel secondo $\mathrm{B}_x = 0$; e però la equazione (B) delle differenze finite, trovata superiormente, diventerebbe

$$(1 + \mathrm{B}^2_{x+1})\alpha_{x+1} - (\mathrm{B}_x \mathrm{B}_{x+1} + 1)\alpha_x = 0, \text{ od}$$
$$(1 + \mathrm{A}_x \mathrm{A}_{x+1})\alpha_{x+1} - (1 + \mathrm{A}^2_{x+1})\alpha_x = 0,$$

le quali sono integrabili colla stessa regola colla quale s'integrano tutte le equazioni del primo ordine lineari (§. 40).

Esempio. Le faccie del poliedro nelle quali vi sono i lati del poligono descritto dal corpo siano perpendicolari tutte al piano delle coordinate u, z sopra i lati del poligono equilatero inscritto in un cerchio avente il centro nella origine delle coordinate, e per raggio r, e di cui cadaun lato sottenda un arco, della circonferenza del medesimo circolo, di gradi a; cioè sia

$$z^{(x)} - \frac{\Delta \cos. xa}{\Delta \operatorname{sen}. xa} u^{(x)} - r \frac{\operatorname{sen}. a}{\Delta \operatorname{sen}. xa} = 0$$

la equazione del piano della faccia del poliedro nella quale trovasi il lato x esimo del poligono che descrive il corpo, e si avrà

$$\mathrm{A}_x = -\frac{\Delta \cos. xa}{\Delta \operatorname{sen}. xa},\ \mathrm{B}_x = 0,\ \text{e}\ \mathrm{C}_x = -r \frac{\operatorname{sen}. a}{\Delta \operatorname{sen}. xa};\ \text{e perciò}$$

$$1 + \mathrm{A}_x \mathrm{A}_{x+1} = 2(1 - \cos. a)\cos. a : \Delta \operatorname{sen}. ax \Delta \operatorname{sen}. (x+1)a,\ \text{ed}$$
$$1 + \mathrm{A}^2_{x+1} = 2(1 - \cos. a) : (\Delta \operatorname{sen}. (x+1)^2.$$

Quindi la seconda delle ultime equazioni qui sopra esposte, diventerà, in questo caso,

$$\alpha_{x+1} - \frac{\Delta \operatorname{sen}. (x+1)a}{\cos. a \Delta \operatorname{sen}. xa} \alpha_x = 0,$$

la quale integrata, colla regola sopra accennata, dà

$$\alpha_x = \mathrm{T} : \cos.^x a \Delta \operatorname{sen}. xa,$$

T esprimendo la costante arbitraria.

Ommetto alcune altre osservazioni rispetto alla equazione (B), perchè sarebbero relative a dei casi particolarissimi della proposta proposizione: come pure, tralascio di trattare la proposizione medesima nella ipotesi che le faccie del poliedro sieno superficie qualsivogliano, ed il moto in ciascuna di esse qualunque, ordinario, o discreto esso medesimo; giacchè pochissimo potrei sviluppare la sua dichiarazione, nello stato attuale della analisi, abbracciando questa generalità.

Del moto semilibero.

Un corpo che si move liberamente urti in una linea o in una superficie data per cui sia esso obbligato, continuando il movimento, a moversi ancora liberamente, ma con un altro moto della medesima o di diversa specie dell'antecedente; di nuovo, dopo un certo tempo, urti altrove nella linea o superficie già urtata, o in un'altra differente, e venga obbligato nuovamente a moversi con un altro moto della stessa natura, o di natura diversa dalle due precedenti: e così continui indefinitamente il suo moto.

Il moto di questo corpo, il quale dipende evidentemente dalle linee o superficie urtate di mano in mano, senza percorrerle, lo chiameremo *semilibero*. Ed incominceremo a parlare di esso colla proposizione che qui segue, la quale fu trattata già da altri, e particolarmente da *Francesco M. Zanotti* per via sintetica, e dal Sig. *Luigi Forni* per via analitica, ma sempre però nella ipotesi che il corpo fosse perfettamente elastico, e che il moto si facesse nel vòto, circostanze le quali rendono sì facile la soluzione di essa, che sembra allora di tutt'altra natura.

Proposizione V.

„ Trovare la velocità colla quale un corpo di elasticità
„ imperfetta percuote un lato qualunque di un poligono da-
„ to posto in un piano orizzontale, l'angolo d'incidenza, la
„ posizione del punto della percossa, ed il tempo corso, co-
„ noscendo queste quattro quantità pel primo lato; e sa-
„ pendo che il corpo è stato riflesso dal primo lato contro
„ il secondo, dal secondo contro il terzo, da questo contro
„ il quarto, e così di mano in mano da un lato contro il
„ suo seguente; e che tutto è succeduto in un mezzo resi-
„ stente.

Soluzione. Sia ... ABC ... il poligono dato (*Fig.* 2); AB $= l_x$, BC $= l_{x+1}$, ... i suoi lati x, $x+1$, ... esimi; B l'x esimo angolo; E il punto della percossa x esima, e D della $(x+1)$ esima; t_x il tempo corso nell'arrivare in E, e Δt_x quello decorso nel percorrere ED; s_x lo spazio trascorso dal principio del moto, ossia dalla prima percossa, sino in E, e però $\Delta s_x =$ ED; v_x la velocità alla fine del lato x esimo EF del poligono che descrive il corpo, ossia la cercata, e v_{x+1} quella alla fine dell'$(x+1)$ esimo lato dello stesso poligono;

AE $=\beta_x$, BD $=\beta_{x+1}$ . . .; il poligono EAF . . . sino a tutto il primo lato del medesimo poligono dato uguale a c_x; a_x, a_{x+1}, . . . finalmente, siano le tangenti degli angoli B, C, . . . del poligono dato, ed ω_x, ω_{x+1} . . . quelle degli angoli d'incidenza dimandati.

Benchè in questa proposizione siano molte le quantità incognite, nulla di meno, la sola tangente dell'angolo d'incidenza è quella tra esse, che abbia colle quantità cognite, un immediato rapporto, il quale sia indipendente dalle altre quantità incognite; e per questo, cominceremo la soluzione colla ricerca della espressione generale dell'angolo d'incidenza dimandato, cioè della sua tangente.

Essendo la somma degli angoli BED, EDB, DBE eguale a due retti, sarà la tangente di uno di essi, per esempio di EDB eguale a meno quella della somma degli altri due; cioè

$$\text{tang.EDB}=(\text{tang.BED}+\text{tang.DBE}):(\text{tang.BED}\,\text{tang.DBE}-1);$$

e sostituendo a_x, $r\omega_x$, ed ω_{x+1} invece di tang.DBE, tang.BED, tang. EDB, ed ordinando la equazione risultante rispetto alla ω_x, si avrà

$$(C)\ldots\ldots ra_x\omega_x\omega_{x+1}-\omega_{x+1}-r\omega_x-a_x=0:$$

equazione la quale integrata, darà la espressione della tangente di un angolo qualunque d'incidenza, esprimendo essa, come si vede, la relazione fra le tangenti di due di questi angoli tra di loro contigui.

Per avere l'integrale della equazione (C), supponghiamo

$$\omega_x=\frac{a_x}{\alpha_x-r},$$

esprimendo la α_x una nuova funzione incognita, ed avremo

$$\alpha_x\alpha_{x+1}-A_x\alpha_x-B_x=0,$$

supposto $r\frac{1+a^2_x}{a_x}a_{x+1}=B_x$, ed $\frac{ra_x-a_{x+1}}{a_x}=A_x$, la quale equazione dà

$$\alpha_x=A_{x-1}+\frac{B_{x-1}}{a_{x-1}},\text{ ovvero}$$

$\alpha_x =$

$$\alpha_x = A_{x-1} + \cfrac{B_{x-1}}{A_{x-2} + \cfrac{B_{x-2}}{A_{x-3} + \cfrac{B_{x-3}}{\ddots A_1 + \cfrac{B_1}{A_0 + \cfrac{B_0}{\alpha_0}}}}},$$

α_0 rappresentando una costante arbitraria. Quindi sostituendo questo valore della α_x nella espressione $\frac{\alpha_x}{\alpha_x - r}$, si avrà

$$\omega_x = \cfrac{\alpha_x}{-r + A_{x-1} + \cfrac{B_{x-1}}{A_{x-2} + \cfrac{B_{x-2}}{A_{x-3} + \cfrac{B_{x-3}}{\ddots A_1 + \cfrac{B_1}{A_0 + \cfrac{B_0}{\alpha_0}}}}}}$$

integrale completo della equazione (C); ossia espressione generale della tangente dell'angolo d'incidenza.

Onde determinare la costante arbitraria α_0, nella ipotesi ammessa, che si conosca cioè il valore di ω_0, facciasi $x = 0$ in quest'ultima equazione, e si avrà $\omega_0 = \frac{\alpha_0}{-r + \alpha_0}$; e perciò $\alpha_0 = r + \frac{\alpha_0}{\omega_0}$.

Corollario 1. Se tutti gli angoli del poligono dato fossero eguali fra di loro, sarebbero eguali ancora le loro tangenti, per cui tanto α_x, quanto A_x e B_x sarebbero costanti; e però $\omega_x = \cfrac{\alpha}{-r + A + \cfrac{B}{A + \cfrac{B}{A + \cfrac{B}{\ddots A + \cfrac{B}{A + \cfrac{B}{r + \cfrac{\alpha}{\omega_0}}}}}}}$

continuando la frazione continua sino alla x esima divisione.

Quantunque si possa avere l'integrale della equazione (C) nella ipotesi attuale, collo stesso metodo col quale si ha in generale, come vediamo, nulladimeno espongo il seguente, per averlo senza il soccorso delle frazioni continue, e con una espressione composta di pochi termini finiti.

Supposto $\omega_x = y_x + \beta$, rappresentando y_x una funzione, e β una costante ambedue incognite, si avrà

$$ray_xy_{x+1}+(ra\beta-1)y_{x+1}+(ra\beta-r)y_x+ra\beta^2-(r+1)\beta-a=0, \text{ ossia}$$

$$ray_xy_{x+1}+(ra\beta-1)y_{x+1}+(ra\beta-r)y_x=0;$$

purchè si determini il valore di β colla equazione di secondo grado seguente

$$\beta^2-\frac{r+1}{ar}\beta-\frac{1}{r}=0.$$

Ma la equazione in y_x ha la forma di quella, che ci diede la velocità nella prima proposizione, e che integrammo colla supposizione di $y_x = \frac{1}{z_x}$; adunque anch'essa sarà integrabile colla medesima supposizione. E di fatto, supponendo $y_x = \frac{1}{z_x}$, essa si cambia in un' altra equazione lineare, la quale integrata colle regole note (§. 40), dà immediatamente $z_x = C\left(\frac{ar\beta-1}{r-ar\beta}\right)^x + \frac{ar}{r-2ar\beta+1}$. Quindi

$$\omega_x = \beta + 1 : \left\{ C\left(\frac{ar\beta-1}{r-ar\beta}\right)^x + \frac{ar}{r-2ar\beta+1} \right\},$$

C esprimendo la costante arbitraria introdotta dalla integrazione della equazione in z_x, la quale facilmente si determina, nella ipotesi, che si conosca ω_0, come sopra.

Corollario 2. Considerando successivamente gli angoli di alcuni poligoni, e collo stesso ordine come si succedono nella figura, accade, che dopo un determinato numero, ne seguono altrettanti, eguali ciascuno agli antecedenti, cioè il primo di questi eguaglia il primo di quelli, il secondo eguaglia il secondo, il terzo il terzo, ec.; a questi ne seguono di nuovo altrettanti che hanno tanto coi primi, quanto coi loro antecedenti la stessa proprietà, e così di mano in mano: dimodochè la serie degli angoli, in questi poligoni, non è che una ordinata ripetizione dei primi.

In tutti i poligoni nei quali ha luogo questa proprietà, tra i quali evidentemente avvi il ramo estesissimo dei chiusi o rientranti, si può avere la espressione generale della tangente dell'angolo d'incidenza col metodo che segue, il quale è assai più breve del generale, esposto superiormente.

Sia il periodo degli angoli del poligono dato composto di n di loro, cioè sia
$a_0 = a_n = a_{2n} =$ ec., $a_1 = a_{n+1} = a_{2n+1} =$ ec., ... $a_{n-1} = a_{2n-1} = a_{3n-1} =$ ec., e sarà
$A_0 = A_n = A_{2n} =$ ec., $A_1 = A_{n+1} = A_{2n+1} =$ ec., ... $A_{n-1} = A_{2n-1} = A_{3n-1} =$ ec., e
$B_0 = B_n = B_{2n} =$ ec., $B_1 = B_{n+1} = B_{2n+1} =$ ec., ... $B_{n-1} = B_{2n-1} = B_{3n-1} =$ ec.;
e perciò, supponendo $x = in$ nella espressione di α_x trovata sopra, i esprimendo un numero intero qualunque, avrassi

$$\alpha_{in} = A_{n-1} + \cfrac{B_{n-1}}{A_{n-2} + \cfrac{B_{n-2}}{\ddots\; A_0 + \cfrac{B_0}{A_{n-1} + \cfrac{B_{n-1}}{A_{n-2} + \cfrac{B_{n-2}}{\ddots\; A_0 + \cfrac{B_0}{\alpha_0}}}}}}\,.$$

E considerando α funzione del numero dei periodi indicato colla i, i quali precedono l'angolo che ha per tangente a_{in},

si avrà $\alpha_i = A_{n-1} + \cfrac{B_{n-1}}{A_{n-2} + \cfrac{B_{n-2}}{\ddots\; A_0 + \cfrac{B_0}{\alpha_{i-1}}}}$.

Quindi facendo sparire la frazione continua, otterrassi, tra α_i, ed α_{i-1} una equazione della forma

$$M\alpha_i\alpha_{i-1} + N\alpha_i + P\alpha_{i-1} + Q = 0,$$

la quale è integrabile colla supposizione, già usata, di $\alpha_i = \beta + \frac{1}{z_i}$, essendo qui pure tutti i coefficienti M, N, P, Q quantità costanti.

L'integrale della ultima equazione ci darà i valori di α_i, ossia di α_{in}; e perciò della tangente ω_x corrispondenti ai valori 0, n, $2n$, $3n$, ... della x, cioè con essa conosceransi le espressioni delle tangenti degli angoli d'incidenza corrispondenti ai primi dei successivi periodi degli angoli del poligono dato.

Ora per avere le espressioni di tutte le tangenti degli altri angoli d'incidenza, cioè di quelli che corrispondono agli altri angoli dei periodi anzidetti, supponghiamo nella espressione generale della α_x, trovata nel principio di questa soluzione, l'indice x eguale ad $in+m$, m esprimendo un numero intero qualunque fra quelli minori di n; ed avremo α_{in+m} eguale alla quantità

$$\mathrm{A}_{m-1}+\cfrac{\mathrm{B}_{n-1}}{\mathrm{A}_{m-2}+\cfrac{\mathrm{B}_{m-2}}{\ddots\,\mathrm{A}_0+\cfrac{\mathrm{B}_0}{\alpha_i}}},$$

la quale è affatto conosciuta. Adunque, intendendo colla i il numero dei periodi suddetti, e colla ω_{in+m} la tangente dell'angolo d'incidenza corrispondente all'm esimo del periodo $(i+1)$ esimo, avremo $\omega_{in+m}=\cfrac{a_n}{-r+\mathrm{A}_{m-1}+\cfrac{\mathrm{B}_{n-1}}{\mathrm{A}_{n-2}+\cfrac{\mathrm{B}_{n-2}}{\ddots\,\mathrm{A}_0+\cfrac{\mathrm{B}_0}{\alpha_i}}}}$,

purchè la funzione α_i sia desunta dalla equazione trovata qui sopra.

Corollario 3. Se tra le successive tangenti a_x, a_{x+1} regnasse la equazione $ra_x=a_{x+1}$, ovvero fosse (§. 39) $a_x=cr^x$; cioè le tangenti dei successivi angoli del poligono dato formassero una progressione geometrica avente per primo termine $c=a_0$, e per ragione la r, sarebbe $\mathrm{A}_x=0$, e $\mathrm{B}_x=r^2(1+c^2r^{2x})$;

e perciò $\alpha_x=\cfrac{\mathrm{B}_{x-1}}{\cfrac{\mathrm{B}_{x-2}}{\cfrac{\mathrm{B}_{x-3}}{\vdots\,\cfrac{\mathrm{B}_0}{\alpha_0}}}}$;

vale a dire, nel caso di x pari $\alpha_x=\dfrac{\mathrm{B}_{x-1}\mathrm{B}_{x-3}\ldots\ldots\mathrm{B}_3\mathrm{B}_1}{\mathrm{B}_{x-2}\mathrm{B}_{x-4}\ldots\ldots\mathrm{B}_2\mathrm{B}_0}\,\alpha_0$,

nel caso di x dispari $\alpha_x=\dfrac{\mathrm{B}_{x-1}\mathrm{B}_{x-3}\ldots\ldots\mathrm{B}_2\mathrm{B}_0}{\mathrm{B}_{x-2}\mathrm{B}_{x-4}\ldots\ldots\mathrm{B}_3\mathrm{B}_1}\cdot\dfrac{1}{\alpha_0}$;

e perciò i valori corrispondenti della tangente ω_x cercata saranno i seguenti, cioè pel caso di x pari $\omega_x = cr^x : \left\{ -r + \frac{(1+c^2r^{2x-2})(1+c^2r^{2x-6}).....(1+c^2r^6)(1+c^2r^2)}{(1+c^2r^{2x-4})(1+c^2r^{2x-8}).....(1+c^2r^4)(1+c^2)} a_0 \right\}$,

e pel caso di x dispari $\omega_x = cr^x : \left\{ -r + \frac{(1+c^2r^{2x-2})(1+c^2r^{2x-6})......(1+c^2r^4)(1+c^2)}{(1+c^2r^{2x-4})(1+c^2r^{2x-8}).....(1+c^2r^6)(1+c^2r^2)} \cdot \frac{1}{a_0} \right\}$.

OSSERVAZIONE. Se tutti gli angoli del poligono dato fossero retti, sarebbe l'a_x infinita, ossia $\frac{1}{a_x} = 0$; e però la equazione (C), ovvero

$$r\omega_x\omega_{x+1} - (\omega_x + r\omega_x)\frac{1}{a_x} - 1 = 0$$

si ridurrebbe alla seguente $r\omega_x\omega_{x+1} - 1 = 0$, la quale dà $r\omega_{x+1}\omega_{x+2} - 1 = 0$; cioè $\omega_x = \omega_{x+2}$; vale a dire tutti i valori della tangente ω_x corrispondenti alla x pari eguali fra loro, come pure tra loro eguali quelli che corrispondono ad x dispari; ciò che è singolare, avuto riguardo alla elasticità imperfetta del mobile.

Trovata la espressione generale della tangente dell'angolo d'incidenza, passiamo a cercare quelle delle altre quantità incognite contenute nella proposizione.

Qualunque sia il poligono dato, e qualunque sia il rapporto della elasticità del corpo alla percossa, si ha sempre

BE : BD : : sen. BDE : sen. BED, ossia

$l_x - \beta_x : \beta_{x+1} :: \varphi\omega_{x+1} : \varphi r\omega_x$, supposto $\omega_x : \sqrt{(1+\omega^2_x)} = \varphi\omega_x$; e perciò

$$\beta_{x+1} + \frac{\varphi r\omega_x}{\varphi\omega_{x+1}}\beta_x - \frac{\varphi r\omega_x}{\varphi\omega_{x+1}} l_x = 0 :$$

equazione la quale integrata colla solita regola generale dà il valore di β_x.

La costante arbitraria che conterrà questo valore di β_x, si determinerà, soddisfacendo la condizione, che è data la posizione del punto, ove è accaduta la prima percossa.

Essendo $\Delta c_x = l_x - \beta_x + \beta_{x+1}$, sarà $c_x = A + \beta_x + \Sigma l_x$, A esprimendo la costante arbitraria, la quale determinerassi, conoscendosi, per ipotesi, la posizione ove è stato percosso il primo lato; cioè come si è determinata quella contenuta nella β_x. Adunque conosciamo c_x, e però la posizione della percossa x esima.

Il triangolo BDE dà $\mathrm{DE}=\sqrt{}(\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{BE}}^2-2\mathrm{BD}.\mathrm{BE}\cos.\mathrm{B})$, ossia $\Delta s_x=\sqrt{}\{(l_x-\beta_x)^2+\beta^2{}_{x+1}-2\beta_{x+1}(l_x-\beta_x):\sqrt{}(1+a^2{}_x)\}$; e perciò lo spazio percorso dal corpo, cioè

$$s_x=\Sigma\sqrt{}\{(l_x-\beta_x)^2+\beta^2{}_{x+1}-2\beta_{x+1}(l_x-\beta_x):\sqrt{}(1+a^2{}_x)\}+\mathrm{B}.$$

Colla teorica del moto ordinario dei corpi che si movano nei mezzi resistenti sopra di un piano orizzontale, si trovano le equazioni

$$u=ae^{-gk^2s},\quad gk^2s=\log.(1+gk^2\theta),$$

nelle quali, a esprime la velocità iniziale, ed s ed u lo spazio e la velocità alla fine del tempo θ; e perciò, se in esse supporremo $s=\Delta s_x$, $\theta=\Delta t_x$, $u=v_{x+1}$, ed

$$a=v_x\sqrt{}(\cos.^2\mathrm{AEF}+r^2\,\mathrm{sen}.^2\mathrm{AEF}),\ \text{ossia}=v_x\sqrt{\left(\frac{1+r^2\omega^2{}_x}{1+\omega^2{}_x}\right)},$$

avremo le equazioni $v_{x+1}-e^{-gk^2\Delta s_x}\sqrt{\left(\frac{1+r^2\omega^2{}_x}{1+\omega^2{}_x}\right)}\,v_x=0$,

$$gk^2\Delta s_x=\log.\left[1+gk^2v_x\sqrt{\left(\frac{1+r^2\omega^2{}_x}{1+\omega^2{}_x}\right)}\Delta t_x\right]$$

colle quali si determinerà la velocità, ed il tempo, che sono le sole quantità ancora incognite.

Integrando la prima di queste due ultime equazioni, e determinando la costante arbitraria introdotta dalla stessa integrazione, soddisfacendo la condizione $s_0=0$, si ha

$$v_x=v_0e^{-gk^2s_x}\sqrt{\left(\frac{1+r^2\omega^2{}_{x-1}}{1+\omega^2{}_{x-1}}\right)\left(\frac{1+r^2\omega^2{}_{x-2}}{1+\omega^2{}_{x-2}}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1+r^2\omega^2{}_2}{1+\omega^2{}_2}\right)\left(\frac{1+r^2\omega^2{}_1}{1+\omega^2{}_1}\right)}.$$

E la seconda delle medesime dà

$$t_x=\Sigma\left(\frac{e^{gk^2\Delta s_x}-1}{gk^2v_0}\right)e^{gk^2s_x}\sqrt{\left(\frac{1+\omega^2{}_{x-1}}{1+r^2\omega^2{}_{x-1}}\right)\left(\frac{1+\omega^2{}_{x-2}}{1+r^2\omega^2{}_{x-2}}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1+\omega^2{}_2}{1+r^2\omega^2{}_2}\right)\left(\frac{1+\omega^2{}_1}{1+r^2\omega^2{}_1}\right)}+\mathrm{D}$$

la costante arbitraria D si determinerà secondo le circostanze.

PROPOSIZIONE VI.

„ Un grave di elasticità imperfetta scagliato secondo la „ retta OE, che non è verticale, descriverà un arco parabolico OSF (*Fig.* 3), e giunto nel punto F, percuotendo „ il piano immobile Oz, ed essendo riflesso, descriverà un

,, secondo arco parabolico FTG, arrivato alla fine del quale
,, di nuovo percuotendo, ed essendo riflesso dallo stesso piano,
,, ne descriverà un terzo; e così continuando il suo movimento,
,, per la velocità di riflessione, alla fine dell'arco
,, parabolico x esimo, che tempo sarà corso, con che velocità
,, ed angolo d'incidenza percuoterà il piano immobile,
,, ed in qual punto, essendo n l'angolo che fa lo stesso piano
,, colla verticale, v_0 la velocità di projezione, ed α_0 l'angolo
,, che fa la direzione di questa velocità col piano medesimo.

Soluzione. ImH sia l'$(x+1)$ esimo arco parabolico descritto dal corpo; t_x il tempo cercato, cioè il decorso nell'arrivare in H; s_x la distanza OH; β_x l'angolo d'incidenza cercato, kHO, ed α_x quello di riflessione corrispondente; u_x la velocità d'incidenza, e v_x la corrispondente di riflessione; t_{x+1}, s_{x+1}, ec. siano per la percossa $(x+1)$ esima, ciò che sono t_x, s_x, ec. per la x esima.

Potendo incominciare la soluzione di questa proposizione colla ricerca di una qualunque delle quattro quantità t_x, u_x, β_x, s_x dimandate, cominceremo con quella dell'angolo β_x, per risparmiare di preparare alcune formole, approfittando di altre, che si conoscono nella teorica ordinaria de' projettili.

Facilmente colla teorica de' projettili si trova

$$\text{tang.}\,\beta_{x+1} = \frac{\text{tang.}\,\alpha_x}{1+2\,\text{cotang.}\,n\,\text{tang.}\,\alpha_x},$$

e con quella della percossa obbliqua dei corpi, che non sono dotati di una elasticità perfetta, che $\text{tang.}\,\alpha_{x+1} = r\,\text{tang.}\,\beta_{x+1}$; e però sarà

$$\text{tang.}\,\alpha_{x+1} = \frac{r\,\text{tang.}\,\alpha_x}{1+2\,\text{cotang.}\,n\,\text{tang.}\,\alpha_x};$$

e facendo sparire la frazione, e supponendo $\text{cotang.}\,n = a$, $\text{tang.}\,\alpha_x = \omega_x$, ed ordinando, si avrà, tra le tangenti degli angoli di riflessione, contigui, α_x, α_{x+1}, la equazione

$$2a\omega_x\omega_{x+1} + \omega_{x+1} - r\omega_x = 0,$$

la quale integrata, ci darà il valore della tangente ω_x dell'angolo di riflessione x esimo, ossia corrispondente a quello d'incidenza dimandato.

Per integrare questa equazione, la quale di poco differisce da quella della prima proposizione, che ha servito per avere la velocità, supponghiamo, qui pure, $\omega_x = \frac{1}{y_x}$, ed avremo la equazione

$$y_{x+1} - \frac{1}{r} y_x - \frac{2a}{r} = 0,$$

che integrata, colla solita regola generale a tutti nota (§. 40), dà $y_x = \frac{c + 2ar^x}{(r-1)r^x}$, c rappresentando la costante arbitraria; e perciò ω_x, ossia

$$\text{tang.}\, \alpha_x = \frac{(r-1)r^x}{c + 2ar^x}.$$

Egli è facile la determinazione dell'arbitraria c, poichè pel dato della proposizione conosciamo l'angolo E O z, e perciò ancora la sua tangente ω_0; e colla equazione anzi trovata, fatto in essa $x = 0$, hassi $\omega_0 = \frac{r-1}{c+2a}$; quindi $c = \frac{r-1-2a\omega_0}{\omega_0}$.

Ponendo questo valore dell'arbitraria c nella espressione trovata di ω_x, si ottiene ω_x, ovvero $\text{tang.}\, \alpha_x = \frac{\omega_0 (r-1) r^x}{r-1+2a\omega_0(r^x-1)}$; ma la tangente dell'angolo d'incidenza β_x è eguale a quella dell'angolo di riflessione α_x, divisa pel rapporto r della elasticità alla percossa, cioè $\text{tang.}\, \beta_x = \frac{1}{r} \text{tang.}\, \alpha_x$; adunque

$$\text{tang.}\, \beta_x = \frac{\omega_0 (r-1) r^{x-1}}{r-1+2a\omega_0(r^x-1)}:$$

espressione che fa conoscere l'angolo cercato β_x, mediante la sua tangente.

Abbiamo trovato il valore della tangente di β_x, qualunque sia la inclinazione del piano immobile all'orizzonte, e qualunque sia il rapporto della elasticità del corpo alla percossa: così si potrebbero trovare anche i valori delle altre

tre quantità s_x, t_x, u_x conservando nei due suddetti elementi la medesima generalità; ma siccome alla fine di questa Memoria si tratterà una proposizione di moto semilibero, di cui la presente, come vedrassi, non è che un caso particolare; per ciò ci limiteremo per ora a trattare estesamente i due casi seguenti, cioè; primo, che il piano immobile sia orizzontale, ed il rapporto della elasticità del corpo alla percossa qualunque; secondo, che il piano sia comunque inclinato all'orizzonte, ma il corpo dotato di elasticità perfetta.

PRIMO CASO.

L'ipotesi che sia il piano Oz (*Fig.* 3) orizzontale, dà cotang. n, ossia eguale a zero; e però le espressioni generali delle tangenti degli angoli α_x, β_x trovate, diventeranno, in questo caso, $\omega_0 r^x$, $\omega_0 r^{x-1}$; cioè tanto le tangenti degli angoli d'incidenza, quanto quelle degli angoli delle riflessioni, formano una progressione geometrica, la quale ha per ragione il rapporto della elasticità del corpo alla percossa.

Essendo per la medesima ipotesi $v_x = u_{x+1}$, e per quello che accade nella percossa obbliqua dei corpi di elasticità imperfetta $v_x = u_x \sqrt{(\cos.^2\beta_x + r^2 \operatorname{sen}.^2\beta_x)}$, sarà

$$u_{x+1} - u_x \sqrt{(\cos.^2\beta_x + r^2 \operatorname{sen}.^2\beta_x)} = 0;$$

ossia sostituendo in luogo di cos.β_x, e di sen.β_x i loro valori, desunti da quello della tangente del medesimo angolo, si avrà

$$u_{x+1} - u_x \sqrt{\left(\frac{1 + \omega_0^2 r^{2x}}{1 + \omega_0^2 r^{2x-2}}\right)} = 0, \text{ ovvero } \Delta \log. u_x = \Delta \log. \sqrt{(1 + \omega_0^2 r^{2x-2})};$$

e però integrando

$$u_x = B\sqrt{(1 + \omega_0^2 r^{2x-2})},$$

B esprimendo l'arbitraria introdotta dalla integrazione: così sarà

$$v_x = B\sqrt{(1 + \omega_0^2 r^{2x})}.$$

Onde trovare l'arbitraria B, facciasi $x = 0$ nella equazione $v_x = B\sqrt{(1 + \omega_0^2 r^{2x})}$ e si otterrà $v_0 = B\sqrt{(1 + \omega_0^2)}$;

cioè $B = v_0 \cos.\alpha_0$. Quindi la velocità d'incidenza cercata sarà

$$v_0 \cos.\alpha_0 \sqrt{(1+\omega^2{}_0 r^{2x-2})}\,;\ \text{e}\ v_0 \cos.\alpha_0 \sqrt{(1+\omega^2{}_0 r^{2x})}$$

quella di riflessione corrispondente.

È dimostrato nella teorica del moto de' projettili, che l'ampiezza HI eguaglia $\frac{2B}{g} v_x \,\text{sen.}\,\alpha_x$, e che il tempo corso nel descrivere l'arco I*m*H è eguale a $\frac{2}{g} v_x \,\text{sen.}\alpha_x$; sarà adunque

$$\Delta s_x = \frac{2B}{g} v_x \,\text{sen.}\,\alpha_x\,,\ \text{e}\ \Delta t_x = \frac{2}{g} v_x \,\text{sen.}\,\alpha_x\,;$$

cioè ponendo in luogo di v_x, $\text{sen.}\,\alpha_x$ i loro valori $B\sqrt{(1+\omega^2{}_0 r^{2x})}$, $\omega_0 r^x : \sqrt{(1+\omega^2{}_0 r^{2x})}$, si avrà

$$\Delta s_x = \frac{2B^2\omega_0}{g} r_x\,,\ \text{e}\ \Delta t_x = \frac{2B\omega_0}{g} r^x\,;\ \text{e perciò}\ (\S.\ 27)$$

$$s_x = \frac{2B^2\omega_0}{g} \cdot \frac{r^x-1}{r-1}\,,\ \text{e}\ t_x = \frac{2B\omega_0}{g} \cdot \frac{r^x-1}{r-1}\,,$$

essendo, per ipotesi, s_0 e t_0 ambedue eguali a zero.

Corollario 1. Per essere $\sqrt{(1+\omega^2{}_0 r^{2x})} = 1 : \cos.\,\alpha_x$, si avrà $v_x = B : \cos.\,\alpha_x$, ossia $v_x \cos.\,\alpha_x = B$; e però $v_x \cos.\,\alpha_x = v_0 \cos.\alpha_0$; cioè la velocità orizzontale del corpo nel principio della parabola $(x+1)$ esima eguaglia quella che aveva nel principio del moto. Ma nel descrivere le parabole non si altera la velocità orizzontale; adunque gli spazj s_x, Δs_x percorsi orizzontalmente, sono percorsi con moto uniforme e colla velocità B.

Corollario 2. Essendo $\Delta t_x = \frac{2B\omega_0}{g} r^x$, e $\Delta s_x = \frac{2B^2\omega_0}{g} r^x$; e queste espressioni esprimendo i termini $(x+1)$ esimi di due progressioni geometriche, ne risulta, che tanto i tempi corsi nel percorrere le successive parabole, quanto le ampiezze delle medesime, costituiscono una progressione geometrica.

Corollario 3. Se *d* indicasse la distanza di un punto H dal punto O da cui si getta il corpo, e che si volesse colpirlo col corpo stesso nella $(x+1)$ esima sua caduta, basterebbe soddisfare, colla opportuna determinazione dell'angolo α_0, della velocità v_0, la equazione

$\frac{2B^2\omega_0}{g} \cdot \frac{r^x - 1}{r - 1} = d$, o la equivalente $v^2{}_0 \,\text{sen.}\, 2\alpha_0 = \frac{r - 1}{r^x - 1}\, dg$;

ciò che potrebbesi fare, evidentemente, in infiniti modi. Se poi fosse dato l'angolo che dovesse fare la direzione della velocità col piano orizzontale nel colpire l'oggetto fisso, supposto la sua tangente eguale alla b, avrebbesi anche la equazione $b = \omega_0 r^x$, la quale, combinata coll'antecedente, darebbe i valori della tangente ω_0 e della velocità per soddisfare le due condizioni. In generale colle quattro equazioni

$$\omega_x = \omega_0 r^x\,,\quad v_x = B\sqrt{(1 + \omega^2{}_0 r^{2x})}\,,$$

$$t_x = \frac{2B\omega_0}{g} \cdot \frac{r^x - 1}{r - 1}\,,\quad s_x = \frac{2B^2\omega_0}{g} \cdot \frac{r^x - 1}{r - 1}$$

potremo sempre trovare quattro delle quantità in esse contenute, quando conosceremo le altre, o i loro rapporti colle prime.

Corollario 4. Essendo $s_x = \frac{2B^2\omega_0}{g} \cdot \frac{r^x - 1}{r - 1}$, ossia $a\ \frac{v^2{}_0}{g} \cdot \frac{r^x - 1}{r - 1}$ sen. $2\alpha_0$, il medesimo corpo scagliato colla stessa velocità, cioè a pari circostanze, la distanza della x esima caduta dal punto da cui gettasi, sarà massima, quando sarà sen. $2\alpha_0 = 1$, ossia l'angolo di projezione primitiva α_0 eguale alla metà di un retto: ciò che è singolare.

Corollario 5. Supposto $Op = z_x$, $pm = y_x$, e θ_x il tempo impiegato nel descrivere l'arco Hm, si ha $z_x = B\theta_x + s_x$, ed $y_x = \theta_x u_x \,\text{sen.}\, \alpha_x - \frac{1}{2} g\theta^2{}_x$; cioè eliminando θ_x, e ponendo invece di v_x, sen. α_x i loro valori espressi per x, si avrà

$$y_x = \omega_0 r^x (z_x - s_x) - \frac{g}{2B^2}(z_x - s_x)^2$$

per equazione della parabola descritta nel rimbalzo x esimo, supposto l'origine delle coordinate nello stesso punto O da cui si getta il corpo.

Perchè la equazione anzi trovata competa alla sola porzione della $(x + 1)$ esima parabola effettivamente descritta dal corpo, cioè alla sola porzione HmI superiore alla orizzontale Oz, converrà circoscrivere l'ascissa z_x tra s_x ed s_{x+1}.

Corollario 6. I valori delle coordinate z_x, y_x trovati nel Corollario precedente, danno $\left(\frac{dz}{d\theta}\right) = \mathrm{B}$, e $\left(\frac{dy}{d\theta}\right) = u_x \,\text{sen.}\, \alpha_x - g\theta_x$; cioè le velocità del corpo alla fine del tempo $t_x + \theta_x$ secondo gli assi delle coordinate; e perciò, alla fine del medesimo tempo, la sua velocità assoluta sarà

$$\sqrt{\left\{ \mathrm{B}^2 + (u_x \,\text{sen.}\, \alpha_x - g\theta_x)^2 \right\}}, \text{ ed } \frac{u_x \,\text{sen.}\, \alpha_x - g\theta_x}{\mathrm{B}}$$

sarà la tangente dell'angolo che essa fa col prolungamento dell'asse delle ascisse.

Secondo Caso.

Essendo il corpo perfettamente elastico, sarà la sua elasticità eguale alla percossa, cioè $r = 1$; e perciò il valore della tangente dell'angolo d'incidenza β_x, si otterrà, in questo caso, facendo r eguale alla unità nella espressione

$$\frac{\varpi_0 (r - 1) r^{x-1}}{r - 1 + 2a\varpi_0 (r^x - 1)}$$

trovata sopra. Ma appunto in questo caso, questa espressione diventa $\frac{0}{0}$; adunque il valore cercato della tangente β_x, si avrà, facendo $r = 1$ nella frazione

$$\frac{\varpi_0 r^{x-1} + \varpi_0 (r - 1) x r^{x-2}}{1 + 2a\varpi_0 x r^{x-1}}$$

la quale ha visibilmente per termini le derivate dei termini cognomini della antecedente; vale a dire sarà $\text{tang.}\, \beta_x = \frac{\varpi_0}{1 + 2a\varpi_0 x}$: così

$$\text{tang.}\, \alpha_x = \frac{\varpi_0}{1 + 2a\varpi_0 x},$$

come è naturale, per essere l'angolo di riflessione eguale a quello d'incidenza, nel caso del mobile perfettamente elastico.

Facilmente dimostrasi, coi principj della balistica, che, la velocità del corpo alla fine dell'arco parabolico H*m*I è eguale a quella colla quale ha incominciato a descriverlo, moltiplicata per la espressione seguente

$\sqrt{(4a^2 \text{sen.}^2 \alpha_x + 4a \,\text{sen.}\, \alpha_x \cos.\, \alpha_x + 1)}$; adunque
$v_{x+1} = v_x \sqrt{(4a^2 \text{sen.}^2 \alpha_x + 4a \,\text{sen.}\, \alpha_x \cos.\, \alpha_x + 1)}$;
ossia sostituendo invece di sen. α_x, e di cos. α_x i loro valori desunti da quello della tangente del medesimo angolo, trovata qui sopra, avrassi tra le velocità v_x, v_{x+1} la equazione delle differenze finite

$$v^2{}_{x+1} - \frac{\omega^2{}_0 + \{1 + 2a\omega_0(x+1)\}^2}{\omega^2{}_0 + (1 + 2a\omega_0 x)^2} v^2{}_x = 0,$$

la quale integrata dà (§. 39)

$$v^2{}_x = A^2 \{\omega^2{}_0 + (1 + 2a\omega_0 x)^2\},$$

A^2 rappresentando la costante arbitraria portata dalla integrazione. Ma si conosce la velocità v_0, e perciò ancora A^2, essendo essa eguale a $\frac{v^2{}_0}{1+\omega^2{}_0}$; quindi

$$v_x = v_0 \sqrt{\left(\frac{\omega^2{}_0 + (1 + 2a\omega_0 x)^2}{1 + \omega^2{}_0}\right)}.$$

Vale a dire è completamente determinata la velocità, sì d'incidenza, che di riflessione, per la caduta x esima.

Trovasi pure coi principj stessi della balistica, che il tempo corso nel descrivere l'$(x+1)$ esima parabola è eguale a $\frac{2}{g\,\text{sen.}\,n} v_x \,\text{sen.}\, \alpha_x$, e che l'ampiezza della stessa eguaglia $\frac{2}{g} v^2{}_x$ sen. $(\alpha_x + n)$ sen. α_x : sen.$^2 n$; e perciò, sostituendo in queste espressioni in luogo di v_x, e di sen. α_x, cos. α_x i loro valori conosciuti, si avrà

$$\Delta t_x = \frac{2A\omega_0}{g\,\text{sen.}\,n}, \text{ e } \Delta s_x = \frac{2A^2\omega_0}{g\,\text{sen.}\,n}\Big(1 + 2a\omega_0(x+1)\Big);$$

equazioni le quali integrate, e trovate le arbitrarie colle condizioni di $s_0 = 0$, e di $t_0 = 0$,

danno $t_x = \frac{2A\omega_0}{g\,\text{sen.}\,n} x$, ed $s_x = \frac{2A^2\omega_0}{g\,\text{sen.}\,n}(1 + 2a\omega_0 x)x$.

COROLLARIO. Essendo $\Delta t_x = 2A\omega_0 : g\,\text{sen.}\,n$, e questa quantità indipendente dalla x, ne risulta, che tutti gli archi parabolici sono descritti in tempi tra loro eguali.

Del moto libero.

Se ad un corpo, nel mentre che descrive con moto libero una linea, verrà comunicata una qualunque velocità finita secondo qualsivoglia direzione, esso continuando il movimento, devierà dalla linea medesima, ed incomincierà a descriverne un'altra; e se, dopo che avrà descritto una porzione di quest'altra, verrà, di nuovo, ad esso comunicata una seconda velocità finita, devierà pure da questa seconda, cominciando a descriverne una terza; e così continuando, descriverà un poligono rettilineo, o curvilineo, ovvero mistilineo. Questa è la specie di moto discreto che denomineremo *libero*, analogamente a quello che così nominasi nella teorica del moto continuo ordinario.

Se si trattasse una proposizione di moto discreto libero, abbracciando tutta quella generalità concepita nella esposta sua definizione, cioè nella ipotesi che la forza acceleratrice stimolante continuamente il corpo fosse qualunque, pochissimo si potrebbe sviluppare la teorica di questa specie di moto, e per ciò nessun vantaggio trarrebbesi da essa; per questo motivo, e per l'altro, cioè che trattata una proposizione di questa specie di moto, nella quale nessuna delle quantità, che dir si possono gli elementi del moto, sia eccettuato o supposto zero, facilmente si può trattarne un'altra qualunque, ci limiteremo al caso che la forza acceleratrice stimolante continuamente il corpo sia la sola gravità, per cui i lati del poligono descritto dal corpo risultano, in generale, tanti archi parabolici; vale a dire scioglieremo la seguente

Proposizione VII.

,, Conoscendo la legge delle grandezze e delle direzioni
,, delle velocità finite, che successivamente si comunicano
,, al corpo, e quella dei tempi, che passano tra gl' istanti ne'
,, quali sono comunicate, di più conoscendo la posizione del
,, punto da cui si è scagliato il corpo, la grandezza e dire-
,, zione della velocità di projezione per la quale ha descrit-
,, to il primo arco parabolico, ed il tempo corso nel descri-
,, verlo, trovare i valori di tutte le quantità dalle quali di-
,, pende la conoscenza dello stato sì geometrico che mecca-
,, nico del corpo in un istante qualunque del suo movimento.

Soluzione. Siano OE, ..., AB, BC, ... il primo, ..., gl'x, $(n+1)$ esimi archi parabolici descritti dal corpo (*Fig.* 4); φx la espressione della x esima velocità finita comunicata ad esso, trovandosi in B; v' la velocità di projezione per cui descriveva la prima parabola, essendo stato scagliato dal punto O, che noi fisseremo per origine delle coordinate, e v_x quella che esso ha alla fine dell'arco x esimo; θ il tempo corso nel descrivere il primo arco parabolico OE, t_x quello decorso dopo θ per arrivare in B, t'_x quello impiegato nel descrivere l'arco Bm, porzione indeterminata di BC; z_x, u_x, ed y_x le coordinate del punto B, e z'_x, u'_x, y'_x quelle dell'm, tutte rispetto agli assi orizzontali Oz, Ou, ed al verticale Oy; in ultimo, sieno α_x, α'_x, α''_x gli angoli che fa la tangente condotta alla fine dell'arco x esimo coi prolungamenti degli assi delle coordinate z_x, u_x, y_x; ed ω_x, ω'_x, ω''_x, m, m', m'' quelli che fanno le direzioni delle velocità φx, v' cogli assi stessi prolungati.

Essendo v' la grandezza della velocità di projezione per l'arco parabolico OE, ed m, m', m'' gli angoli, che fa la sua direzione OF cogli assi delle coordinate, e θ il tempo decorso nel descriverlo, saranno $v'\cos.m$, $v'\cos.m'$, $v'\cos.m''-g\theta$ le componenti della velocità del corpo alla fine dell'arco stesso, dirette, al solito, secondo i prolungamenti degli assi delle coordinate; e $\theta v'\cos.m$, $\theta v'\cos.m'$, $\theta v'\cos.m''-\frac{1}{2}g\theta^2$ saranno le coordinate dell'ultimo punto E del medesimo arco, ossia di quel punto nel quale trovasi il corpo, quando succede il primo cambiamento finito negli elementi del suo moto, cioè sarà

$$\mathrm{OG}=\theta v'\cos.m,\ \mathrm{GH}=\theta v'\cos.m',\ \text{ed }\mathrm{HE}=\theta v'\cos.m''-\tfrac{1}{2}g\theta^2;$$

stante sempre la ipotesi, che il corpo sia scagliato dalla stessa origine delle coordinate. Premesso questo, passiamo alla soluzione della proposizione.

Il metodo più semplice per trovare le espressioni di tutte le quantità dalle quali dipende la conoscenza completa dello stato del corpo in un istante qualunque del suo movimento, è quello di cominciare a trovare la grandezza e la direzione della velocità che ha il corpo nell'istante che trovasi alla fine dell'arco x esimo che esso descrive; e per trovare questi valori il modo più facile è quello di paragonare tra loro separatamente le componenti, secondo i tre assi delle coordinate, della velocità che esso ha alla fine degli archi x, $(x+1)$ esimi, ossia negli istanti appena antecedenti a quelli, nei quali succedono gl'x, $(x+1)$ esimi cambiamenti finiti negli elementi del suo movimento.

Scompongasi pertanto le velocità v_x, φx, v_{x+1} ciascuna in tre parallele agli assi delle coordinate, ed avransi, secondo l'asse delle z_x le componenti

$v_x\cos.\alpha_x$, $\varphi x\cos.\omega_x$, $v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1}$; secondo quello delle u_x
$v_x\cos.\alpha'_x$, $\varphi x\cos.\omega'_x$, $v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}$; e secondo quello delle y_x
$v_x\cos.\alpha''_x$, $\varphi x\cos.\omega''_x$, $v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}$;

cioè nell'istante in cui il corpo incomincierà a descrivere l'arco parabolico $(x+1)$ esimo, avrà, secondo i tre assi delle coordinate le tre velocità seguenti

$$v_x\cos.\alpha_x+\varphi x\cos.\omega_x,$$
$$v_x\cos.\alpha'_x+\varphi x\cos.\omega'_x,$$
$$v_x\cos.\alpha''_x+\varphi x\cos.\omega''_x;$$

e nell'istante che avrà terminato di descriverlo, si troverà

invece

invece colle altre tre

$$v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1}\,,\quad v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}\,,\quad v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}\,.$$

Essendo gli assi Oz, Ou orizzontali, le velocità del corpo secondo i medesimi assi non saranno alterate negli intervalli di tempo, che passano tra gli istanti nei quali vengono ad esso comunicate le velocità finite; e però le velocità che avrà il corpo, secondo gli assi stessi, alla fine dell'arco parabolico $(x+1)$ esimo, saranno le stesse di quelle che aveva nel principio del medesimo arco, cioè

$$v_x\cos.\alpha_x+\phi x\cos.\omega_x\,,\quad v_x\cos.\alpha'_x+\phi x\cos.\omega'_x\,;$$

ma abbiamo veduto che, stante le stabilite supposizioni, debbono essere ancora eguali a $v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1}$, $v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}$; adunque sarà

$$v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1}=v_x\cos.\alpha_x+\phi x\cos.\omega_x\,,\text{ e}$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}=v_x\cos.\alpha'_x+\phi x\cos.\omega'_x\,.$$

Similmente, essendo la forza acceleratrice, per ipotesi costante, nel tempo Δt_x corso nel descrivere l'arco $(x+1)$ esimo, esso avrà diminuito la velocità verticale

$$v_x\cos.\alpha''_x+\phi x\cos.\omega''_x \text{ di } g\Delta t_x\,;$$

cioè nell'istante che il corpo sarà giunto alla fine dell'$(x+1)$ esimo arco, avrà, secondo l'asse verticale, la velocità

$$v_x\cos.\alpha''_x+\phi x\cos.\omega''_x-g\Delta t_x\,;$$

ma questa velocità deve essere anche eguale a $v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}$, per quello che superiormente abbiamo osservato, così sarà

$$v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}=v_x\cos.\alpha''_x+\phi x\cos.\omega''_x-g\Delta t_x\,.$$

Vale a dire, si avranno, tra le velocità v_x, v_{x+1}, e gli angoli α_x, α'_x, α''_x, α_{x+1}, α'_{x+1}, α''_{x+1} che esse fanno coi prolungamenti degli assi delle coordinate, le tre equazioni seguenti

$$v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1}-v_x\cos.\alpha_x-\phi x\cos.\omega_x=0\,,$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}-v_x\cos.\alpha'_x-\phi x\cos.\omega'_x=0\,,$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}-v_x\cos.\alpha''_x-\phi x\cos.\omega''_x+g\Delta t_x=0$$

delle differenze finite del primo ordine, le quali integrate, daranno la grandezza e la direzione della velocità alla fine dell'arco x esimo, ossia nell'istante antecedente a quello nel quale succede l'x esimo cambiamento finito suddetto.

Integrando le tre equazioni trovate, ossia le loro equivalenti

$$\Delta v_x \cos.\alpha_x - \phi x \cos.\omega_x = 0,\quad \Delta v_x \cos.\alpha'_x - \phi x \cos.\omega'_x = 0,$$

$$\Delta v_x \cos.\alpha''_x - \phi x \cos.\omega''_x + g\Delta t_x = 0,$$

ed indicando colle a, b, c le costanti arbitrarie introdotte dalle integrazioni, si ottengono le tre seguenti

$$v_x \cos.\alpha_x = \Sigma\phi x \cos.\omega_x + a,$$

$$v_x \cos.\alpha'_x = \Sigma\phi x \cos.\omega'_x + b,$$

$$v_x \cos.\alpha''_x = \Sigma\phi x \cos.\omega''_x - gt_x + c,$$

le quali, combinate colla notissima $\cos.^2\alpha_x + \cos.^2\alpha'_x + \cos.^2\alpha''_x = 1$, danno

$$v_x = \sqrt{\left\{(\Sigma\phi x \cos.\omega_x + a)^2 + (\Sigma\phi x \cos.\omega'_x + b)^2 + (\Sigma\phi x \cos.\omega''_x - gt_x + c)^2\right\}}$$

$$\cos.\alpha_x = (\Sigma\phi x \cos.\omega_x + a) : v_x,$$

$$\cos.\alpha'_x = (\Sigma\phi x \cos.\omega'_x + b) : v_x,$$

$$\cos.\alpha''_x = (\Sigma\phi x \cos.\omega''_x - gt_x + c) : v_x;$$

cioè la grandezza e la direzione della velocità del corpo alla fine dell'arco x esimo, che esso descrive.

Supponendo che gli integrali $\Sigma\phi x \cos.\omega_x$, $\Sigma\phi x \cos.\omega'_x$, $\Sigma\phi x \cos.\omega''_x$ incomincino col valore di x eguale ad uno, ciò che è permesso, evidentemente le costanti arbitrarie a, b, c contenute nelle formole esposte, rappresenteranno le componenti, secondo gli assi delle coordinate, della velocità del corpo alla fine del primo arco parabolico; ma perciò che abbiamo premesso, le medesime velocità sono anche espresse da $v' \cos.m$, $v' \cos.m'$, $v' \cos.m'' - g\theta$; adunque sarà

$$a = v' \cos.m,\quad b = v' \cos.m',\quad c = v' \cos.m'' - g\theta.$$

Vale a dire, le tre costanti a, b, c espresse colla velocità ed angoli della projezione primitiva, e col tempo corso nel descrivere il primo arco parabolico, quantità tutte conosciute, pei dati della proposizione.

L'$(x+1)$ esimo arco parabolico, BC, essendo descritto nel tempo Δt_x, e mediante una velocità di projezione le cui componenti, secondo i tre assi delle coordinate, sono

$$v_x \cos.\alpha_x + \phi x \cos.\omega_x,$$

$$v_x \cos.\alpha'_x + \phi x \cos.\omega'_x,$$

$$v_x \cos.\alpha''_x + \phi x \cos.\omega''_x,$$

sarà, per la teorica ordinaria de' projettili

$$\Delta z_x = (v_x \cos.\alpha_x + \varphi x \cos.\omega_x)\Delta t_x,$$
$$\Delta u_x = (v_x \cos.\alpha'_x + \varphi x \cos.\omega'_x)\Delta t_x, \text{ e}$$
$$\Delta y_x = (v_x \cos.\alpha''_x + \varphi x \cos.\omega''_x)\Delta t_x - \tfrac{1}{2} g \Delta t_x;$$

ossia ponendo in luogo di v_x, $\cos.\alpha_x$, $\cos.\alpha''_x$ i loro valori, ed integrando, otterrassi

$$(a) \ldots\ldots z_x = \Sigma\Delta t_x \Sigma\varphi(x+1)\cos.\alpha_{x+1} + a t_x + A',$$
$$(b) \ldots\ldots u_x = \Sigma\Delta t_x \Sigma\varphi(x+1)\cos.\alpha'_{x+1} + b t_x + B', \text{ ed}$$
$$(c) \ldots\ldots y_x = \Sigma\Delta t_x \Sigma\varphi(x+1)\cos.\alpha''_{x+1} - \tfrac{1}{2} g t^2_x + c t_x + C',$$

A', B', e C' rappresentando le costanti arbitrarie introdotte dalle integrazioni, le quali si determineranno, soddisfacendo, con esse, alle tre equazioni

$$z_1 = \theta v' \cos.m, \quad u_1 = \theta v' \cos.m', \quad y_1 = \theta v' \cos.m'' - \tfrac{1}{2} g \theta^2,$$

desunte anch'esse dalle cose premesse a questa soluzione.

Se si eliminasse dalle tre equazioni (a), (b), (c) la x contenuta nei secondi membri, si avrebbero due sole equazioni tra le coordinate z_x, u_x, y_x, o semplicemente z, u, y ed altre quantità date, le quali rappresenterebbero le equazioni delle projezioni di quella linea, nella quale vi sono tutti quei punti in cui trovasi il corpo negl'istanti, che succedono i cambiamenti finiti negli elementi del suo moto.

Considerando il moto continuo, che ha luogo per tutto l'arco $(x+1)$ esimo BmC, hansi le tre equazioni differenziali di secondo ordine

$$\left(\frac{d^2 z'}{dt'^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^2 u'}{dt'^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^2 y'}{dt'^2}\right) = -g,$$

le quali integrate, e determinate le costanti arbitrarie colle condizioni, che z_x, u_x, y_x sono le coordinate del suo primo punto B, e

$$v_x \cos.\alpha_x + \varphi x \cos.\omega_x,$$
$$v_x \cos.\alpha'_x + \varphi x \cos.\omega'_x,$$
$$v_x \cos.\alpha''_x + \varphi x \cos.\omega''_x$$

le componenti, secondo gli assi delle coordinate, della velocità del corpo, quando comincia a descrivere il medesimo arco, danno le tre equazioni

$$z'_x = (v_x \cos.\, \alpha_x + \varphi x \cos.\, \omega_x)\, t'_x + z_x\,,$$
$$u'_x = (v_x \cos.\, \alpha'_x + \varphi x \cos.\, \omega'_x)\, t'_x + u_x\,,$$
$$y'_x = (v_x \cos.\, \alpha''_x + \varphi x \cos.\, \omega''_x)\, t'_x + y_x - \tfrac{1}{2} g t'^2_x\,,$$

le quali fanno conoscere evidentemente la posizione del corpo alla fine del tempo $\theta + t_x + t'_x$, ossia dopo il tempo t'_x da che è partito dal punto nel quale succede l'x esimo cambiamento finito negli elementi suddetti.

Essendo
$$\left(\frac{dz'}{dt'}\right) = v_x \cos.\, \alpha_x + \varphi x \cos.\, \omega_x\,,$$
$$\left(\frac{du'}{dt'}\right) = v_x \cos.\, \alpha'_x + \varphi x \cos.\, \omega'_x\,,$$
$$\left(\frac{dy'}{dt'}\right) = v_x \cos.\, \alpha''_x + \varphi x \cos.\, \omega''_x - g t'_x\,,$$

saranno $v_x \cos.\, \alpha_x + \varphi x \cos.\, \omega_x$, $v_x \cos.\, \alpha'_x + \varphi x \cos.\, \omega'_x$, $v_x \cos.\, \alpha''_x + \varphi x \cos.\, \omega''_x - g t'_x$ le velocità del corpo alla fine del tempo $\theta + t_x + t'_x$, secondo gli assi delle coordinate; e però supposto $\cos.\alpha_x \cos.\omega_x + \cos.\alpha'_x \cos.\omega'_x + \cos.\alpha''_x \cos.\omega''_x = \cos.\mu_x$, cioè μ_x l'angolo che fa la tangente BD colla direzione della velocità φ_x, sarà

$$\sqrt{[v^2_x + \varphi^2_x + 2 v_x \varphi x \cos.\mu_x - 2 g t'_x (v_x \cos.\alpha''_x + \varphi x \cos.\omega''_x) + g^2 t'^2_x]}$$

la velocità assoluta del medesimo, e

$$(v_x \cos.\, \alpha''_x + \varphi x \cos.\, \omega''_x - g t'_x) : (v_x \cos.\, \alpha_x + \varphi x \cos.\, \omega_x)\,,$$
$$(v_x \cos.\, \alpha''_x + \varphi x \cos.\, \omega''_x - g t'_x) : (v_x \cos.\, \alpha'_x + \varphi x \cos.\, \omega'_x)$$

le tangenti degli angoli che fanno le projezioni, sui piani $y_x z_x$, $y_x u_x$, della direzione della stessa velocità coi prolungamenti degli assi delle coordinate z_x, u_x.

Eliminando dalle tre equazioni, che danno i valori delle coordinate z'_x, u'_x, y'_x il tempo t'_x, si hanno le sole due seguenti

$$(d) \ldots\ldots u'_x = \frac{v_x \cos.\, \alpha'_x + \varphi x \cos.\, \omega'_x}{v_x \cos.\, \alpha_x + \varphi x \cos.\, \omega_x} (z'_x - z_x) + u_x\,,$$

$$y'_x = \frac{v_x \cos.\, \alpha''_x + \varphi x \cos.\, \omega''_x}{v_x \cos.\, \alpha_x + \varphi x \cos.\, \omega_x} (z'_x - z_x) - \tfrac{1}{2} g \frac{(z'_x - z_x)^2}{(v_x \cos.\alpha_x + \varphi x \cos.\omega_x)^2} + y_x\,,$$

le quali rappresentano la parabola $(x + 1)$ esima; anzi, la sola sua porzione B*m*C che descrive effettivamente il corpo, purchè si limitino i valori delle coordinate z'_x, u'_x tra quelli delle z_x, z_{x+1}, ed u_x, u_{x+1} dei punti B, e C.

Esempio. Sia $\Delta t_x = c'$, $\omega_x = e$, $\phi x = f$, $\theta = 0$; cioè sia costante il tempo che passa da un'impulsione all'altra, la forza d'impulsione, l'angolo che essa fa coll'asse delle z_x, il tempo θ eguale a zero, ossia la origine delle coordinate cada in E, e di più tutto sia in un piano; e si avrà

$$a = 0,\ b = 0,\ c = 0,\ t'_x = (x-1)c'$$

$$\Sigma\phi x \cos.\omega_x = f(x-1)\cos.e,\ \Sigma\phi x \cos.\omega''_x = f(x-1)\,\text{sen}.e;$$

$$\Sigma\Delta t_x \Sigma\phi(x+1)\cos.\omega_{x+1} = if\frac{x(x-1)}{2}\cot.e, \Sigma\Delta t_x \Sigma\phi(x+1)\cos.\omega''_{x+1} = c'f\frac{x(x-1)}{2}\,\text{sen}.c;$$

e perciò tang. $\alpha_x = \text{tang}.\, e - c'g : f\cos.e$,

$$v_x = (x-1)\sqrt{(f'^2 + c'^2g^2 - 2c'fg\cos.e)}$$

$$z_x = c'f\frac{x(x-1)}{2}\cos.e, y_x = c'f\frac{x(x-1)}{2}\,\text{sen}.\,e - \tfrac{1}{2}gc'^2(x-1)^2;$$

e quindi facilissimamente si deduce la velocità del corpo alla fine del tempo $\theta + t_x + t'_x = (x-1)c' + t'_x$, la tangente dell'angolo che fa la sua direzione col prolungamento dell'asse delle ascisse z_x, e la equazione di quella parabola alla quale appartiene l'$(x+1)$ esimo arco parabolico descritto dal corpo.

Eliminando dalle equazioni $z_x = c'f\frac{x(x-1)}{2}\cos.e$,

$$y_x = c'f\frac{x(x-1)}{2}\,\text{sen}.\,e - \tfrac{1}{2}gc'^2(x-1)^2$$

l'indice x, si ha una sola equazione della forma $(my - nz)^2 + py + qz + r = 0$, la quale c'insegna, che i punti nei quali succedono i cambiamenti finiti negli elementi del moto, ossia i punti ove si tagliano le successive parabole a cui appartengono gli archi, che descrive il corpo, sono tutti in una sola e medesima parabola.

Egli è evidente che, conoscendo le coordinate di quel punto nel quale succede l'x esimo cambiamento finito negli elementi del movimento, la grandezza e direzione della velocità, che ha il corpo alla fine dell'arco x esimo, le equazioni dell'$(x+1)$ esimo arco, la direzione e grandezza della velocità del corpo in un punto qualunque di questo arco, si conosce lo stato del corpo in un istante qualsivoglia del suo moto: è adunque completamente soddisfatta la proposta proposizione.

Corollario 1. Se si trascurasse l'azione della gravità, avrebbesi

$$v_x=\sqrt{\{(\Sigma\phi x\cos.\omega_x+a)^2+(\Sigma\phi x\cos.\omega'_x+b)^2+(\Sigma\phi_x\cos.\omega''_x+c)^2\}},$$

$$\cos.\alpha_x=(\Sigma\phi x\cos.\omega_x+a):v_x,$$

$$\cos.\alpha'_x=(\Sigma\phi x\cos.\omega'_x+b):v_x,$$

$$\cos.\alpha''_x=(\Sigma\phi x\cos.\omega''_x+c):v_x;$$

quindi facilissimamente le altre quantità ed equazioni necessarie a determinarsi per conoscere lo stato del corpo, le ultime delle quali sono le due seguenti

$$u'_x=\frac{\Sigma\phi(x+1)\cos.\omega'_{x+1}+b}{\Sigma\phi(x+1)\cos.\omega_{x+1}+a}(z'_x-z_x)+u_x,$$

$$y'_x=\frac{\Sigma\phi(x+1)\cos.\omega''_{x+1}+c}{\Sigma\phi(x+1)\cos.\omega_{x+1}+a}(z'_x-z_x)+y_x,$$

le quali rappresenteranno la retta di cui è parte il lato $(x+1)$ esimo del poligono rettilineo che descriverà il corpo (*).

Corollario 2. Se di più la forza d'impulsione fosse continuamente diretta alla origine delle coordinate, avrebbesi

$$\cos.\omega_x=z_x:\sqrt{(z^2_x+u^2_x+y^2_x)},$$

$$\cos.\omega'_x=u_x:\sqrt{(z^2_x+u^2_x+y^2_x)},$$

$$\cos.\omega''_x=y_x:\sqrt{(z^2_x+u^2_x+y^2_x)};\ \text{e perciò}$$

$$\Delta\frac{\Delta z_x}{\Delta t_x}-\frac{z_x\phi x}{\sqrt{(u^2_x+z^2_x+y^2_x)}}=0,\quad \Delta\frac{\Delta u_x}{\Delta t_x}-\frac{u_x\phi x}{\sqrt{(z^2_x+u^2_x+y^2_x)}}=0$$

$$\Delta\frac{\Delta y_x}{\Delta t_x}-\frac{y_x\phi x}{\sqrt{(u^2_x+z^2_x+y^2_x)}}=0:$$

equazioni colle quali si troveranno le coordinate dei vertici del poligono che descrive il corpo, quando si conoscerà il

---

(*) Questo caso di moto discreto fu trattato altrimenti anche dal Sig. *Magistrini* nella sua elegante Poligonometrìa Analitica.

tempo t_x e la velocità ϕx; e reciprocamente avrassi, con esse, la forza ϕx, quando conosceransi oltre del tempo t_x le equazioni del poligono.

OSSERVAZIONE. In questa ultima proposizione, abbiamo trovato tutte le quantità dalle quali dipende la conoscenza dello stato del corpo in moto, nella ipotesi, che, tra le cognite vi fossero così le direzioni che le grandezze delle velocità finite che di tempo in tempo vengono comunicate al corpo, non che i successivi tempi che passano tra gl'istanti nei quali sono comunicate queste medesime velocità; passiamo adesso a vedere, come si possono trovare i valori delle stesse quantità ϕx, ω_x, ω'_x, ω''_x, Δt_x, od almeno a discoprire la difficoltà analitica, che s'incontra nella loro ricerca, quando siano solamente dati i rapporti, che esse hanno colle altre quantità: e per trattare questioni naturali, esponghiamo le due seguenti.

PRIMA QUESTIONE.

,, Siano conosciuti i tempi che passano tra gli istanti
,, nei quali sono comunicate al corpo le velocità finite, e sia
,, data pure la grandezza ϕx della stessa velocità finita, co-
,, me nella proposizione trattata, ma la sua direzione sia ora
,, quella della tangente condotta alla fine dell'arco x esimo,
,, che descrive il corpo; cioè sia $\omega_x = \alpha_x$, $\omega'_x = \alpha'_x$, $\omega''_x = \alpha''_x$,
,, essendo α_x, α'_x, α''_x funzioni qui pure incognite, come
,, succede nel tiro di alcuni razzi.

Siccome tutte le equazioni trovate nella proposizione trattata, sono indipendenti da tutte le ipotesi, che si possono fare rispetto alle quantità che esse contengono, così supponendo $\omega_x = \alpha_x$, $\omega'_x = \alpha'_x$, e però $\omega''_x = \alpha''_x$ nelle tre equazioni

$$v_{x+1} \cos. \alpha_{x+1} - v_x \cos. \alpha_x - \phi x \cos. \omega_x = 0,$$
$$\omega_{x+1} \cos. \alpha'_{x+1} - v_x \cos. \alpha'_x - \phi x \cos. \omega'_x = 0$$
$$v_{x+1} \cos. \alpha''_{x+1} - v_x \cos. \alpha''_x - \phi x \cos. \omega''_x + g\Delta t_x = 0,$$

si avranno per questa questione le seguenti

$$v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1}-(v_x+\phi x)\cos.\alpha_x=0,$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}-(v_x+\phi x)\cos.\alpha'_x=0,$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}-(v_x+\phi x)\cos.\alpha''_x+g\Delta t_x=0,$$

che converrà integrare per avere i valori delle funzioni v_x, α_x, α'_x, α''_x dalle quali dipendono tutte le altre quantità ed equazioni, che abbiamo bisogno di determinare, per conoscere completamente lo stato del corpo in un istante qualunque del suo moto.

Le prime due di queste tre ultime equazioni somministrano

$$\frac{\cos.\alpha_{x+1}}{\cos.\alpha_x}=\frac{\cos.\alpha'_{x+1}}{\cos.\alpha'_x}$$

da cui si cava, integrando, $\cos.\alpha'_x=n\cos.\alpha_x$, n esprimendo una costante arbitraria. E sostituendo questo valore di $\cos.\alpha'_x$ nelle equazioni (a), (b), (d) esse diventano

$$z_x=\Sigma\Delta t_x\Sigma\phi(x+1)\cos.\alpha_{x+1}+at_x+\mathrm{A},$$
$$u_x=n\Sigma\Delta t_x\Sigma\phi(x+1)\cos.\alpha_{x+1}+bt_x+\mathrm{B},$$
$u'_x=n(z'_x-z_x)+u_x$, le quali danno
$$u_x=nz_x+(b-an)t_x+\mathrm{B}-\mathrm{A}n\text{, ed}$$
$$u'_x=nz'_x+(b-an)t_x+\mathrm{B}-\mathrm{A}n.$$

Ma n è eguale a $\cos.\alpha'_1:\cos.\alpha_1$, ossia a $\cos.m':\cos.m$, per essere evidentemente

$$\sqrt{(v'^2-2gv'\theta\cos.m''+g^2\theta^2)}$$

la velocità del corpo alla fine del primo arco, per cui

$$\cos.\alpha_1=v'\cos.m:\sqrt{(v'^2-2gv'\theta\cos.m''+g^2\theta^2)}\text{, e}$$
$$\cos.\alpha'_1=v'\cos.m':\sqrt{(v'^2-2gv'\theta\cos.m''+g^2\theta^2)};$$

adunque $b-an=v'\cos.m'-nv'\cos.m=v'\cos.m'-v'\cos.m'=0$; e perciò

$$u_x=\frac{\cos.m'}{\cos.m}z_x+\frac{\mathrm{B}\cos.m-\mathrm{A}\cos.m'}{\cos.m}\text{, ed}$$
$$u'_x=\frac{\cos.m'}{\cos.m}z'_x+\frac{\mathrm{B}\cos.m-\mathrm{A}\cos.m'}{\cos.m}:$$

equazioni le quali rappresentando sempre una sola e medesima retta, qualunque sia la x, c'insegnano, che il poligono descritto dal grave, trovasi in un piano verticale, che ha per

per equazione

$$u = \frac{\cos. m'}{\cos. m} z + \frac{B \cos. m - A \cos. m'}{\cos. m} :$$

così prendendo questo piano per quello delle coordinate y_x, z_x, i valori della velocità e della sua direzione, dipenderanno dalle sole due equazioni

$$v_{x+1} \cos. \alpha_{x+1} - (v_x + \phi x) \cos. \alpha_x = 0,$$

$$v_{x+1} \cos. \alpha''_{x+1} - (v_x + \phi x) \cos. \alpha''_x + g\Delta t_x = 0,$$

ossia dalle loro equivalenti

$$\Delta v_x \cos. \alpha_x - \phi x \cos. \alpha_x = 0, \ \Delta v_x \operatorname{sen}. \alpha_x - \phi x \operatorname{sen}. \alpha_x + g\Delta t_x = 0,$$

per essere in questo caso gli angoli α_x, α''_x complemento uno dell' altro.

Per avere i valori delle funzioni α_x, v_x colle due equazioni qui esposte, seguendo la regola generale, elimineremo una di esse, ed avremo una equazione, la quale integrata, ci darà il valore della funzione rimasta, indi quello dell' altra; e siccome si può eliminare indifferentemente o una o l' altra delle due funzioni α_x, v_x, così preferiremo la eliminazione della v_x, perchè la equazione che ne risulta, è molto più semplice di quella, che si otterrebbe, eliminando la α_x.

Cavando il valore della funzione v_x da ambedue le equazioni anzi esposte, si ha $v_x = (A + \Sigma \phi x \cos. \alpha_x) : \cos. \alpha_x$, e

$$v_x = (B - g t_x + \Sigma \phi x \operatorname{sen}. \alpha_x) : \operatorname{sen}. \alpha_x,$$

A, e B esprimendo le costanti arbitrarie; ed eguagliando fra loro questi due valori di v_x, hassi la sola equazione

$$(A + \Sigma \phi x \cos. \alpha_x) \operatorname{tang}. \alpha_x = B - g t_x + \Sigma \phi x \operatorname{sen}. \alpha_x,$$

senza la funzione v_x, la quale differenziata due volte, per eliminare i segni d' integrazione che essa contiene, si riduce alla seguente

$$\phi (x + 1) \cos. \alpha_{x+1} + g \Delta \frac{\Delta t_x}{\Delta \operatorname{tang}. \alpha_x} = 0;$$

si avrà il valore della funzione α_x, e quindi il corrispondente della v_x che bisognerà conoscere, per continuare la presente soluzione.

SECONDA QUESTIONE.

Da un punto dato superiormente ad un piano immobile comunque posto nello spazio sia scagliato un grave di elasticità imperfetta, secondo qualsivoglia direzione, ed esso descriverà naturalmente un arco parabolico; arrivato ad un certo punto del quale, incontrandosi, scendendo, nel piano immobile, verrà compresso, e però stante la sua elasticità sarà obbligato a descrivere un secondo arco parabolico; così un terzo, un quarto, ec.; cioè succederà di questo corpo, ciò che succede ordinariamente nel tiro degli obis.

„ Data la equazione del piano immobile, la grandezza
„ e direzione della velocità colla quale è stato scagliato il
„ corpo, trovare tutte le quantità necessarie a sapersi, per
„ conoscere lo stato del corpo ad un istante qualunque del
„ suo movimento.

Supponendo l'asse orizzontale delle z_x parallelo al piano immobile, e chiamando n l'angolo che fa il medesimo piano coll'orizzonte, e b l'ordinata verticale dello stesso piano corrispondente alla origine delle coordinate, che suporremo il punto da cui si è scagliato il corpo, sarà

$$y' = \text{tang}.\, n \,.\, u' - b$$

la equazione data del medesimo piano immobile, y', ed u' esprimendo le sue coordinate.

Il corpo percuotendo la x esima volta il piano dato colla velocità v_x diretta secondo la tangente condotta alla fine dell'arco parabolico x esimo, sarà

$$(\text{sen}.\, n \cos.\, \alpha'_x - \cos.\, n \cos.\, \alpha''_x)\, v_x$$

la componente della medesima velocità, effettivamente distrutta nell'urto x esimo, essendo $\text{sen}.\, n \cos.\, \alpha'_x - \cos.\, n \cos.\, \alpha''_x$ il seno dell'angolo che fa la stessa tangente col medesimo piano immobile; e perciò, sarà

$$r(\text{sen}.\, n \cos.\, \alpha'_x - \cos.\, n \cos.\, \alpha''_x)\, v_x$$

la porzione della medesima componente, che il corpo acquisterà mediante la elasticità, in verso contrario a quella che aveva prima di urtare. Vale a dire, il piano immobile produrrà alla fine del tempo t_x un tale cambiamento nel moto del corpo, che esso invece di avere la velocità

$$(\text{sen.}\,n\cos.\alpha'_x - \cos.n\cos.\alpha''_x)v_x$$

diretta perpendicolarmente contro il piano medesimo, avrà la velocità

$$r(\text{sen.}\,n\cos.\alpha'_x - \cos.n\cos.\alpha''_x)v_x$$

diretta in verso affatto contrario. Quindi si potrà prescindere dal piano stesso, e considerare il moto semilibero, come libero, supponendo, che alla fine del tempo t_x venga comunicata al corpo la velocità

$$(r+1)(\text{sen.}\,n\cos.\alpha'_x - \cos.n\cos.\alpha''_x)v_x$$

con una direzione perpendicolare al piano, e tendente ad allontanarlo dal medesimo.

Sostituendo nella equazione $\Delta y_x = \text{tang.}\,n\Delta u_x$, dedotta dalla equazione delle differenze finite di quella del piano immobile, in luogo delle differenze Δy_x, Δu_x i valori esposti superiormente, si otterrà

$$(v_x\cos.\alpha''_x+\phi_x\cos.\omega''_x)\Delta t_x-\tfrac{1}{2}g\Delta t^2_x=\text{tang.}\,n.(v_x\cos.\alpha'_x+\phi x\cos.\omega_x)\Delta t_x,$$

ossia, ponendo invece delle quantità $\cos.\omega'_x$, $\cos.\omega''_x$, ϕx i loro valori

$$-\text{sen.}\,n,\ \cos.n,\ (r+1)(\text{sen.}\,n\,.\,v_x\cos.\alpha'_x - \cos.n\,.\,v_x\cos.\alpha''_x),$$

si avrà $r(\text{sen.}\,n\,.\,v_x\cos.\alpha'_x - \cos.n\,.\,v_x\cos.\alpha''_x) = \frac{1}{2}g\cos.n\Delta t_x$; e perciò il tempo corso nel descrivere l'$(x+1)$ esimo arco parabolico, cioè Δt_x sarà eguale a

$$\frac{2r}{g\cos.n}\left(\text{sen.}\,n\,.\,v_x\cos.\alpha'_x - \cos.n\,.\,v_x\cos.\alpha''_x\right).$$

Dalle cose qui esposte, si comprende, che per isciogliere la presente questione di moto semilibero colle stesse formole ed equazioni trovate superiormente, parlando del moto libero, basterà supporre nelle formole stesse

$$\phi x\cos.\omega_x=0,\ \phi x\cos.\omega'_x=(r+1)(\text{sen.}\,n\cos.n\cos.\alpha''_x-\text{sen.}^2n\cos.\alpha'_x)v_x,$$

$$\phi x\cos.\omega''_x=(r+1)(\text{sen.}\,n\cos.n\cos.\alpha'_x-\cos.^2n\cos.\alpha''_x)v_x,\ \text{e}$$

$$\Delta t_x=\frac{2r}{g\cos.n}\left(\text{sen.}\,n\cos.\alpha'_x-\cos.n\cos.n\cos.\alpha''_x\right)v_x:$$

supposizioni che riducono le equazioni

$$v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1}=v_x\cos.\alpha_x+\varphi x\cos.\omega_x\,,$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}=v_x\cos.\alpha'_x+\varphi x\cos.\omega'_x\,,$$

$v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}=v_x\cos.\alpha''_x+\varphi x\cos.\omega''_x-g\Delta t_x$ alle tre seguenti

$$v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1}=v_x\cos.\alpha_x\,,$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}=\Big[(\cos.^2 n-r\,\mathrm{sen}.^2 n)\cos.\alpha'_x+(r+1)\,\mathrm{sen}.n\cos.n\cos.\alpha''_x\Big]v_x\,,$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}=\left[(\mathrm{sen}.^2 n-r\cos.^2 n+2r)\cos.\alpha''_x+\left((r+1)\cos.n-\frac{2r}{\cos.n}\right)\cos.\alpha'_x\right]v_x\,,$$

che converrebbe, al solito, integrare, volendo continuare direttamente la presente soluzione.

Se la superficie che obbliga il corpo a descrivere i successivi archi parabolici invece di essere piana, fosse una superficie curva qualunque, ma di cui si conoscesse la equazione, coi medesimi ragionamenti fatti superiormente si arriverebbe a trovare opportunamente le quantità φx, ω_x, ω'_x, ω''_x, Δt_x espresse colle altre v_x, α_x, α'_x, α''_x, onde potere considerare il moto siccome libero.

Trovate le quantità φx, ω_x, ω'_x, ω''_x espresse colle altre v_x, α_x, α'_x, α''_x, od almeno le equazioni tra tutte queste quantità, dalle quali converrebbe cavare le espressioni delle prime da sostituirsi nelle tre equazioni

$$v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1}=v_x\cos.\alpha_x+\varphi x\cos.\omega_x\,,$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}=v_x\cos.\alpha'_x+\varphi x\cos.\omega'_x\,,$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}=v_x\cos.\alpha''_x+\varphi x\cos.\omega''_x-g\Delta t_x\,,$$

onde determinare, mediante le integrazioni delle tre equazioni risultanti, i valori delle quantità v_x, α_x, α'_x, α''_x, come abbiamo fatto superiormente, sarà utile qualche volta, l'osservare, se si potranno avere i valori delle quantità ω_x, ω'_x, ω''_x, φx, e Δt_x, senza conoscere le altre, le quali dipendendo dalle integrazioni delle tre equazioni risultanti molte volte non si possono determinare.

Per chiarire questa osservazione, e nello stesso tempo mostrare con un esempio, quanto sia utile in alcuni casi, ne usaremo per continuare la soluzione di questa questione di moto semilibero già cominciata.

Eliminando la espressione
$$\text{sen}.n\,.\,v_x\,\cos.\alpha'_x - \cos.n\,.\,v_x\,\cos.\alpha''_x$$
dalle due equazioni $\varphi x=(r+1)(\text{sen}.n.v_x\cos.\alpha'_x-\cos.n.v_x\cos.\alpha''_x)$,
$$\Delta t_x=2r(\text{sen}.n.v_x\cos.\alpha'_x-\cos.n.v_x\cos.\alpha''_x):g\cos.n,$$
si ottiene la sola semplicissima equazione seguente
$$\Delta t_x = \frac{2r}{g(r+1)\cos.n}\,.\,\varphi x,$$
colla quale si avrà il valore di una delle due quantità φx, Δt_x, quando si conoscerà quello dell'altra.

Ponendo $x+1$ in luogo della x nella equazione
$$\varphi x=(r+1)(\text{sen}.n\,.v_x\,\cos.\alpha'_x - \cos.n\,.v_x\,\cos.\alpha''_x),$$
hassi $\varphi(x+1)=(r+1)(\text{sen}.n.v_{x+1} - \cos.n.v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1})$; ma
$$v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}=v_x\,\cos.\alpha'_x - \varphi x\,\text{sen}.n, \text{ e}$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}=v_x\,\cos.\alpha''_x + \varphi x\cos.n - g\Delta t_x, \text{ ossia}$$
$$v_{x+1}\cos.\alpha''_{x-1}=v_x\cos.\alpha''_x+\varphi x\cos.n-\frac{2r}{(r+1)\cos.n}.\varphi x, \text{ per essere}$$
$\Delta t_x = 2r\varphi x : g(r+1)\cos.n$, come abbiamo dianzi veduto; adunque sarà
$$\varphi(x+1)=(r+1)(\text{sen}.n.v_x\cos.\alpha'_x-\cos.n.v_x\cos.\alpha''_x-\varphi x+\frac{2r}{r+1}\varphi x);$$
ovvero $\varphi(x+1)=r\varphi x$;
e perciò $\varphi x = \text{A}r_x$, (§. 39),
A esprimendo la costante arbitraria introdotta dalla integrazione. Così sarà
$$\Delta t_x = \frac{2r\text{A}}{g(r+1)\cos.n}\,.\,r^x;$$
ed integrando, e soddisfacendo colla nuova costante arbitraria alla condizione $t_0=0$, si avrà
$$t_x = \frac{2r\text{A}(r^x-1)}{g(r^2-1)\cos.n}, \text{ (§. 27)}.$$

Per trovare il valore della arbitraria A da cui dipendono attualmente i valori delle quantità φx, Δt_x, t_x, facciasi $x=1$ nella equazione
$$\text{A}r^x=(r+1)(\text{sen}.n\,.\,v_x\,\cos.\alpha'_x - \cos.n\,.\,v_x\,\cos.\alpha''_x),$$
risultante dall'eguagliare fra loro le due espressioni trovate

di ϕx, e si avrà

$$Ar = (r+1)(\text{sen.}\,n\,.\,v_x \cos.\,\alpha'_1 - \cos.\,n\,.\,v_1 \cos.\,\alpha''_1);$$

cioè $A = \frac{r+1}{r}\left(\text{sen.}\,n\,.\,v' \cos.\,m' - \cos.\,n\,.\,v' \cos.\,m'' + g\theta \cos.\,n\right)$,

ponendo in luogo di $v_1 \cos.\,\alpha'_1$, $v_1 \cos.\,\alpha''_1$ i loro valori esposti nel principio della Proposizione VII.

Ora essendo $y_1 = \theta v' \cos.\,m'' - \frac{1}{2} g\theta^2$, $u_1 = \theta v' \cos.\,m'$, e per la equazione del piano $y_1 = hu_1 - b$, supposto tang. $n = h$, si avrà

$$\theta^2 - \frac{2v'}{g}(\cos.\,m'' - h \cos.\,m')\theta = \frac{2b}{g},$$

$$\text{ossia } \theta^2 - \frac{2v' \text{ sen.}\,\pi}{g \cos.\,n}\theta - \frac{2b}{g} = 0,$$

supponendo π l'angolo che fa la direzione della velocità v' di projezione primitiva col piano dato; e perciò, posto $\sqrt{(v'^2 \text{sen.}^2\pi + 2bg \cos.^2 n)} = R$, sarà $\theta = \frac{v' \text{ sen.}\,\pi + R}{g \cos.\,n}$: e con ciò

$$v_1 \cos.\,\alpha_1 = v' \cos.\,m', \qquad z_1 = \frac{v' \cos.\,m}{g \cos.\,n}(v' \text{sen.}\,\pi + R),$$

$$(i)\,..\,v_1 \cos.\,\alpha'_1 = v' \cos.\,m', \text{ e } (j)\,..\,u_1 = \frac{v' \cos.\,m'}{g \cos.\,n}(v' \text{sen.}\,\pi + R),$$

$$v_1 \cos.\,\alpha''_1 = hv' \cos.\,m' - \frac{R}{\cos.\,m}, \qquad y_1 = \frac{hv' \cos.\,m''}{g \cos.\,n}(v' \text{sen.}\,\pi + R) - b.$$

Sostituendo il valore del tempo θ nella espressione della arbitraria A, e facendo le riduzioni, si avrà $A = \frac{r+1}{r} R$. Quindi

$$\phi x = \frac{r+1}{r} R r^x, \ \Delta t_x = \frac{2R}{g \cos.\,n}\,.\,r^x, \text{ e } t_x = \frac{2R}{g \cos.\,n}\,.\,\frac{r^x - r}{r-1}.$$

Essendo adesso conosciute le quantità θ, ω_x, ω'_x, ω''_x, ϕx, t_x; cioè il tempo corso tra l'istante nel quale si è scagliato il corpo, e quello nel quale esso ha percosso la prima volta il piano dato, la grandezza e direzione delle velocità finite che vengono comunicate al corpo di quando in quando, e la legge dei tempi che passano tra gl'istanti nei quali vengono comunicate le stesse velocità finite, la presente questione di moto semilibero è ridotta a potersi trattare precisamente, siccome un caso particolare della proposizione VII, che è di moto libero.

Pongasi nelle espressioni delle quantità $v_x\cos.\alpha_x$, $v_x\cos.\alpha'_x$, $v'_x\cos.\alpha''_x$ esposte nella proposizione accennata i valori di ω_x, ω'_x, ω''_x, ϕx, Δt_x, e si avrà

$$v_x\cos.\alpha_x = \mathrm{B},$$

$$(k)\ldots\ldots v_x\cos.\alpha'_x = \mathrm{C} - \frac{r+1}{r-1}\mathrm{R}\,\mathrm{sen}.n\,.\,r^{x-1},$$

$$v_x\cos.\alpha''_x = \mathrm{D} + \frac{\mathrm{R}}{r-1}\left(\frac{r+1}{r}\cos.n - \frac{2}{\cos.n}\right)r^x,$$

B, C, e D esprimendo le costanti arbitrarie, colle quali sodisfacendo alle tre equazioni (i), si ha $\mathrm{B}=v'\cos.m$, $\mathrm{C}=v'\cos.m' + \frac{r+1}{r-1}\mathrm{R}\,\mathrm{sen}.n$, e $\mathrm{D}=h\mathrm{C}$; cioè restano esse determinate.

Le tre equazioni (k) danno immediatamente

$$v_x=\sqrt{\left\{\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2-\frac{4\mathrm{DR}}{(r-1)\cos.n}r^x+\mathrm{R}^2\left(r^{-2}+4h^2(r-1)^{-2}\right)r^{2x}\right\}},$$

$$\cos.\alpha_x=\mathrm{B}:\sqrt{\left\{\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2-\frac{4\mathrm{DR}}{(r-1)\cos.n}r^x+\mathrm{R}^2\left(r^{-2}+4h^2(r-1)^{-2}\right)r^{2x}\right\}},$$

$$\cos.\alpha'_x=\left(\mathrm{C}-\frac{r+1}{r-1}\mathrm{R}\,\mathrm{sen}.n.r^{x-1}\right):\sqrt{\left\{\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2-\frac{4\mathrm{DR}}{(r-1)\cos.n}r^x+\mathrm{R}^2\left(r^{-2}+4h^2(r-1)^{-2}\right)r^{2x}\right\}},$$

$$\mathrm{os}.\alpha''_x=\left[\mathrm{D}+\frac{\mathrm{R}}{r-1}\left(\frac{r+1}{r}\cos.n-\frac{2}{\cos.n}\right)r^x\right]:\sqrt{\left\{\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2-\frac{4\mathrm{DR}}{(r-1)\cos.n}r^x+\mathrm{R}^2\left(r^{-2}+4h^2(r-1)^{-2}\right)r^{2x}\right\}},$$

vale a dire, la grandezza e la direzione della velocità del corpo alla fine del tempo t_x, ossia dell'arco x esimo che esso descrive.

Sostituendo nelle equazioni $\Delta z_x=v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1}\Delta t_x$,

$$\Delta u_x=v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}\Delta t_x,$$

$$\Delta y_x=v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}\Delta t_x-\tfrac{1}{2}g\Delta t^2_x$$

in luogo delle quantità $v_{x+1}\cos.\alpha_{x+1}$, $v_{x+1}\cos.\alpha'_{x+1}$, $v_{x+1}\cos.\alpha''_{x+1}$, Δt^x i loro valori sopra trovati, e poi facendo tutte le integrazioni, si avrà

$$z_x = \frac{2\mathrm{BR}}{g(r-1)\cos.n}\,.\,r_x + \mathrm{E},$$

$$u_x = \frac{2CR}{g(r-1)\cos.n} r_x - \frac{2hR^2}{g(r-1)^2} \cdot r^2{}_x + F,$$

$$y_x = \frac{2DR}{g(r-1)\cos.n} \cdot r_x - \frac{2h^2R^2}{g(r-1)^2} \cdot r^2{}_x + G;$$

cioè le coordinate di quel punto del piano immobile, nel quale esso è percosso dal grave la x esima volta. Le costanti arbitrarie E, F, G introdotte dalle tre integrazioni, determineransi facilmente soddisfacendo alle tre equazioni (j).

Colla stessa facilità colla quale si sono trovate le quantità v_x, $\cos. \alpha_x$, ec. si troverebbero le coordinate z'_x, u'_x, y'_x di un punto qualunque dell'arco x esimo che descrive il corpo, la grandezza e direzione della velocità che esso avrà alla fine del tempo $\theta + t_x + t'_x$, e le equazioni della x esima parabola che descrive.

Corollario 1. Indicando colla s_x la perpendicolare tirata dal punto corrispondente alle coordinate z_x, u_x, y_x sulla intersezione del piano immobile col piano delle coordinate z_x, y_x, sarà evidentemente $s_x \cos. n = u_x$; e però, prendendo per origine delle coordinate il punto a cui corrispondono le coordinate $z_x = 0$, $u_x = 0$, ed $y_x = b$, il poligono rappresentato dalle ultime tre equazioni esposte, si potrà rappresentare ancora colle sole due equazioni seguenti

$$z_x = \frac{2BR}{g(r-1)\cos.n} \cdot r^x + E,$$

$$s_x = \frac{2CR}{g(r-1)\cos.^2 n} \cdot r^x - \frac{2hR^2}{g(r-1)^2\cos.n} \cdot r^{2x} + \frac{F}{\cos.n},$$

le coordinate essendo ora z_x, ed s_x.

Eliminando da queste ultime equazioni l'indice x degli angoli del poligono, si ottiene la sola equazione

$$s_x = \frac{C}{B\cos.n}(z_x - E) - \frac{g\,\mathrm{sen}.n}{B^2}(z_x - E)^2 + \frac{F}{\cos.n},$$

la quale esprime che il poligono suddetto è parabolico.

Corollario 2. Se il corpo fosse perfettamente elastico, ossia fosse $r = 1$, si avrebbe

$$\varphi x = 2\sqrt{(v'^2\,\mathrm{sen}.^2\pi + 2bg\cos.^2 n)}, \text{ e } \Delta t_x = 2\sqrt{\left(\frac{v^2\,\mathrm{sen}.^2\pi}{g^2\cos.^2 n} + \frac{2b}{g}\right)};$$

cioè

cioè tanto le successive velocità $\varphi 1$, $\varphi 2$, ec., quanto i tempi impiegati nel descrivere i successivi archi parabolici, sarebbero quantità costanti; ossia così le percosse successive $\varphi 1$, $\varphi 2$, ec., che i tempi Δt_1, Δt_2, ec. eguali separatamente fra loro. Ciò che è veramente singolare.

Nella medesima ipotesi avrebbesi

$$v_x \cos.\alpha_x = v' \cos.m,$$
$$v_x \cos.\alpha'_x = v' \cos.m' + 2\mathrm{R}\,\mathrm{sen}.n - 2\,\mathrm{sen}.n.\mathrm{R}x,$$
$$v_x \cos.\alpha''_x = hv' \cos.m' + h\mathrm{R}\,\mathrm{sen}.n - \mathrm{R}\cos.n - 2h\,\mathrm{sen}.n.\mathrm{R}x,$$

ec., ec., ec.

Osservazione. Se il rapporto r della elasticità alla percossa, invece di essere costante, come abbiamo supposto tacitamente sino ad ora, fosse una funzione variabile r_x dell'indice x, con ragionamenti in tutto simili a quelli fatti superiormente per avere la equazione

$\varphi(x+1) - r\varphi x = 0$, avrebbesi in suo luogo quest'altra

$$\varphi(x+1) - \frac{r_x}{r_{x+1}}(r_x+1)\varphi x = 0,$$

la quale integrata dà (§. 39)

$$\varphi x = \mathrm{A}(r_x+1)\,e^{\Sigma \log.r_x};$$

e perciò $\Delta t_x = \frac{2\mathrm{A}}{g\cos.n}\,e^{\Sigma\log.r_{x+1}}$, e $t_x = \frac{2\mathrm{A}}{g\cos.n}\,\Sigma e^{\Sigma\log.r_{x+1}}$

vale a dire, anche nel caso, che, il rapporto della elasticità alla percossa, sia una funzione conosciuta dell'indice x, si potrà trattare la presente questione di moto semilibero, come si è trattata nella ipotesi del medesimo rapporto costante.

Paragonando fra loro tutti i metodi particolari coi quali si sono sciolte le proposizioni esposte in questa Memoria, facilmente scopresi una parte di essi esclusivamente comune a tutti, la quale da sè sola dà una idea generale non solo degli stessi metodi particolari esposti, ma ancora di quelli che si dovranno seguire per isciogliere una proposizione qualunque di moto discreto, anche nel caso che i successivi moti ordinarj siano di più specie differenti; anzi la medesima dà una idea della maniera di ridurle ad essere di semplice moto libero.

Nota prima.

In tutti i trattati di trigonometria vi sono esposte e dimostrate le equazioni colle quali hassi la tangente, il seno, ed il coseno della somma di due archi, quando queste linee si conoscano per gli archi stessi; ed in alcuni vi sono anche dedotte da quelle delle altre equazioni, le quali danno similmente la tangente, il seno, ed il coseno della somma di tre, di quattro, ec. archi. E quantunque coll'osservare quelle equazioni, non sia difficile, siccome io medesimo mi sono persuaso, lo scoprire la legge onde avere immediatamente, per induzione, una simile equazione rispetto alla somma di un numero qualunque di archi, ciò non ostante, siccome la induzione immediata, che in queste e simili ricerche, sembra indispensabilissima, non è mai una dimostrazione diretta, così in questa nota, approfittando della opportunità che mi si presenta, esporrò un metodo con cui avere immediatamente la tangente, il seno, ed il coseno della somma di un numero qualsivoglia di archi, quando tali rette conoscansi per gli archi semplici, e ciò senza il minimo soccorso della immediata induzione.

Qualunque siano le quantità A, B, C, ... M, purchè il loro numero non sia infinito, possono sempre rappresentare, per quello che si dimostra nella teorica delle interpolazioni, i primi termini di una medesima serie, ossia i risultamenti che si hanno, supponendo, nel suo termine generale, successivamente l'indice del numero dei termini eguale a 0, 1, 2, 3, ec.; anzi, variando la disposizione delle medesime quantità, esse potranno rappresentare i primi termini di tante diverse serie, quante sono le combinazioni, che si possono fare con esse; e però altrettanti saranno i termini generali, o le funzioni del numero dei termini delle stesse serie, che avranno l'anzidetta proprietà.

La prima di queste due verità sarà il fondamento delle ricerche, che daranno le equazioni dimandate; e la seconda, ci previene, che potremo variare le equazioni stesse, permutando fra loro le funzioni trigonometriche degli archi semplici, che le equazioni medesime conteranno.

PROPOSIZIONE.

„ Date le tangenti, i seni, ed i coseni di un numero
„ qualunque di archi, trovare la tangente, il seno, ed il
„ coseno della somma di essi.

Della tangente.

Siano $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(n+1)$ archi, e $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ le loro tangenti, le quali sono per ipotesi conosciute.

Supponendo $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{x-1}=\xi_x$, sarà $\xi_{x+1}=\xi_x+\alpha_x$; e però $\text{tang.}\,\xi_{x+1}=\text{tang.}(\xi_x+\alpha_x)=(\text{tang.}\,\xi_x+t_x):(1-t_x\,\text{tang.}\,\xi_x)$, ossia si avrà la equazione delle differenze finite

(D) .... $t_x\,\text{tang.}\,\xi_x\,\text{tang.}\,\xi_{x+1}-\text{tang.}\,\xi_{x+1}+\text{tang.}\,\xi_x+t_x=0$, la quale integrata con una regola simile a quella usata nelle proposizioni I. IV. e V. di questa Memoria per integrarne altre affatto simili ad essa, e trovato il valore della costante arbitraria introdotta dalla integrazione, come si trovò nella proposizione prima, cioè per la equazione (A), somministra

$$\text{tang.}\,\xi_x=\cfrac{t_x}{-1+b_{x-1}+\cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2}+\cfrac{a_{x-2}}{\ddots\, b_1+\cfrac{a_1}{1+\cfrac{t_1}{t_0}}}}},$$

essendo $b_x=\frac{t_x+t_{x+1}}{t_x}$, ed $a_x=-\frac{1+t^2_x}{t_x}t_{x+1}$. Quindi, ponendo invece delle due quantità b_{x-1}, a_{x-1} i loro valori, e supponendo nella formola risultante $x=n+1$, si avrà $\text{tang.}\,\xi_{n+1}$, ossia la tangente dimandata

$$\text{tang.}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=\cfrac{t_n}{1-\cfrac{1+t^2_n}{b_{n-1}+\cfrac{a_{n-1}}{b_{n-2}+\cfrac{a_{n-2}}{\ddots\; b_1+\cfrac{a_1}{1+\cfrac{t_1}{t_0}}}}}}.$$

Corollario 1. Siano gli archi α_0, α_1, α_2, ... α_n eguali fra loro, e sarà t_x costante; e perciò $\text{tang.}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n)$

$$=\text{tang.}(n+1)\alpha=\cfrac{\text{tang. }\alpha}{1-\cfrac{\text{sec.}^2\alpha}{2-\cfrac{\text{sec.}^2\alpha}{2-\cfrac{\text{sec.}^2\alpha}{\ddots\; 2-\cfrac{\text{sec.}^2\alpha}{2-\cfrac{\text{sec.}^2\alpha}{2}}}}}}$$

continuando la divisione $(n+1)$ volte.

Corollario 2. Essendo l'integrale finito dell'arco, che ha per tangente la funzione t_x qualunque, eguale alla somma degli archi, i quali hanno per tangenti $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{x-1}$; cioè eguale ad $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{x-1}$, sarà, per le cose esposte

$$\Sigma\,\text{Arc. tang. } t_x=\text{Arc. tang. }\cfrac{-t_{x-1}}{1+\cfrac{1+t^2_{x-1}}{b_{x-2}+\cfrac{a_{x-2}}{b_{x-3}+\cfrac{a_{x-3}}{\ddots\; b_1+\cfrac{a_1}{1+\cfrac{t_1}{t_0}}}}}}.$$

Del seno e del coseno.

Indicando colle s_0, s_1, s_2, ... s_n i seni, e colle c_0, c_1, c_2, ..., c_n i coseni degli angoli α_0, α_1, α_2, ..., α_n; e colla ξ_x la somma $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_{x-1}$, come sopra, si ha $\text{sen.}\,\xi_{x+1}=\text{sen.}(\xi_x+\alpha_x)$, ossia $\text{sen.}\,\xi_{x+1}=c_x\,\text{sen.}\,\xi_x+s_x\cos.\,\xi_x$: così $\cos.\,\xi_{x+1}=c_x\cos.\,\xi_x-s_x\,\text{sen.}\,\xi_x$; cioè hansi le due equazioni

$$\text{sen.}\,\xi_{x+1}-c_x\,\text{sen.}\,\xi_x-s_x\cos.\,\xi_x=0,$$
$$\cos.\,\xi_{x+1}-c_x\cos.\,\xi_x+s_x\,\text{sen.}\,\xi_x=0,$$

le quali integrate daranno le espressioni, o formole dimandate.

Eliminando sen. ξ_x da queste due equazioni, si ha

$$\cos.\xi_{x+2} - \frac{s_x c_{x+1} + s_{x+1} c_x}{s_x}\cos.\xi_{x+1} + \frac{s_{x+1}}{s_x}\cos.\xi_x = 0;$$

ed eliminando cos. ξ_x, si ottiene

$$\text{sen.}\,\xi_{x+2} - \frac{s_x c_{x+1} + s_{x+1} c_x}{s_x}\,\text{sen.}\,\xi_{x+1} + \frac{s_{x+1}}{s_x}\,\text{sen.}\,\xi_x = 0,$$

equazione la quale contenendo la funzione sen. ξ_x, come l'antecedente contiene cos. ξ_x, c'insegna, che i valori cercati delle due funzioni sen. ξ_x, cos. ξ_x sono due integrali particolari di una medesima equazione del secondo ordine delle differenze finite, cioè della equazione lineare seguente

$$y_{x+2} - \frac{\text{sen.}(a_x + a_{x+1})}{\text{sen.}\,a_x}\,y_{x+1} + \frac{\text{sen.}\,a_{x+1}}{\text{sen.}\,a_x}\,y_x = 0.$$

Ad ottenere l'integrale di questa equazione di secondo ordine, e da cui dipendono attualmente le espressioni o formole dimandate delle due funzioni sen. ξ_x, cos. ξ_x, si userà la regola generale, ormai notissima, colla quale s'integrano le equazioni lineari del secondo ordine delle differenze finite, vale a dire la regola, che dal suo autore, io dirò Brunacciana.

Corollario 1. Se tutti gli archi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ fossero tra loro eguali, la equazione superiormente esposta diventerebbe

$$y_{x+2} - 2c y_{x+1} + y_x = 0,$$

la quale, avendo i coefficienti costanti, è anche integrabile colla supposizione di $y_x = A\mu^x$, colla quale s'integrano tutte le equazioni di questa natura (§. 45), ed integrata, dà

$$y_x = A(\cos.a + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,a)^x + A'(\cos.a - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,a)^x;$$

cioè determinando opportunamente le due costanti arbitrarie A, A', hassi

$$\text{sen.}\,xa = \frac{(\cos.a + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,a)^x - (\cos.a - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,a)^x}{2\sqrt{-1}}, \text{ e}$$

$$\cos.xa = \frac{(\cos.a + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,a)^x + (\cos.a - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,a)^x}{2},$$

che sono le notissime formole Bernulliane.

Corollario 2. Per essere

$$\Sigma\,\mathrm{Arc.sen.}\,s_x = \mathrm{A.sen.}\,s_{x-1} + \mathrm{A.sen.}\,s_{x-2} + \ldots + \mathrm{A.sen.}\,s_0,$$

e $$\Sigma\,\mathrm{Arc.cos.}\,c_x = \mathrm{A.cos.}\,c_{x-1} + \mathrm{A.cos.}\,c_{x-2} + \ldots + \mathrm{A.cos.}\,c_0,$$

potremo dare a questi integrali finiti le forme seguenti

$$\Sigma\,\mathrm{A.sen.}\,s_x = \mathrm{A.sen.}\,\xi_x, \text{ e } \Sigma\,\mathrm{A.cos.}\,c_x = \mathrm{A.cos.}\,\xi_x,$$

rappresentando sen. ξ_x, cos. ξ_x i due integrali particolari suddetti della medesima equazione generale in y_x.

NOTA SECONDA.

In questa nota si espone un metodo per integrare l'equazione

$$(\mathrm{E}) \ldots a_x y_x y_{x+1} + b_x y_{x+1} + c_x y_x + d_x = 0,$$

nella ipotesi di a_x, b_x, c_x, e d_x funzioni qualsivogliono cognite della x, per riunire in un solo quelli coi quali si sono integrate le quattro equazioni (A), (B), (C), (D), trovate nelle proposizioni I., IV., V., e nella nota antecedente, le quali sono visibilmente casi particolari di questa.

Onde integrare l'equazione (E), supponghiamo $y_x = \frac{t_x}{z_x}$, t_x, e z_x rappresentando due nuove funzioni incognite, ed avremo, colla stessa equazione

$$y_{x+1} = -(c_x t_x + d_x z_x) : (a_x t_x + b_x z_x);$$

ma per supposizione dev'essere $y_{x+1} = \frac{t_{x+1}}{z_{x+1}}$; adunque, tra le funzioni incognite t_x, z_x, si avrà l'equazione

$$\frac{t_{x+1}}{z_{x+1}} = -\frac{c_x t_x + d_x z_x}{a_x t_x + b_x z_x}.$$

Per soddisfare quest'equazione e determinare nel medesimo tempo i valori delle due funzioni t_x, z_x, si supponga $t_{x+1} = -c_x t_x - d_x z_x$, e si avrà $z_{x+1} = a_x t_x + b_x z_x$; cioè si avranno le due equazioni

$$t_{x+1} + c_x t_x + d_x z_x = 0, \quad z_{x+1} - a_x t_x - b_x z_x = 0$$

anch'esse delle differenze finite di prim'ordine, come la proposta, ma lineari.

Eliminando la funzione t_x da queste due equazioni, e supponendo $\frac{a_x b_{x+1} - c_x a_{x+1}}{a_x} = A_x$, e $(b_x c_x - a_x d_x)\frac{a_{x+1}}{a_x} = B_x$, hassi la sola equazione seguente

$$z_{x+2} - A_x z_{x+1} - B_x z_x = 0,$$

la quale, benchè sia del second'ordine, ed abbia i coefficienti variabili, nulladimeno, si sa integrare colla regola Brunacciana.

Diffatto, supponghiamo $z_x = Ce^{\Sigma l \cdot \alpha_x}$, C esprimendo una costante arbitraria, $l \cdot \alpha_x$ il logaritmo Neperiano della funzione incognita α_x, ed e, al solito, la base dei medesimi logaritmi, ed avremo

$$\alpha_x \alpha_{x+1} - A_x \alpha_x - B_x = 0;$$

e perciò $\alpha_x = A_{x-1} + \frac{B_{x-1}}{a_{x-1}}$, ovvero

$$\alpha_x = A_{x-1} + \cfrac{B_{x-1}}{A_{x-2} + \cfrac{B_{x-2}}{A_{x-3} + \cfrac{B_{x-3}}{\ddots\, A_1 + \cfrac{B_1}{A_0 + \cfrac{B_0}{\alpha_0}}}}},$$

α_0 esprimendo una costante arbitraria.

Per trovare il valore dell'altra funzione t_x, si sostituisca nel suo valore $(z_{x+1} - b_x z_x) : a_x$, desunto dalla prima delle due equazioni esposte, qui sopra, in luogo della z_x il suo valore $Ce^{\Sigma l \cdot a_x}$, ed avrassi

$$t_x = \frac{a_x - b_x}{a_x} Ce^{\Sigma l \cdot a_x}.$$

Ora sostituendo nella frazione $t_x : z_x$, invece delle funzioni t_x, z_x i loro valori

$$Ce^{\Sigma l \cdot a_x},\ \frac{a_x - b_x}{a_x} Ce^{\Sigma l \cdot a_x},$$

si ha

$$y_x = \frac{a_x - b_x}{a_x};\ \text{quindi}\ y_x = \frac{1}{a_x}\left(-b_x + A_{x-1} + \cfrac{B_{x-1}}{A_{x-2} + \cfrac{B_{x-2}}{A_{x-3} + \cfrac{B_{x-3}}{\ddots\, A_1 + \cfrac{B_1}{A_0 + \cfrac{B_0}{a_0}}}}}\right)$$

integrale completo dell'equazione (E), per essere α_0 una quantità tutt'ora arbitraria.

OSSERVAZIONE I. Potrei qui esporre molte eleganti questioni di geometrìa, le soluzioni delle quali dipendono dalle integrazioni di equazioni, che sono anch' esse casi particolari della (E) integrata qui sopra, e ciò servirebbe per mostrare l'uso dovizioso di essa anche nella pura geometrìa; ma siccome con questa esposizione mi allontanerei troppo dallo scopo che mi sono prefisso, così mi limiterò alle due seguenti.

PROPOSIZIONE PRIMA.

„ In un dato poligono rettilineo inscriverne un altro ri-
„ entrante, i lati del quale prolungati, se occorre, passino
„ per altrettanti punti dati (*).

Siano numerizzati i lati del poligono dato, quelli del dimandato, ed i punti dati di posizione; e sia $y = a_x z + b_x$ l'equazione della retta nella quale trovasi il lato x esimo del dato, cioè y e z le coordinate di un punto qualunque, ed a_x, e b_x i soliti parametri, qui funzioni cognite del numero x, dai quali dipende la posizione della medesima retta, relativamente a due assi ortogonali a cui essa si riferisce.

Similmente, siano A_x e B_x i due analoghi parametri, in questo caso funzioni incognite di x, dai quali dipende la posizione di quella retta di cui è parte l'x esimo lato del poligono dimandato; cioè, sia $u = A_x t + B_x$ l'equazione della stessa retta, rappresentando u, e t le coordinate di un punto qualunque di essa.

Supponendo, che il vertice dell' angolo formato dai lati x, $(x + 1)$ esimi del poligono dimandato, od inscritto, sia quello che cade nel lato x esimo del poligono dimandato, avran-

---

(*) Quando i vertici degli angoli di un poligono sono nelle rette in cui trovansi i lati di un altro poligono, quello si dice qui *Inscritto* in questo; e reciprocamente questo *Circoscritto* a quello.

avranno luogo insieme le tre equazioni

$$y = a_x z + b_x\ ,\quad y = A_x z + B_x\ ,\quad y = A_{x+1} z + B_{x+1}\ ,$$

passando le rette espresse da esse pel medesimo punto, cioè pel vertice anzidetto .

Eliminando da queste tre equazioni trovate le quantità y, z, che rappresentano qui le coordinate del punto comune alla retta nella quale vi è il lato x esimo del poligono circoscritto, e delle due nelle quali vi sono i due x, $(x+1)$ esimi dell' inscritto, si avrà la sola equazione

$$(a) \ldots\ldots B_x \Delta A_x - A_x \Delta B_x = b_x \Delta A_x - a_x \Delta B_x\ .$$

E questa è l' equazione esprimente la relazione, che debbono avere in generale i parametri A_x, B_x, a_x, b_x; perchè il poligono di cui il lato x esimo trovasi nella retta, che ha per equazione $u = A_x t + B_x$, sia inscritto in quello avente il lato x esimo nell' espressa dall' altra $y = a_x z + b_x$, o questo circoscritto a quello .

Rappresentata colla m_x l' ordinata, e colla n_x l' ascissa dell' x esimo punto dato di posizione, e supposto che passi per esso la retta nella quale vi è il lato x esimo del poligono dimandato, si avrà, fra le funzioni A_x, B_x incognite, e le cognite m_x, n_x, l' equazione $m_x = A_x n_x + B_x$. Adunque, affinchè la retta in cui trovasi il lato x esimo del poligono dimandato sia espresso dall' equazione supposta $u = A_x t + B_x$, le due funzioni A_x, B_x debbono avere le relazioni che esprimono le due equazioni

$$B_x \Delta A_x - A_x \Delta B_x = b_x \Delta A_x - a_x \Delta B_x$$

$$m_x = A_x n_x + B_x\ .$$

Eliminando da queste ultime equazioni la funzione B_x, si ha la sola equazione delle differenze finite, fra le sole funzioni A_x, A_{x+1},

$$A_x A_{x+1} \Delta n_x - (b_x + a_x n_{x+1} - m_x) A_{x+1} - (m_x - a_x n_x - b_x) A_x + a_x \Delta m_x = 0,$$

la quale, siccome si vede, è un caso particolare dell' equazione (E); e perciò anch' essa integrabile col metodo superiormente esposto .

La costante arbitraria, che conterrà l' integrale di quest' equazione, ossia il valore della A_x, si determinerà, soddisfacendo la condizione che il poligono dimandato dev'essere rientrante, vale a dire, che, sì il suo primo, che il suo ultimo lato, debbono avere uno stesso punto comune colla retta della quale è porzione l'ultimo lato del dato.

L'equazione $m_x = A_x n_x + B_x$, esposta sopra, dà

$$B_x = m_x - A_x n_x,$$

cioè il valore richiesto dell'altra funzione B_x.

Conoscendo attualmente i valori delle funzioni A_x, B_x, e perciò l'equazione $u = A_x t + B_x$ della retta di cui è parte il lato x esimo del poligono dimandato, avransi facilissimamente tutte le altre equazioni e quantità dalle quali dipende la conoscenza completa di esso.

Se le successive rette nelle quali sono situati i lati del poligono inscritto, invece di passare per altrettanti punti dati di posizione, come si è supposto nella proposizione trattata, dovessero formare angoli che avessero alcune proprietà, o fra loro, o con quelli di un secondo poligono dato, ossia con quelli del dato stesso, si conoscerebbe la funzione A_x, immediatamente, o previa l'integrazione dell'equazione esprimente la stessa passione, come appunto accade rinvenendo con questi principj, il poligono che descrive il corpo nella Proposizione V.; ed avrebbesi sempre la B_x integrando l'equazione generale (a) dei poligoni inscritti, o la sua equivalente

$$B_{x+1} \Delta \frac{a_x - A_{x+1}}{a_x - A_x} B_x - \frac{b_x \Delta A_x}{a_x - A_x} = 0.$$

Ancora la soluzione del famosissimo problema, d'inscrivere in un dato cerchio un poligono rientrante, che i suoi lati passino, distesi, abbisognando, per altrettanti punti dati di posizione, trattato come lo fu dal Signore *Magistrini* nella sua ingegnosa poligonometrìa analitica, dipende dall'integrazione di un'equazione della forma della (E), e però esso si potrà sciogliere e generalmente, anche seguendo questo metodo, integrando l'equazione risultante, come un caso particolare della stessa (E).

Non essendomi noto che siasi pubblicata la soluzione della proposizione „ Inscrivere in una linea qualunque di second' ordine un poligono rettilineo rientrante di un numero qualsivoglia di lati, i quali prolungati se fa bisogno passino per altrettanti punti dati di posizione nel piano di essa „ la quale è evidentemente rispetto all' Ellisse, alla Parabola, ed alla Iperbola, cioè in generale alle linee di second' ordine, ciò che è il Problema anzi accennato relativamente al solo circolo, ed il superiormente trattato pe' poligoni rettilinei, approfitto della presente occasione onde esporre di essa la soluzione seguente, benchè appoggiata puramente alla geometrìa descrittiva, e però a principj, che non hanno nessun rapporto cogli esposti in questa Memoria.

Eretto un Cono ordinario sul piano della linea di second' ordine, e fatto al medesimo, con un piano, una sezione circolare, si unisca il suo vertice coi punti dati nel piano della linea stessa, e si prolunghino queste rette, se fa bisogno, sino all' incontro di quel piano nel quale vi è la sezione circolare, ed avransi così in questo piano, tanti punti e dati di posizione, quanti sono quelli nel piano della stessa linea data: fatto questo, s' inscriva nella sezione circolare un poligono rientrante cui i lati passino pei punti anzi determinati nel piano della medesima, e poscia si prolunghino, abbisognando, i lati del cono che passano per i vertici di questo poligono, sino all' incontro della linea data di second' ordine, e questi punti d' incontro saranno manifestamente i vertici del poligono inscritto nella data linea di second' ordine, i cui lati passeranno prolungati, se fa bisogno, pei punti dati di posizione, vale a dire i vertici del poligono dimandato.

Esempio. Inscrivere nella parabola ABC un triangolo A'B'C' tale, che i suoi lati, prodotti se sia d' uopo, passino per tre punti Q, R, ed S dati?

Fissiamo per primo piano dei coordinati quello della parabola medesima, e per secondo quello che passa per DBE suo asse, perpendicolarmente allo stesso suo piano.

Da un punto F della parabola si tiri la FG perpendicolare al suo asse, si prenda sul medesimo GH = GF, si unisca il punto H coll'I del prolungamento della FG; conducasi la HJ perpendicolare all'HI, e si estenda sino in J punto dell'altro prolungamento della FG; si tirino le JL, IL, la prima parallela all' asse della parabola, e la seconda pel suo vertice, cioè per B; e saranno queste le intersezioni del primo piano coordinato, e di una superficie conica ordinaria avente il vertice in L, e di cui la stessa parabola data ne è una sezione fatta parallelamente al lato JL.

Trovati in questo modo i lati JL, BL, si conduca la MN perpendicolare a DBE, e sarà MO il diametro di una sezione circolare del medesimo, disegnata nel piano le cui tracce sono PN, PM.

Condotte le rette QT, RU, SV, LX perpendicolari all'asse, ed uniti i punti T, U, e V col vertice L del cono, e gli altri Q, R, ed S col punto X, le rette TL, QX; UL, RX; VL, SX saranno le projezioni di quelle altre che uniscono il vertice del cono coi punti dati Q, R, ed S.

I punti Y, Y'; Z, Z'; W, W' così determinati, esprimono le projezioni dei tre, ove le rette, le quali passano pel vertice L, e pei dati Q, R, ed S incontrano il piano rappresentato dalle tracce PN, PM.

Per inscrivere ora nel cerchio, che ha per diametro OM, il triangolo, i cui lati prodotti, se abbisogna, passino pei punti le cui projezioni sono le anzi determinate, cioè per trovare le projezioni dei vertici degli angoli di questo triangolo, si prenda $Pw = PW$, $Pm = PM$, e si descriva sulla wm come diametro il cerchio $obmc$, e tirisi perpendicolarmente alla traccia PN la $Y'y = PY$, $Z'z = PZ$, e la $W'w = PW$; indi s'inscriva nel cerchio anzi descritto il triangolo abc, che il suo lato ac passi per z, e i prolungamenti degli altri due ab, bc per gli altri due punti w, y, con una delle regole insegnateci da *Giordano*, *Malfatti*, *Lexel*, *Carnot*, *Lagrange*, ec.

Fatto ciò, dal punto a vertice di un angolo del triangolo *abc* si tiri la *am* perpendicolare alla PN, e il punto *m* trovato in questo modo sarà la projezione nel primo piano coordinato del vertice di un angolo del triangolo suddetto inscritto nel cerchio avente per diametro MO.

L'altra projezione del medesimo vertice sarà il punto della PM la cui distanza dal P eguaglia *ma*. In un modo affatto simile si determineranno le projezioni dei vertici degli altri due angoli del medesimo triangolo.

Conoscendosi attualmente le projezioni dei vertici degli angoli del triangolo inscritto nel cerchio che ha per diametro MO, i cui lati distesi, se fa bisogno, passano pei punti, che hanno per projezioni Y, Y'; Z, Z'; W, W', facilmente si determineranno le projezioni dei lati del cono, i quali passano per vertici del triangolo medesimo, ed in conseguenza i vertici A', B', C' del triangolo dimandato.

Determinato, come sopra, il punto *m*, si potrà continuare la soluzione nel modo seguente: uniscasi immediatamente il punto X coll'*m*, prolungasi questa retta sino in A' ad incontrare la parabola; indi si conduca la SA'B', poscia la B'C'Q, in ultimo la C'RA', e sarà A'B'C' il triangolo dimandato.

Osservazione 2. Se in un poligono se ne iscriva un altro, in questo un terzo, in quest'altro un quarto; e così si continui. Indicando colla $u = t\alpha_{x,y} + \beta_{x,y}$ l'equazione fra le coordinate rettangolari u, t della retta nella quale trovasi il lato x esimo del poligono y esimo degli inscritti, l'equazione (a) dà

$$(1) \ldots\ldots \Delta \frac{\alpha_{x,y}}{y} \Delta \frac{\beta_{x,y+1}}{x} = \Delta \frac{\beta_{x,y}}{y} \Delta \frac{\alpha_{x,y+1}}{x};$$

ed esprimendo colla $r = s\delta_{x,y} + \xi_{x,y}$ quella nella quale vi è il lato x esimo del primo dei medesimi poligoni, il quale è anche l'y esimo ciscoscritto all'y esimo suddetto, la stessa equazione (a) somministra

$$(2) \ldots\ldots \Delta \frac{\delta_{x,y}}{x} \Delta \frac{\xi_{x,y}}{y} = \Delta \frac{\delta_{x,y}}{y} \Delta \frac{\xi_{x,y}}{x}.$$

Similmente, chiamando $u_{x,y}$, $t_{x,y}$ le coordinate rettangole del vertice dell'angolo x esimo dell'y esimo poligono degli inscritti, trovasi, colla medesima equazione (a), ma molto più speditamente colla ispezione della figura, l'equazione

$$(3) \ldots\ldots \Delta \frac{u_{x,y}}{y} \Delta \frac{t_{x,y}}{x} = \Delta \frac{u_{x,y}}{x} \Delta \frac{t_{x,y}}{y} :$$

così si dimostra facilissimamente, che ha luogo l'equazione seguente

$$(4) \ldots\ldots \Delta \frac{r_{x,y}}{y} \Delta \frac{s_{x,y+1}}{x} = \Delta \frac{s_{x,y}}{y} \Delta \frac{r_{x,y+1}}{x}$$

tra le coordinate ortogonali $r_{x,y}$, $s_{x,y}$ dei vertici degli angoli del poligono y.

È singolare, che la seconda equazione (4), dei poligoni circoscritti è affatto simile alla (1), prima degli inscritti, e la seconda (3) di questi alla (2), prima di quelli.

Esempio. Sia $\Delta \frac{t_{x,y}}{y} = n\Delta \frac{t_{x,y}}{x}$, cioè la distanza fra i vertici degli angoli x esimi dei poligoni y, ($y+1$) esimi inscritti sia l'n esima parte del lato x esimo del poligono y esimo dei medesimi, e si avrà, mercè l'equazione (3), dianzi esposta, $\Delta \frac{u_{x,y}}{y} = n\Delta \frac{u_{x,y}}{x}$; ossia avransi le due equazioni delle differenze finite, lineari, e del primo ordine, seguenti

$$nt_{x+1,y} - t_{x,y+1} - (n-1)\,t_{x,y} = 0,$$
$$nu_{x+1,y} - u_{x,y+1} - (n-1)\,u_{x,y} = 0,$$

fra loro simili, le quali integrate colla regola notissima di *Lagrange* (§. 86), o con quella che insegnammo in altra occasione, e determinate opportunamente le funzioni arbitrarie introdotte dalle integrazioni, somministrano

$$t_{x,y} = (1-n)^y \left\{ t_{x,0} + y\left(\frac{n}{1-n}\right) t_{x+1,0} + \frac{y(y-1)}{2}\left(\frac{n}{1-n}\right)^2 t_{x+2,0} + \ldots + \left(\frac{n}{1-n}\right)^y t_{x+y,0} \right\},$$

$$u_{x,y} = (1-n)^y \left\{ u_{x,0} + y\left(\frac{n}{1-n}\right) u_{x+1,0} + \frac{y(y-1)}{2}\left(\frac{n}{1-n}\right)^2 u_{x+2,0} + \ldots + \left(\frac{n}{1-n}\right)^y u_{x+y,0} \right\};$$

vale a dire le coordinate del vertice x esimo dell'y esimo poligono degli inscritti espresse per quelle dei vertici degli angoli del primo poligono.

Se fosse $n = \frac{1}{2}$, ossia se i vertici degli angoli del primo poligono y esimo inscritto cadessero nelle metà dei lati dell'$(y-1)$ esimo, le formole integrali, anzi esposte, diventerebbero

$$t_{x,y} = \frac{1}{2^y}\left\{t_{x,0} + y t_{x+1,0} + \frac{y(y-1)}{2} t_{x+2,0} + \ldots\ldots + t_{x+y,0}\right\}, \text{ ed}$$

$$u_{x,y} = \frac{1}{2^y}\left\{u_{x,0} = y u_{x+1,0} + \frac{y(y-1)}{2} u_{x+2,0} + \ldots\ldots + u_{x+y,0}\right\}:$$

come fu trovato altrimenti dal Sig. *Magistrini* nella sua Poligonometria sopra citata.

PROPOSIZIONE SECONDA.

„ Trovare le equazioni di un poligono circoscritto alla „ curva, che ha per equazione $f(y,z)=0$ fra le coordinate ortogonali z, y, conoscendosi le tangenti de' suoi angoli „ esteriori.

Siano z_x, y_x le coordinate del punto di contatto della curva data col lato x esimo del poligono, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_x$, o semplicemente $\left(\frac{dy}{dz}\right)$ la tangente che fa il lato stesso col prolungamento dell'asse delle ascisse z_x: così z_{x+1}, y_{x+1}, $\left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1}$, o $\left(\frac{dy}{dz}\right)'$ le analoghe quantità pel punto di contatto $(x+1)$ esimo; e t_x la tangente dell'angolo esteriore x esimo del poligono, cioè quello compreso dal lato x esimo e dal prolungamento dell'$(x+1)$ esimo.

Essendo l'angolo, che ha per tangente t_x, eguale all'angolo avente per tangente $\left(\frac{dy}{dz}\right)_x$, meno quello che ha $\left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1}$, si avrà

$$t_x = \left\{\left(\frac{dy}{dz}\right) - \left(\frac{dy}{dz}\right)'\right\} : \left\{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)'\right\}; \text{ ossia}$$

$$t_x \left(\frac{dy}{dz}\right)_x \left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1} + \left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1} - \left(\frac{dy}{dz}\right)_x + t_x = 0; \text{ ovvero}$$

$$t_x \left(\frac{dz}{dy}\right)_x \left(\frac{dz}{dy}\right)_{x+1} - \left(\frac{dz}{dy}\right)_{x+1} + \left(\frac{dz}{dy}\right)_x + t_x = 0:$$

equazione, la quale è anch'essa visibilmente un caso particolare della (E), anzi è la stessa (D); e però sarà $\left(\frac{dz}{dy}\right)_x = \frac{t_x}{\xi_x - 1}$, oppure $\left(\frac{dy}{dz}\right)_x = \frac{\xi_x - 1}{t_x}$, ξ_x essendo eguale ad

$$A_{x-1} + \cfrac{B_{x-1}}{A_{x-2} + \cfrac{B_{x-2}}{\ddots\, A_2 + \cfrac{B_2}{A_1 + \cfrac{B_1}{C}}}},$$

ove A_x, e B_x esprimono le funzioni conosciute $1 + \frac{t_{x+1}}{t_x}$, $-(1 + t_x^2)\frac{t_{x+1}}{t_x}$, e la C una costante arbitraria.

Ora dall'equazione data della curva cavasi $\left(\frac{dy}{dz}\right) = -\left(\frac{df}{dz}\right) : \left(\frac{df}{dy}\right)$; e perciò eguagliando questi due valori della tangente $\left(\frac{dy}{dz}\right)_x$, si avrà l'equazione

$$\left(\frac{df}{dz}\right) : \left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{1 - \xi_x}{t_x},$$

la quale esprime una relazione delle coordinate z_x, y_x. Ma queste medesime coordinate hanno anco la relazione espressa dall'equazione data $f(z, y) = 0$; adunque fra le coordinate dei singoli punti di contatto della data curva e dei lati del poligono avranno simultaneamente luogo le due seguenti equazioni

$$\left(\frac{df}{dz}\right) : \left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{1 - \xi_x}{t_x},$$

$$f(z_x, y_x) = 0,$$

le quali potranno servire, conseguentemente, per determinare le medesime coordinate.

Espresse colle t, u le coordinate rettangole di un punto qualunque della retta nella quale cade il lato x esimo del poligono, e colle A, B i parametri da cui si fa dipendere solitalitamente la posizione della medesima rispetto agli assi delle stesse coordinate, cioè espressa coll'equazione $u = \mathrm{A}t + \mathrm{B}$ la medesima retta si avrà $\mathrm{A} = \left(\frac{dy}{dz}\right)_x$,

$$\text{e } \mathrm{B} = y_x - z_x \left(\frac{dy}{dz}\right)_x, \quad (\S.\ 78)$$

dovendo essa passare pel punto a cui corrispondono le coordinate y_x, z_x ed essere tangente la curva nel medesimo punto. Vale a dire, sarà

$$u = t\left(\frac{dy}{dz}\right)_x + y_x - z_x \left(\frac{dy}{dz}\right)_x$$

l'equazione del lato x esimo del poligono: così sarà quest'altra

$$u' = t'\left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1} + y_{x+1} - z_{x+1}\left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1}$$

quella del seguente, u', e t' esprimendo le sue coordinate ortogonali.

Il vertice dell'angolo x esimo del poligono, ossia dell'angolo formato dai lati x, $(x+1)$ esimi, egli è evidentemente un punto comune alle due rette espresse dalle equazioni anzi esposte; e però avransi, fra le coordinate di questo punto, che denomineremo t_x, u_x, simultaneamente le due equazioni seguenti

$$u_x = t_x\left(\frac{dy}{dz}\right)_x + y_x - z_x\left(\frac{dy}{dz}\right)_x,$$

$$u_x = t_x\left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1} + y_{x+1} - z_{x+1}\left(\frac{dy}{dz}\right)_{x+1},$$

le quali somministrano immediatamente

$$t_x = \Delta\left\{z\left(\frac{dy}{dz}\right) - y\right\} : \Delta\left(\frac{dy}{dz}\right),$$

$$u_x = \left\{y\left(\frac{dy}{dz}\right)' - y_{x+1}\left(\frac{dy}{dz}\right) + \left(\frac{dy}{dz}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)'\Delta z_x\right\} : \Delta\left(\frac{dy}{dz}\right);$$

cioè le coordinate del vertice dell'angolo x esimo del poligono circoscritto alla curva espressa dall'equazione data $f(z,y)=0$, ossia le equazioni dimandate.

Esempio. Sia il poligono equiangolo, l'asse delle ordinate y parallelo al suo primo lato, e si avrà $A_x = 1 + \frac{t}{t} = 2$, $- B_x = 1 + t^2 = \sec.^2 e$; e perciò

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_x = \frac{1}{t}\left(1 - \cfrac{\sec.^2 e}{2 - \cfrac{\sec.^2 e}{2 - \cfrac{\sec.^2 e}{\ddots \; 2 - \cfrac{\sec.^2 e}{2 - \cfrac{\sec.^2 e}{C}}}}}\right),$$

e esprimendo qui l'angolo, che ha per tangente t.

Essendo $\left(\frac{dy}{dz}\right)_1$ infinita, stante la disposizione particolare degli assi, ed eguale ad $\frac{1}{t}C$ per la formola qui esposta, sarà $\frac{\sec.^2 e}{C} = 0$; quindi

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_x = \frac{1}{\text{tang.}\, e}\left(1 - \cfrac{\sec.^2 e}{2 - \cfrac{\sec.^2 e}{2 - \cfrac{\sec.^2 e}{\ddots \; 2 - \cfrac{\sec.^2 e}{2}}}}\right),$$

supposto la divisione continuata $(x - 1)$ volte. Ma, da ciò che abbiamo dimostrato nel primo Corollario della prima Nota, risulta il secondo fattore del secondo membro di quest' ultima equazione, cioè la frazione continua

$$1 - \cfrac{\sec.^2 e}{2 - \cfrac{\sec.^2 e}{2 - \cfrac{\sec.^2 e}{\ddots \; 2 - \cfrac{\sec.^2 e}{2}}}}$$

eguale all'ordinaria $\frac{\text{tang.}\, e}{\text{tang.}\,(x-1)\, e}$; adunque sarà

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_x = \frac{1}{\text{tang.}\, e}\left(\frac{\text{tang.}\, e}{\text{tang.}\,(x-1)\, e}\right);\ \text{cioè}$$

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_x = \frac{1}{\text{tang.}\,(x-1)\, e} = \text{cotang.}\,(x-1)\, e:$$

siccome era facile a prevedersi.

Individuiamo ora la curva a cui dev'essere cirscoscritto il poligono, e sia dessa l'Ellisse, che ha per equazione

$$y - \frac{b}{a}\sqrt{(2az - z^2)} = 0,$$

a, e b indicando i suoi semiassi, ed avrassi

$$\left(\frac{df}{dy}\right) = 1,\quad \left(\frac{df}{dz}\right) = -b(a - z) : a\sqrt{(2az - z^2)};$$

e perciò le equazioni, trovate superiormente, dei punti di contatto diventeranno in questo caso particolare

$$b(a - z_x) : a\sqrt{(2az_x - z^2_x)} = \text{cotang.}(x - 1)e,$$

$$ay_x - b\sqrt{(2az_x - z^2_x)} = 0,$$

le quali danno

$$z_x = a - a^2 : \sqrt{[a^2 + b^2\,\text{tang.}(x - 1)e]},\ \text{ed}$$

$$y_x = b : \sqrt{[b^2 + a^2\,\text{cotang.}^2(x - 1)e]};$$

cioè le coordinate od equazioni dei punti di contatto dell'Ellisse coi lati del poligono equiangolo ad esso circoscritto.

Sostituendo nelle espressioni delle coordinate t_x, u_x, esposte sopra, invece delle quantità z_x, y_x, $\left(\frac{dy}{dz}\right)_x$ i loro valori anzi trovati, avransi le stesse coordinate, ossia le equazioni del poligono equiangolo circoscritto all'Ellisse espressa dall'equazione

$$ay - b\sqrt{(2az - z^2)} = 0.$$

Se fosse $b = a$, ovvero la curva data una circonferenza, avrebbesi $\left(\frac{dy}{dz}\right)_x = \text{cotang.}(x - 1)e$, $z_x = a[1 - \cos.(x - 1)e]$, ed $y_x = a\,\text{sen.}(x - 1)e$; e perciò

$$t_x = a\left\{1 - \frac{\Delta\,\text{sen.}(x - 1)e}{\text{sen.}\,e}\right\},$$

$$u_x = -\frac{a}{\text{sen.}\,e}\,\Delta\cos.(x - 1)e$$

per equazioni del poligono circoscritto alla periferia, che ha per equazione al vertice $y^2 - 2az + z^2 = 0$, a esprimendo il suo raggio, e z, y le coordinate rettangole di un suo punto qualunque.

Osservazione 3. Nel cercare l'integrale dell'equazione (E), dopo ch'ebbi trovato

$$y_x = \frac{a_x - b_x}{a_x}$$

avrei potuto ommettere il metodo esposto col quale ottenni questo singolare risultamento, e supporre immediatamente $y_x = (a_x - b_x) : a_x$, come si è fatto integrando le equazioni (A), (B), (C), e (D), ed indi determinare la funzione a_x opportunamente, perchè fosse soddisfatta l'equazione che trattavasi d'integrare, ed avrei avuto, come sopra, l'equazione

$$a_x a_{x+1} - A_x a_x - B_x = 0,$$

per trovare la funzione a_x. Ma siccome collo stesso metodo si possono integrare, o rendere integrabili molte altre equazioni delle differenze finite, non lineari, per questo ho divisato di esporlo.

Finalmente avverto che si ottengono bensì immediatamente gl'integrali delle equazioni (A), (B), ec. sostituendo nell'integrale trovata della (E) in luogo delle funzioni a_x, b_x, c_x, d_x i loro valori che hansi paragonando le medesime equazioni a questa, ma con formole su cui fa d'uopo fare alcune considerazioni onde comprendere che sono dessi equivalenti agli esposti.

SU LA DETERMINAZIONE DELLA CAPACITÀ DI UNA BOTTE O ELITTICO-CIRCOLARE OD ELITTICO-ELITTICA, A FONDI UGUALI O DISUGUALI, ED A PARTI ANTERIORE E POSTERIORE SIMILI O DISSIMILI.

MEMORIA

Del Signor Don Pietro Cossali.

Ricevuta li 10 *Novembre* 1814.

Il celebre *Barnaba Oriani* ha insegnata la seguente bellissima Regola pratica per determinare la capacità di una Botte a fondi disuguali. *Moltiplichiamo tra loro i rispettivi diametri di ciascuna delle tre sezioni di una Botte, ed avremo tre prodotti: al quadruplo del prodotto che ci danno i diametri della maggior sezione aggiungansi gli altri due prodotti: se ne moltiplichi la somma per il sesto della lunghezza della Botte, e questo prodotto si moltiplichi anche pel* 0,785398, *che è la quarta parte della circonferenza di un circolo che ha per diametro* 1, *ed avremo espressa da quest' ultimo prodotto la capacità della Botte*. V. Tomo II dell' esteso corso di Calcolo Sublime del chiariss. Cav. *Vincenzo Brunacci* Calcolo Integrale Capo I, §. 100. Curioso io di vedere i principj, e le condizioni di tal Regola mi proposi in generale il Problema di determinare la capacità di una Botte.

PROBLEMA.

Determinare la capacità di una Botte o Elittico-Circolare, o Elittico-Elittica, o sieno i suoi fondi uguali o disuguali, e le due parti anteriore e posteriore o simili o dissimili.

Sia FOPG la sezione della Botte verticale in lungo, $Q\varphi\varphi'Q'$ la sua sezione orizzontale in lungo, AZBZ' la sua sezione trasversale massima, AZBPφ'GQ'Z la sua parte anteriore, e Gφ'PQ' il fondo che a distinzione chiamerò testa, AZBOφFQZ' la parte posteriore, della quale FφOQ il fondo. Sia CA il semiasse maggiore della sezione elittica trasversale massima $=$B, ed il suo semiasse minore CZ $=a$. Sia il semiasse della testa IG $=b$, e supposta la parte anteriore tutta regolare, e perciò la testa simile alla sezion trasversale massima, sarà I$\varphi' = \frac{a}{B}b$; e sia il semiasse maggiore DF $= b'$ conseguentemente per il supposto medesimo della regolarità della parte posteriore il semiasse minore D$\varphi = \frac{a}{B}\,b'$. Sia poi l'elissi dell'arco anteriore verticale AG espressa per l'equazione $y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2)$, e l'elissi dell'arco anteriore orizzontale Zφ' per l'equazione $\theta^2 = \frac{F^2}{G^2}(G^2 - x^2)$. L'elissi dell'arco vertical posteriore AF abbia per equazione $y'^2 = \frac{B^2}{A'^2}(A'^2 - x^2)$ e l'ellissi dell'arco posteriore orizzontale abbia a sua equazione $\theta'^2 = \frac{F'^2}{G'^2}(G'^2 - x^2)$. Sia C il centro di tutte e quattro le elissi. Si concepisca nella parte anteriore ad una indeterminata ascissa $x =$ CR la sezione trasversale Sφ''NQ''. A fine che questa sia simile alla massima AZBZ' dovrà essere B$:a::y:\theta$, e perciò $\theta = a \times \frac{y}{B}$, $\theta^2 = a^2 . \frac{y^2}{B^2}$. Dunque le due equazioni delle due elissi costituenti la forma della parte anteriore saranno $y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2)$, $\theta^2 = \frac{a^2}{A^2}(A^2 - x^2)$. Similmente si troverà che le due equazioni delle elissi costituenti la forma della parte posteriore esser dovranno $y'^2 = \frac{B^2}{A'^2}(A'^2 - x^2)$, $\theta^2 = \frac{a^2}{A'^2}(A'^2 - x^2)$. Ciò posto non ostante la diversa curvatura della botte da A in G, e da A in F; da Z in φ e da Z in φ' le sezioni trasversali tutte saranno simili alla sezione massima AZBZ' e simili tra loro.

Sia ora la lunghezza intera DI della Botte $=k$, e sia indeterminatamente $\frac{1}{m}k=$ CI la lunghezza della parte anteriore, $\left(1-\frac{1}{m}\right)k$ quella CD della posteriore. Significata per π la circonferenza del circolo di diametro $=1$ sarà $\frac{a}{B}.\pi y^2$ l'area della elittica trasversale indeterminata sezione $S\varphi''NQ''$, ed essendo $RS=y$, $CR=x$ sarà $\frac{a\pi}{B}y^2dx$ l'elemento della solidità della parte anteriore della Botte, e la porzione di essa da C in R sarà $\frac{a\pi}{B}\int y^2dx=\frac{a\pi}{B}\int\left(B^2-\frac{B^2}{A^2}x^2\right)dx=\frac{a\pi}{B}\left(B^2x-\frac{B^2}{A^2}.\frac{x^3}{3}\right)$, e fatto $x=\frac{1}{m}k$ si avrà l'intiera parte anteriore della Botte $=\frac{a\pi}{B}\left(B^2.\frac{1}{m}k-\frac{B^2}{A^2}.\frac{k^3}{3m^3}\right)$. Similmente si vede risultare la intiera parte posteriore $\frac{a\pi}{B}\left[B^2\left(1-\frac{1}{m}\right)k-\frac{B^2}{A'^2}\left(1-\frac{1}{m}\right)^3\frac{k^3}{3}\right]$. Dunque la capacità della Botte intera che chiamerò (C) sarà

$$(C)=\frac{a\pi}{B}\left[B^2k-\frac{B^2}{A^2}.\frac{k^3}{3m^3}-\frac{B^2}{A'^2}\left(1-\frac{1}{m}\right)^3\frac{k^3}{3}\right],$$

ma dall'equazione $y^2=\frac{B^2}{A^2}(A^2-x^2)$ fatto $y=IG=b$, $x=\frac{1}{m}.k$ ricavasi $A^2=\frac{B^2k^2}{m^2(B^2-b^2)}$. E dall'equazione

$$y'^2=\frac{B^2}{A'^2}(A'^2-x^2)\text{ fatto }y'=DF=b',\ x=\left(1-\frac{1}{m}\right)k$$

ricavasi $A'^2=\frac{B^2k^2\left(1-\frac{1}{m}\right)^2}{B^2-b'^2}$ sostituendo sarà

$$(C)=\frac{a\pi}{3B}\left[3B^2k-\frac{k}{m}(B^2-b^2)-\left(1-\frac{1}{m}\right)k(B^2-b'^2)\right]$$
$$=\frac{a\pi k}{3B}\left[2B^2+\frac{1}{m}b^2+\left(1-\frac{1}{m}\right)b'^2\right].$$

Passo io al presente ai casi particolari: se la parte anteriore e la posteriore siano ugualmente lunghe, cioè se sia

$\frac{1}{m}k=\frac{1}{2}k$, e ciò non ostante siano i semi-assi b, b' della testa e del fondo disuguali, saranno A ed A' disuguali, cioè la curvatura della parte anteriore sarà diversa dalla curvatura della parte posteriore, e si avrà

$$(C)=\frac{a\pi k}{3B}\left(2B^2+\frac{b^2}{2}+\frac{b'^2}{2}\right)=\pi\,.\,\frac{k}{3\,.\,2}\left(4\,Ba+\frac{b^2\,.\,a}{B}+\frac{b'^2\,.\,a}{B}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\,.\,\frac{k}{6}\left(4\,.\,2B\,.\,2a+2b\,.\,\frac{2ab}{B}+2b'\,.\,\frac{2ab'}{B}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\,.\,\frac{k}{6}\left(4\,.\,AB\,.\,2CZ+CP\,.\,2I\varphi'+FO\,.\,2D\varphi\right);$$

questo è il caso del Teorema dell'*Oriani*, nè può che sotto tali condizioni aver luogo. Si può anche adoperare la formola

$$\pi\,.\,\frac{k}{6}\left(4AC\times CZ+GI\times I\varphi'+FD\times D\varphi\right)$$

che anzi tornerà più comoda essendo più facile tenere a memoria il numero esprimente la circonferenza π del diametro 1 che è 3,141592 di quello che la sua quarta parte.

Se $A=A'$, cioè se la curvatura della Botte sia la stessa nella parte anteriore e nella posteriore, ed i semiassi b, b' siano disuguali si avrà

$$\frac{B^2k^2}{m^2(B^2-b^2)}=\frac{B^2k^2}{B^2-b'^2}\left(1-\frac{1}{m}\right)^2,\ \text{d'onde}$$

$$m^2\left(1-\frac{1}{m}\right)^2=(m-1)^2=\frac{B^2-b'^2}{B^2-b^2},\ \text{ed}\ m-1=\frac{\sqrt{(B^2-b'^2)}}{\sqrt{(B^2-b^2)}},$$

e quindi $(C)=\frac{a\pi k}{3B}\left(2B+\frac{b^2\sqrt{(B^2-b^2)}}{\sqrt{(B^2-b^2)}+\sqrt{(B^2-b'^2)}}+\frac{b'^2\sqrt{(B^2-b^2)}}{\sqrt{(B^2-b^2)}+\sqrt{(B^2-b'^2)}}\right)$ che moltiplicando e dividendo le frazioni per $\sqrt{(B^2-b^2)}-\sqrt{(B^2-b'^2)}$ si riduce alla forma più semplice $(C)=\frac{a\pi k}{3B}\times\left[B^2+b^2+b'^2+\sqrt{(B^2-b^2)(B^2-b'^2)}\right]$. Se $b'=b$ si avrà $(C)=\frac{a\pi k}{3B}(2B^2+b^2)$: se oltre questo fassi $a=B$, nel qual caso la Botte è elittico-circolare, si avrà $(C)=\frac{\pi k}{3}(2B^2+b^2)$.

SOLU-

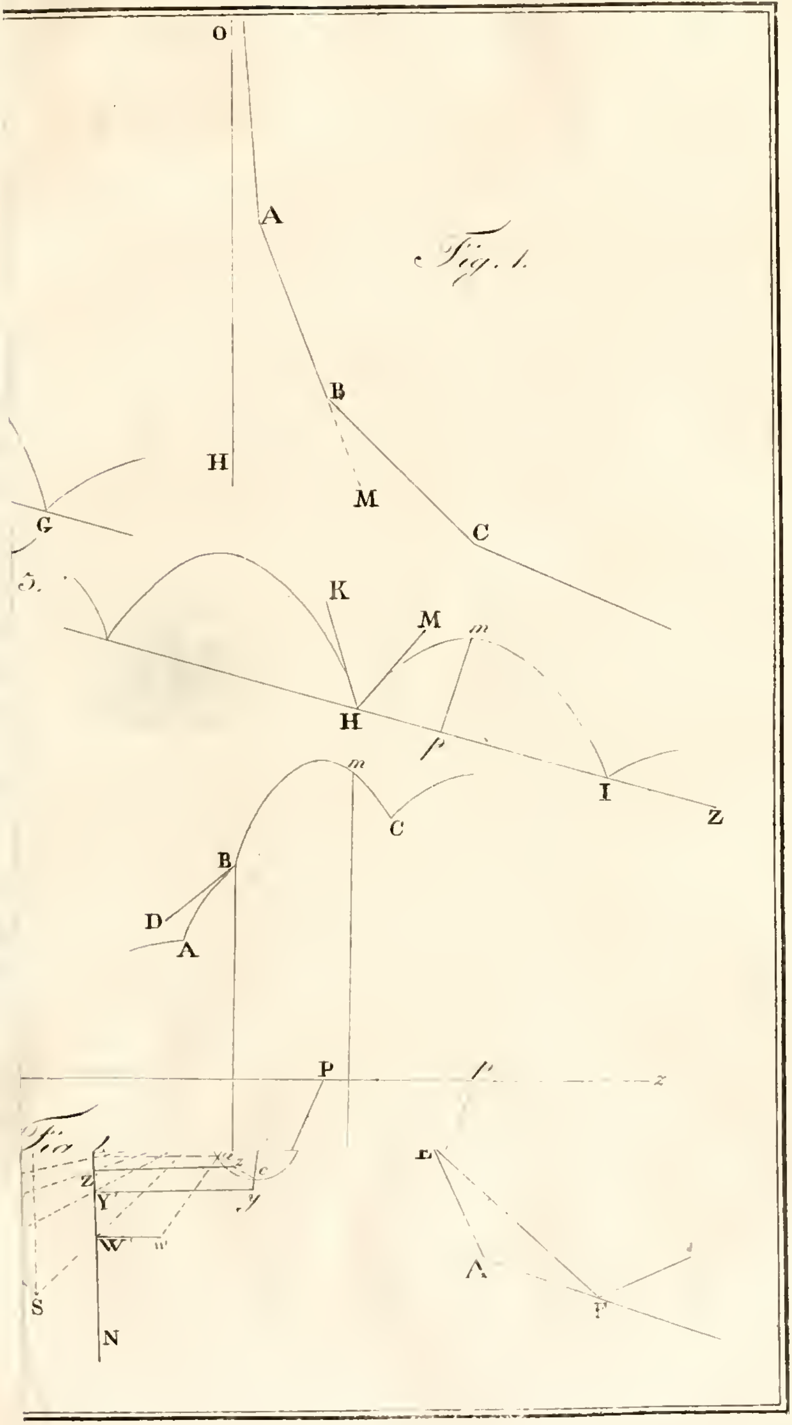


Fig. 1.

O
A
B
H
M
C
G
5.
K
M
m
H
p
I
Z
m
C
B
D
A
P
p
z
Fig
Z
Y
W
S
N
x
z
c
y
w
E
A
F

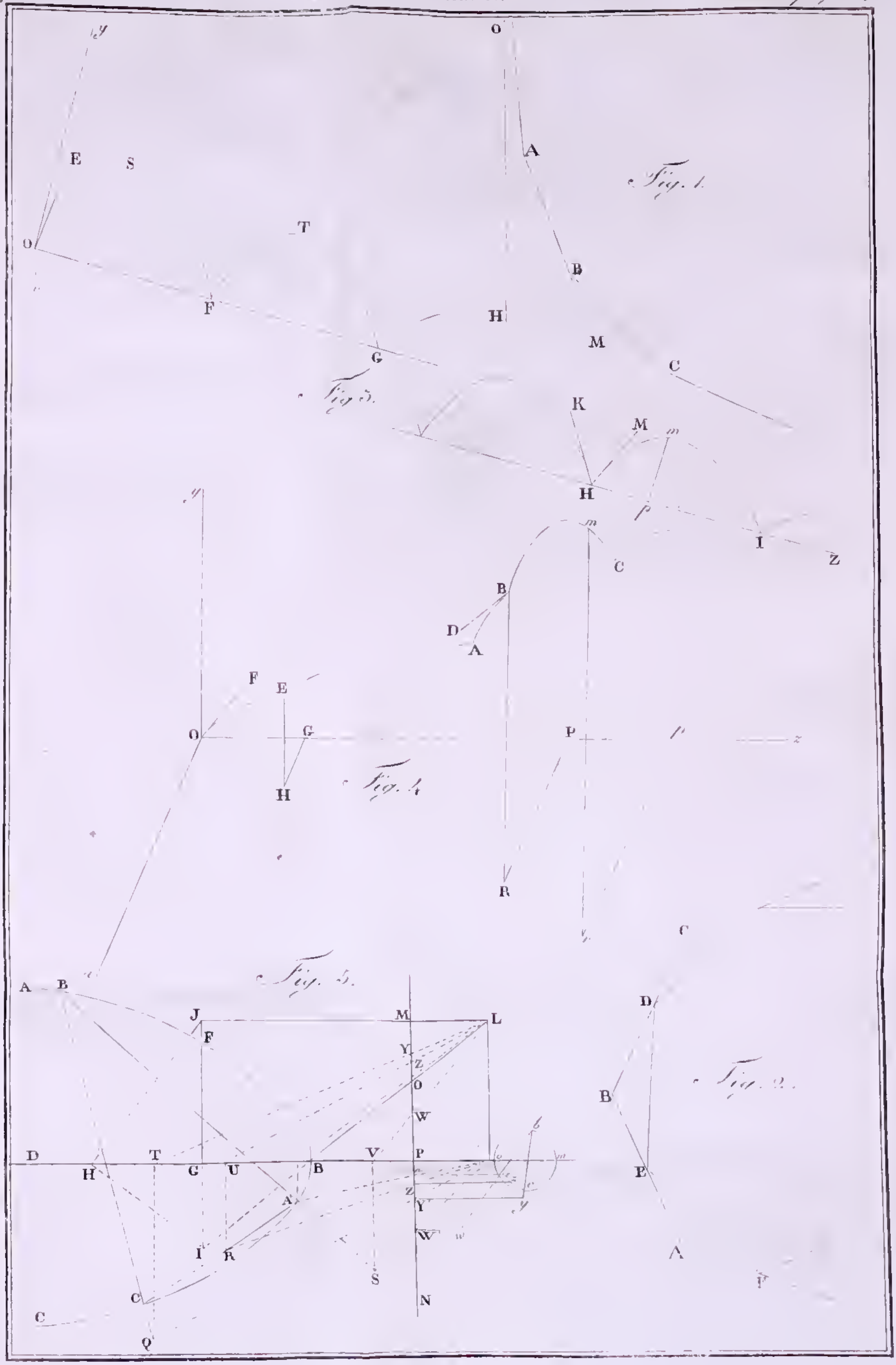


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

y
E
S
O
T
F
G
O
A
B
H
M
C
K
M
m
H
p
I
Z
m
C
B
D
A
F
E
O
G
H
P
p
z
R
y
C
A
B
J
M
L
F
Y
Z
O
W
D
T
V
P
b
m
H
G
U
B
A
Z
Y
W
I
R
S
C
N
C
Q
D
B
E
A
F

SOLUZIONE DI DUE PROBLEMI APPARTENENTI ALLA TEORIA DE' MASSIMI E MINIMI

DEL SIG. CAV. SEBASTIANO CANTERZANI.

Ricevuta li 20 *Novembre* 1814.

I. Data la retta AB (*Fig.* 1) e dato in essa il punto C è stato dimostrato (*), che dividendola in E nella stessa maniera, nella quale trovasi divisa in C, e alzandole da E la perpendicolare indefinita ED, essa riesce la minima di tutte le rette, che per lo punto C si possono inscrivere all'angolo ADB formato da due rette DA, DB, che da qualsivoglia punto D della perpendicolare ED vanno a passare per le due di lei estremità A, B.

In fatti intendendole condotta per C la infinitamente vicina KH, e descritti dal centro C i due archetti circolari Kn, Bm, il decremento di essa da una parte è eguale all'incremento dall'altra parte, e così è nulla la differenza infinitesima della KH dalla AB, perchè essendo generalmente $An : mH :: AC \, . \, AE : CB \, . \, BE$ (perciocchè generalmente abbiamo $An : Kn :: AE : ED$, e $mH : Bm :: BE : ED$, e $nK : Bm :: AC : CB$) la ragione $AC \, . \, AE : CB \, . \, BE$ riesce ragione d'eguaglianza appunto quando sia $AE : BE :: CB : AC$, o vogliam dire quando sia $AE = CB$, e però anche $BE = AC$.

II. Apresi quindi la via alla soluzione di varj problemi di massimo, o minimo, i quali senza il presidio dell'esposto teorema porterebbero forse per le vie ordinarie dell'algebra un

---

(*) Vedi la Parte I del Tomo XIV di questa Società a pag. 167.

lavoro assai laborioso. Io qui supporrò che all'angolo ADB (*Fig.* 1, e 2) debba subentrare una curva; e siccome si avranno da aver in considerazione tre cose, la curva cioè, la retta AB, e il punto C, così a tre problemi principalmente viene a farsi luogo.

1.° *Data la curva, e dato il punto* C, *trovare la retta* AB, *che inscritta alla curva pel punto* C *riesce la massima, o la minima di tutte le inscrivibili pel punto medesimo* C.

2.° *Data la retta* AB, *e dato in essa il punto* C *trovare la curva di dato genere, e di data specie, a cui quella retta rimane inscritta in modo che sia la massima, o la minima di quant' altre rette le si possono inscrivere pel punto* C.

3.° *Data una curva coll' inscritta* AB *trovare in questa il punto* C *tale che faccia riuscirla massima o minima di tutte le rette, che per esso possono a quella curva inscriversi.*

Ovvia essendo la soluzione del primo, come quella che si ottiene col metodo ordinario de' massimi e minimi, mi limito a trattare soltanto il secondo problema, e il terzo. Ma prima convienmi notare alcuna cosa nel semplice caso dell' angolo ADB.

III. Posto che dall'estremo A il più vicino al punto C si prendano le ascisse positive x voltate verso l'altro estremo B, e che le corrispondenti ordinate positive y parallele alla perpendicolare ED sieno voltate verso l'angolo D, chiamisi $AB = a$, $AC = BE = b$, $ED = k$. Sarà (*Fig.* 1) $a - b : k :: x : y$, onde $(a - b)y - kx = o$ l'equazione alla linea retta AD; e $b : k :: a - x : y$, onde $by + kx - ak = o$ l'equazione all'altra linea retta BD, e quindi $[(a-b)y-kx][by+kx-ak] = o$, cioè $yy + \frac{(a-2b)k}{b(a-b)}xy - \frac{k^2}{b(a-b)}xx - \frac{ak}{b}y + \frac{ak^2}{b(a-b)}x = o$ l'equazione alle due rette AD, BD.

Differenziando quest' equazione risulta

$$dx : dy :: 2y + \frac{(a-2b)k}{b(a-b)}x - \frac{ak}{b} : \frac{2k^2}{b(a-b)}x - \frac{(a-2b)k}{b(a-b)}y - \frac{ak^2}{b(a-b)}$$

dove mettendo $x = o$, e insieme $y = o$ si ha $dx : dy$, cioè

$a-b:k::a-b:k$ analogìa che sussiste; mettendo poi $x=a$, e insieme $y=0$ si ha $dx:dy$, cioè $b:k::-b:k$ analogìa che non sussiste, e perchè sussista convien prendere negativamente o dx, o dy. Dunque per avere la ragione dei differenziali dx, dy nei due punti estremi della linea AB bisogna prendere questi differenziali affetti del medesimo segno per l'estremo, in cui è $x=0$, e $y=0$, ma prenderli affetti di segno contrario per l'estremo, in cui è $x=a$, e $y=0$. In fatti i due archi circolari infinitesimi Kn, Bm sono voltati uno in un senso, l'altro in senso contrario; e questa semplice osservazione avrebbe potuto bastare a far comprendere ciò, che per altro non sarà stata cosa inutile d'aver dimostrato.

Di qui apparisce, che qualora il punto C cade nel prolungamento della retta AB, come nella figura 2, nel qual caso i due archi circolari infinitesimi Kn, Bm sono voltati verso la stessa parte, per avere la ragione dei due differenziali dx, dy convien prenderli affetti del medesimo segno tanto per l'uno estremo A, quanto per l'altro B. Qualunque espressione poi, o equazione s'incontri pel caso che abbia luogo l'una delle due figure 1, e 2, è chiaro che per averla pel caso dell'altra non occorre ripigliare il calcolo da capo, ma basta nella ritrovata espressione, o equazione mutare il segno alle potestà dispari di b, che sta in luogo del segmento AC.

La premessa avvertenza egualmente vale, come è evidente, per ogni curva, che passando per li punti A, B abbia per tangenti in questi punti le due rette DA, DB.

IV. Vengan pertanto proposti il genere, e la specie della curva da descriversi per rispondere al Problema secondo (§. II). Due principalmente possono essere i metodi da tenersi per trovare l'equazione di tale curva riferendola alla data retta AB mediante due coordinate ortogonali x, y. L'uno è del seguente tenore.

Suppongasi M (*Fig.* 3) uno de' punti della curva. Suppongasi pure che preso il principio delle ascisse x in A, e condotta da B la BE $= n$ parallela alle ordinate PM $= y$, indi tirata la AE $= e = \sqrt{aa + nn}$, questa AE sia parallela all'asse DQ, al quale mediante le due coordinate ortogonali CQ $= z$, QM $= u$ vien riferito il medesimo punto M di curva nell'equazione la più semplice che possa aversi della curva stessa. Si denoti per r la distanza AD, o GF delle due parallele AE, DQ présa parallelamente alle ordinate y, e per s la distanza del punto D dal principio C delle ascisse CQ $= z$. Poste questa costruzione, e queste determinazioni sarà QM, cioè $u = \frac{ay - nx - ar}{e}$, e CQ, cioè $z = \frac{ny + ax - nr - es}{e}$. Ponghansi dunque questi valori di u, e z nell'equazione semplicissima della curva, e risulterà l'equazione della medesima curva riferita alla retta data AB. In questa equazione introducansi le quattro condizioni 1.° che la curva passi pel punto A facendo in essa $x = 0$, e insieme $y = 0$; 2.° che passi pel punto B facendovi $x = e$, e insieme $y = 0$; 3.° che la retta DA sia tangente della curva in A ponendo $x = 0$, e $y = 0$ nel valore di $\frac{dx}{dy}$, e mettendo il risultato $= \frac{a-b}{k}$ nel caso della fig. 1, ma $= \frac{a+b}{k}$ nel caso della fig. 2; 4.° che la retta DB sia tangente in B ponendo $x = a$, $y = 0$ nel valore di $-\frac{dx}{dy}$ nel caso della fig. 1, o nel valore di $\frac{dx}{dy}$ nel caso della fig. 2, mettendo poscia il risultato $= \frac{b}{k}$. Ognuna di queste condizioni avrà somministrata un'equazione tra le quantità a, b, k, ec. date, o arbitrarie, e le n, r, s, ec. incognite; e tutta la difficoltà consisterà nel ricavare da tali equazioni i valori delle dette incognite dati per le cognite, e le arbitrarie, trovati i quali, e sostituitili nell'equazione, che riferisce la curva alla retta AB risulta l'equazione della curva del dato genere, e della data specie, che scioglie il problema.

V. L'altro metodo forse più semplice, e comodo del precedente consiste nel prender l'equazione generale a coefficienti indeterminati, che abbraccia tutte le curve del dato genere, e nell'introdurre in essa le quattro condizioni di già annoverate nel paragrafo precedente, con che verranno determinati tutti que' coefficienti, che in tal guisa possono determinarsi; indi determinarne altri mediante quelle proprietà, o vogliam dire condizioni, che servono a distinguere la data specie dalle altre sottoposte allo stesso genere. Così risulta l'equazione cercata, della curva cioè del dato genere, e della data specie, che scioglie il problema. Quei coefficienti indeterminati, che dopo tutto ciò rimanessero per avventura nell'equazione, sono arbitrarj, e lascian luogo a introdurre nel problema nuove condizioni.

Anche in questo secondo metodo l'angolo delle coordinate x, y si presuppone retto, poichè la terza, e la quarta delle quattro suddette condizioni involve questa supposizione, mercè che gli angoli in m, e n (*Fig.* 1, e 2) sono per costruzione retti.

VI. A chiarezza maggiore gioverà applicare l'uno, e l'altro metodo a qualche esempio nel caso della figura 1. Prendiam dunque le curve del primo genere, o vogliam dire le linee del secondo ordine, che sono le sezioni coniche, e cominciamo dalla parabola.

Esempio I. L'equazione semplicissima di questa curva è $u^2 = cz$, nella quale secondo il primo metodo metto $\frac{ay - nx - ar}{e}$ in luogo di u, e $\frac{ny + ax - nr - es}{e}$ in luogo di z, e ottengo

$$\left.\begin{array}{r} a^2y^2 - 2anxy + n^2x^2 - 2a^2ry + 2anrx + a^2r^2 \\ - ceny - acex + cenr \\ + ce^2s \end{array}\right\} = 0$$

equazione, in cui la medesima parabola viene riferita alla data retta AB. In questa equazione facendo $x = 0$, e insieme $y = 0$, risulta la prima equazione 1.^{a} $a^2r^2 + cenr + ce^2s = 0$

ponendo poi $x=a$, e insieme $y=0$ risulta la seconda 2.ª $n^2+2nr-ce=0$. Differenziando l'equazione della curva si ricava $\frac{dx}{dy}=\frac{2a^2y-2anx-2a^2r-cen}{2any-2n^2x-2anr+ace}$, dove mettendo $x=0$, $y=0$ risulta $\frac{2a^2r-cen}{-2anr+ace}$, il qual risultato fatto eguale a $\frac{a-b}{k}$ ne dà la terza equazione 3.ª $2a^2nr-a^2cr-2abnr+abce-2a^2kr-cken=0$. Finalmente nel valore di $\frac{-dx}{dy}=\frac{-2a^2y+2anx+2a^2r+cen}{2any-2n^2x-2anr+ace}$ metto $x=a$, $y=0$, e mi risulta $\frac{2a^2n+2a^2r+cen}{-2an^2-2anr+ace}$: metto questo risultato eguale a $\frac{b}{k}$, e ottengo la quarta equazione 4.ª $2a^2kn+2a^2kr+cken+2abn^2+2abnr-abce=0$.

In vigore della prima equazione sparisce dall'equazione della curva l'ultimo termine, onde essa si riduce ad essere

$$\left.\begin{array}{r} a^2y^2-2anxy+n^2x^2-2a^2ry+2anrx \\ -ceny-acex \end{array}\right\}=0$$

e in questa ponendo in luogo di ce il suo valore n^2+2nr somministrato dalla seconda nasce

$$\left.\begin{array}{r} a^2y^2-2anxy+n^2x^2-2a^2ry-an^2x \\ -n^3y \\ -2n^2ry \end{array}\right\}=0.$$

Questo stesso valore di ce posto nella terza, e nella quarta equazione, le trasforma in

$$abn^2-a^2n^2-2a^3kr-kn^3-2kn^2r=0$$
$$2a^2kn+2a^2kr+kn^3+2kn^2r+abn^2=0$$

che sommate insieme danno $n=\frac{2ak}{a-2b}$, e sottratte l'una dall'altra danno $r=-\frac{a^2n^2}{4k(a^2+n^2)}-\frac{n}{2}$. Posto questo valore di r nell'equazione della curva ridotta la riduce ad essere

$$\left.\begin{array}{r} a^2y^2-2anxy+n^2x^2+a^2ny-an^2x \\ +\frac{a^2n^2y}{2k} \end{array}\right\}=0.$$

Resta che in questa si sostituisca ad n il già trovato di lui valore. Il che fatto risulta finalmente $y^2 - \frac{4k}{a-2b}xy + \frac{4k^2}{(a-2b)^2}xx + \frac{4a(a-b)k}{(a-2b)^2}y - \frac{4ak^2}{(a-2b)^2}x = 0$. E questa è l'equazione delle parabole, che sciolgono il problema: dico delle parabole, perchè l'arbitraria k dà luogo a infinite soluzioni del problema, quando non vi si voglia aggiunger qualche condizione di più, come sarebbe, che la parabola dovesse passare per un punto dato oltre A, e B, o avere un dato parametro. Solo non si può prendere $k = 0$, nè $= \infty$, perchè il parametro riuscirebbe zero, o infinito.

ESEMPIO II. Con lo stesso metodo tratto il problema, quando si voglia che la curva sia il circolo. Chiamato $= c$ il raggio, e preso il principio delle ascisse z dal centro, l'equazione semplicissima del circolo è $u^2 + z^2 - c^2 = 0$, la quale fatte le solite sostituzioni in luogo di u, e z si trasforma in

$$\left.\begin{array}{llll} y^2 + x^2 & - 2ry & - \frac{2as}{e}x & + r^2 \\ & - \frac{2nsy}{e} & & + \frac{2nrs}{e} \\ & & & + ss \\ & & & - cc \end{array}\right\} = 0.$$

Facendo le quattro supposizioni di sopra esposte si ricavano le quattro equazioni 1.ª $rr + \frac{2nrs}{e} + ss - cc = 0$, 2.ª $s = \frac{e}{2}$, 3.ª $a^2s - abs + ker + kns = 0$, 4.ª $abs - abe - ker - kns = 0$.

Per la prima si riduce l'equazione del circolo ad essere

$$\begin{array}{llll} yy + xx & - 2ry & - \frac{4as}{e}x & = 0. \\ & - \frac{2nby}{e} & & \end{array}$$

Sommando insieme le due ultime si cava $s = \frac{be}{a}$: ma per la seconda si ha $s=\frac{e}{2}$; dunque $\frac{be}{a}=\frac{e}{2}$, onde $b=\frac{a}{2}$, il che mostra, che perchè sia possibile il problema bisogna che il punto C dato nella retta AB la divida in parti eguali. L'unica maniera di rendere non necessaria questa condizione si è di prendere l'arbitraria k infinita, perchè allora sparisce b dalle quattro equazioni, e così arbitrario riesce il segmento $AC=b$.

Tutto ciò si conferma col riflettere, che le due tangenti $DA=\sqrt{(a-b)^2+k^2}$, e $DB=\sqrt{bb+k^2}$ non possono essere eguali, come avviene nel circolo, se o non sia $b=\frac{a}{2}$, o non si prenda $k=\infty$.

Nel caso che si assuma $k=\infty$ la terza, e la quarta delle quattro equazioni diventano una sola equazione, che somministra $r=-\frac{n}{2}$, perchè abbiamo $s=\frac{e}{2}$. Posti questi valori di r, e s nella prima equazione risulta $\frac{n^2}{4}-\frac{n^2}{2}+\frac{e^2}{4}-cc=0$ cioè $-\frac{n^2}{4}+\frac{e^2}{4}=cc$; ma $e^2=a^2+n^2$; dunque $cc=\frac{aa}{4}$. Non essendovi stato luogo a determinare n è ciò indizio, che questa linea è arbitraria. L'equazione pertanto dell'unico circolo, che in questo caso scioglie il problema col dare un massimo, è $yy+xx-ax=0$, tale divenendo l'equazione

$$yy+xx-2ry-\frac{2as}{e}x=0,$$
$$-\frac{2ns}{e}y$$

ove in essa si mettano invece di r, s i ritrovati loro valori.

Anche nel caso di $b=\frac{a}{2}$ le due ultime delle quattro equazioni diventano una sola equazione, perchè mettendo nell'altra $\frac{a}{2}$ in luogo di b, ed $\frac{e}{2}$ in luogo di s ottiensi $-\frac{a^2}{4}-kr$

$-\frac{kn}{2}=0$, che offre $r=-\frac{a^2}{4k}-\frac{n}{2}$. Ora mettendo nella prima questo valore di r, e quello di s risulta $\frac{a^4}{16k^2}+\frac{a^2}{4}=cc$: ponendoli poi nell'equazione del circolo questa diviene $yy+xx+\frac{a^2}{2k}y-ax=0$, ed ecco l'equazione, che scioglie il problema col somministrare infiniti (attesa l'arbitraria k) circoli, che hanno la corda AB minima di tutte le altre, che in ciaschedun di loro si possono condurre pel punto, che la divide per metà. Il raggio $c=\frac{a\sqrt{aa+4k^2}}{4k}$ dà a divedere, che l'arbitraria k solo non può assumersi $=0$: che se si assuma $k=\infty$, ritorna il caso precedente.

In nissuno dei due casi è stato luogo a determinare la linea n, donde segue che essa è arbitraria senza per altro che tale arbitrio moltiplichi il numero de' circoli, che sciolgono il problema, poichè il luogo del centro del circolo, e il raggio cambiano bensì al cambiarsi di k nel secondo caso, ma ritenuto lo stesso valor di k al cambiarsi di n non cambia nè il raggio, nè il luogo del centro, come può facilmente dimostrarsi anche nel secondo caso.

Esempio III. Passando ora a far uso del secondo metodo sia la curva da descriversi la ellisse. L'equazione generale a coefficienti indeterminati delle curve del primo genere è

$$Fy^2+Exy+Dx^2+Cy+Bx+A=0.$$

La condizione che posta $x=0$ sia anche $y=0$ determina $A=0$, onde l'equazione diventa

$$Fy^2+Exy+Dx^2+Cy+Bx=0.$$

La condizione che posta $x=a$ torni $y=0$ porta che sia $a^2D+aB=0$, onde $B=-aD$, e l'equazione diventa

$$Fy^2+Exy+Dx^2+Cy-aDx=0.$$

Questa equazione differenziata dà $dx:dy::2Fy+Ex+C:aD-2Dx-Ey$, e però la condizione che posta $x=0$, e $y=0$

sia $\frac{dx}{dy} = \frac{a-b}{k}$ porta $a^2\mathrm{D} - ab\mathrm{D} = k\mathrm{C}$, onde $\mathrm{C} = \frac{a^2\mathrm{D} - ab\mathrm{D}}{k}$, e quindi l' equazione diventa $\mathrm{F}y^2 + \mathrm{E}xy + \mathrm{D}x^2 + \frac{a(a-b)\mathrm{D}}{k} - a\mathrm{D}x = 0$. Finalmente la condizione che posta $x = a$, e $y = 0$ sia $-\frac{dx}{dy} = \frac{b}{k}$ porta $ab\mathrm{D} = ak\mathrm{E} + k\mathrm{C}$, cioè (mettendo in luogo di C il valore già ritrovato) $2ab\mathrm{D} - a^2\mathrm{D} = ak\mathrm{E}$, onde $\mathrm{E} = -\frac{(a-2b)\mathrm{D}}{k}$, e così l' equazione della curva si riduce ad essere $\mathrm{F}y^2 - \frac{(a-2b)\mathrm{D}}{k}xy + \mathrm{D}x^2 + \frac{a(a-b)\mathrm{D}}{k}y - a\mathrm{D}x = 0$.

Ora la proprietà, che distingue l' ellisse dalle altre curve del primo genere, è che disposta l' equazione in modo che il quadrato yy non abbia per coefficiente che l' unità, il coefficiente del quadrato xx sia maggiore del quadrato della metà del coefficiente del rettangolo xy. L' equazione adunque ricavata fin ora diventa l' equazione dell' ellisse subito che sia $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}} > \frac{(a-2b)^2\mathrm{D}^2}{4k^2\mathrm{F}^2}$, cioè $\mathrm{F} > \frac{(a-2b)^2\mathrm{D}}{4k^2}$. Mettasi dunque $\mathrm{F} = \frac{(a-2b)^2\mathrm{D}}{4k^2} + \omega\mathrm{D}$, dove ω rappresenti un numero qualunque positivo. Quindi

$$yy - \frac{4(a-2b)k}{(a-2b)^2+4\omega k^2}xy + \frac{4k^2}{(a-2b)^2+4\omega k^2}xx + \frac{4a(a-b)k}{(a-2b)^2+4\omega k^2}y - \frac{4ak^2}{(a-2b)^2+4\omega k^2}x = 0$$

è l' equazione dell' ellisse, che passa per li due punti A, B estremi della data retta AB, ed ha in essi per tangenti le rette DA, DB. Attese le arbitrarie k, ω havvi luogo a infinite soluzioni del problema, quando aggiunger non si vogliano altre condizioni. Non si può assumer $k = 0$, perchè il diametro dell' ellisse riuscirebbe infinito.

Se l' arbitraria k si supporrà infinita, anche le due tangenti AD, BD riusciranno infinite, e siccome sono allora perpendicolari alla data AB, così è chiaro che questa verrà ad essere uno de' due assi dell' ellisse, cioè l' asse maggiore, se sia $\omega > 1$, e il minore, se $\omega < 1$; che se sia $\omega = 1$, l' ellisse si converte in un circolo, come mostra l'equazione della curva, che posta $k = \infty$, diventa $yy + \frac{xx}{\omega} - \frac{ax}{\omega} = 0$.

Esempio IV. Per ultimo debba la curva essere la iperbola. È manifesto, che introducendo nell'equazione generale a coefficienti indeterminati delle curve del primo genere le quattro solite condizioni risulterà la stessa equazione, che è risultata trattando dell'ellisse, cioè $Fy^2 - \frac{(a-2b)D}{k}xy + Dx^2 + \frac{a(a-b)D}{k}y - aDx = 0$. La proprietà, per cui si distingue l'iperbola dalle altre curve dello stesso genere, è che lasciata l'unità per coefficiente del quadrato yy il coefficiente del xx sia minore del quadrato della metà del coefficiente del rettangolo xy. Dovrà pertanto essere $\frac{D}{F} < \frac{(a-2b)^2D^2}{4k^2F^2}$, cioè $F < \frac{(a-2b)^2D}{4k^2}$, il che si otterrà facendo $F = \frac{(a-2b)^2D}{4k^2} - \omega D$ intendendo per ω un numero qualsivoglia positivo. Da tutto ciò apparisce, che l'equazione dell'iperbola, che passando per li due estremi A, B della retta data AB ha in questi punti per tangenti le DA, DB, è la medesima che è stata trovata per l'ellisse, se non che il numero ω vi è col segno $-$ invece del $+$. Sarà dunque

$$yy - \frac{4(a-2b)k}{(a-2b)^2-4\omega k^2}xy + \frac{4k^2}{(a-2b)^2-4\omega k^2}xx + \frac{4a(a-b)k}{(a-2b)^2-4\omega k^2}y - \frac{4ak^2}{(a-2b)^2-4\omega k^2}x = 0$$

dove le due arbitrarie k, ω dan luogo anche qui a infinite soluzioni, avvertendo per altro di non prendere $k = 0$, perchè infinito riuscirebbe il diametro della curva. Prendendo $k = \infty$ l'equazione diventa $yy - \frac{xx}{\omega} + \frac{ax}{\omega} = 0$, e allora la data AB riesce l'asse trasverso dell'iperbola, la quale è equilatera, se sia $\omega = 1$, ottusangola se sia $\omega < 1$, acutangola se $\omega > 1$.

Se si assumesse $4\omega k^2 = a^2$, l'equazione della curva si convertirebbe in

$$yy + \frac{a(a-2b)}{2b(a-b)\sqrt{\omega}}xy - \frac{a^2}{4\omega b(a-b)}xx - \frac{a^2}{2b\sqrt{\omega}}y + \frac{a^3}{4\omega b(a-b)}x = 0,$$

che è il prodotto delle due $y + \frac{ax}{2b\sqrt{\omega}} - \frac{a^2}{2b\sqrt{\omega}} = 0$, $y - \frac{ax}{2(a-b)\sqrt{\omega}} = 0$, ciascuna alla linea retta. E se si assumesse $4\omega k^2 = (a-2b)^2$, l'equazione della curva diverrebbe $xy - \frac{k}{a-2b}xx - \frac{a(a-b)}{a-2b}y + \frac{ak}{a-2b}x = 0$, ovvero $xy - \frac{x^2}{2\sqrt{\omega}} - \frac{a(a-b)}{a-2b}y + \frac{ax}{2\sqrt{\omega}} = 0$, che è tuttavia all'iperbola.

VII. Trovata che siasi l'equazione, che riferisce la curva del dato genere, e della data specie alla data retta AB, e che la determina a passare per li due di lei estremi A, B, e ad avere in questi per tangenti le rette DA, DB, non sempre sarà possibile definire, mediante l'andamento della curva, e qualche altra circostanza, se la inscritta AB riesca massima, o se riesca minima, o se non riesca nè massima, nè minima. Richiedesi dunque un metodo generale, onde scoprir ciò; e siccome l'essere massima, o minima, o non esser nè l'uno nè l'altro dipende dalla diversa proporzione, che può avere il segmento $AC = b$ a tutta la retta $AB = a$, e dai diversi valori, che dare si possono all'arbitraria k, e alle altre arbitrarie, se altre ve ne sono, così pare che il metodo opportuno possa essere il seguente.

Introducasi nella suddetta equazione in luogo di b quella quantità, che manifesta la relazione, che si vuol che abbia b ad a, come pure il valore, che si dà all'arbitraria k, e a ciascheduna delle altre arbitrarie, quando ve ne son altre. Preparatasi così l'equazione si concepiscano due rette (*Fig.* 4) RS, RS condotte pel dato punto C, che facciano ciascuna con la inscritta AB un angolo picciolissimo una da una parte, l'altra dall'altra parte della stessa AB, e trovisi l'espressione di quella porzione di ognuna, che resta inscritta alla curva. A tale effetto tirata per A la retta AR perpendicolare ad AB, e però parallela alle ordinate $MP = y$, la quale incontrerà l'una e l'altra RS in qualche punto R, si nomini $a : h$ la ragione del raggio alla tangente dell'angolo ACR, onde sia h una quantità picciolissima, e tale che le più alte potestà di essa possano trascurarsi a fronte delle meno alte. L'ordinata MP tagli in G la retta RS, alla quale dal punto M sia perpendicolare MQ. Chiamando l'ascissa RQ $= f$, e l'ordinata MQ $= q$ sarà $a : h :: \text{AC} : \text{AR}$, e però AR $= \frac{bh}{a}$, e CR $= \frac{b\sqrt{aa+hh}}{a}$, e mettendo per comodo g invece di $\sqrt{aa+hh}$, CR $= \frac{bg}{a}$, essendo AP $= x$, e quindi CP $= x - b$, sarà $a : g :: x - b : \text{CG} = \frac{gx - bg}{a}$; sarà pure $a : h :: x - b : \text{PG} = \frac{hx - bh}{a}$, e quindi per una delle due RS si avrà MG $= \frac{ay - hx + bh}{a}$, e per l'altra MG $= \frac{ay + hx - bh}{a}$. Per maggiore speditezza d'ora innanzi si farà il calcolo per una sola delle due RS, giacchè è chiaro, che nell'ultimo risultato col semplice mutar il segno ai termini, che hanno le potestà dispari di h si ottiene l'ultimo risultato per l'altra RS. Tenendo dunque MG $= \frac{ay - hx + bh}{a}$, ed essendo $g : h :: \text{GM} : \text{GQ}$ si avrà GQ $= \frac{ahy - h^2x + bh^2}{ag}$, e perciò RQ $=$ CR $+$ CG $+$ GQ $= \frac{g^2x + ahy - h^2x + bh^2}{ag} = f$. Essendo poi $g : a :: \text{GM} : \text{MQ}$ sarà MQ $= \frac{ay - hx + bh}{g} = q$. Ora da queste due equazioni si cava $x = \frac{af - hq}{g}$, e $y = \frac{g^2q - bgh + afh - h^2q}{ag}$, dove in luogo di b convien porre quella quantità, che esprime la relazione, che si suppone avere b ad a.

Questi valori di x, e di y sostituiti che sieno nell'equazione preparata, come di sopra si è indicato, la trasformeranno in un'equazione tra le coordinate ortogonali f, q, nella quale ponendo $q = 0$ avrassi un'equazione in f determinata, e in questa i valori di f somministreranno quei punti, ne' quali la retta RS incontra la curva. Di questi valori di f quello, che appartiene al punto di curva vicinissimo al punto A, si sottrerrà da quello, che appartiene al punto di curva vicinissimo al punto B, e facilmente si vede, che verrà così ad ottenersi l'espressione d'una inscritta pel dato punto C vicinissima alla data AB da una parte della stessa AB. L'espressione di tale nuova inscritta si paragoni con a, che è l'espressione dell'inscritta data AB. Se in questo paragone si troverà che la nuova inscritta sia maggiore della data AB, vedasi col mutare il segno alla h se anche l'altra nuova inscritta riesce maggiore della AB; oppure se quella prima nuova inscritta si troverà che sia minore della data AB, vedasi col mutare il segno alla h se sia minore anche l'altra. Quando amendue le nuove inscritte riescano maggiori della data AB, è evidente che la data AB è minima, e quando riescano amendue minori di AB è parimenti evidente che la data AB è massima. Che se una delle due nuove inscritte riesca maggiore della data AB, e l'altra riesca minore, la data AB non godrà della proprietà nè di massimo, nè di minimo.

Molto più semplice ancora si renderà il calcolo, se la condizione di $q = 0$ non si aspetterà a adempierla nell'equazione tra f, e q, ma anzi si passerà a trovare l'equazione determinata in f dopo d'averla introdotta nelle formole stesse, che debbon sostituirsi ad x, e y, il che fa riuscire queste medesime formole assai semplici, cioè $x = \frac{af}{g}$, e $y = \frac{afh - bgh}{ag}$.

Fin ora si è supposto il punto dato C collocato tra i due estremi della data AB. Se fosse collocato nel prolungamento di essa, altro non s'avrebbe a fare se non se mutare nelle ritrovate espressioni il segno alla potestà dispari di b, come ognun sa, e come si è già altrove avvertito.

VIII. Qui pure per chiarezza maggiore gioverà vedere l'esposto metodo applicato a qualche esempio.

Esempio I. Sia dunque l'equazione della parabola trovata già di sopra (§. VI), in cui la curva viene riferita alla retta AB con la condizione che abbia in A, e B per tangenti la DA, e la DB, cioè

$$yy - \frac{4k}{a-2b}xy + \frac{4k^2}{(a-2b)^2}xx + \frac{4a(a-b)k}{(a-2b)^2}y - \frac{4ak^2}{(a-2b)^2}x = 0 .$$

Suppongasi il dato punto C collocato nell' estremo A della data AB, onde sia $b = 0$. Questa condizione muta l' equazione della curva in quest' altra $yy - \frac{4k}{a}xy + \frac{4k^2}{a^2}xx + 4ky - \frac{4k^2}{a}$ $x = 0$, nella quale mettendo $\frac{af}{g}$ in luogo di x, e $\frac{fh}{g}$(giacchè abbiamo $b = 0$) in luogo di y ottiensi la seguente equazione in f, $(h^2 - 4kh + 4k^2)f^2 + 4g(kh - k^2)f = 0$, in cui i valori di f sono $f = 0$, e $f = \frac{4g(k^2 - kh)}{4k^2 - 4kh + h^2}$. Sottraendo il minore, cioè zero, dall' altro si ha l' espressione di una delle nuove due inscritte $= \frac{4g(k^2 - kh)}{4k^2 - 4kh + h^2}$. Paragonando questa espressione con a, la prima parte della comparazione sarà $4g(k^2 - kh)$, e la seconda $4ah^2 - 4akh + ah^2$. Essendo $g = \sqrt{aa + hh} = a + \frac{h^2}{2a} - \frac{h^4}{8a^3}$ ec. la prima parte diventa $4ak^2 + \frac{2k^2h^2}{a} - \frac{k^2h^4}{2a^3}$ ec. $- 4akh - \frac{2kh^3}{a}$ $+ \frac{kh^5}{2a^3}$ ec. Sottratti da una parte e dall'altra i due termini $4ak^2$, e $-4akh$ la prima parte riesce $\frac{2k^2h^2}{a} - \frac{k^2h^4}{2a^3}$ ec. $- \frac{2kh^3}{a} + \frac{kh^5}{2a^3}$ ec., e la seconda $+ah^2$. Dividendo ora tutti i termini per la quantità sempre positiva $\frac{2h^2}{a}$, e trascurando nel quoziente le potestà di h superiori alla prima, la comparazione viene ad avere nella prima parte $k^2 - kh$, e nella seconda $+ \frac{a^2}{2}$. Finalmente trasportando il termine $+ \frac{a^2}{2}$ dalla seconda nella prima parte, e il termine $- kh$ dalla prima parte nella seconda si riduce la prima parte ad essere $k^2 - \frac{a^2}{2}$, e la seconda ad essere $+kh$.

Qui tre casi possono aver luogo, perchè o è $k^2 > \frac{a^2}{2}$, o è $k^2 < \frac{a^2}{2}$, o è $k^2 = \frac{a^2}{2}$. Nel primo caso attesa la picciolezza di h è chiaro che la prima parte è maggiore della seconda, e a più forte ragione quando si muta il segno ad h; dunque in questo caso la AB si trova in mezzo a due inscritte maggiori di lei, e quindi ella è minima. Nel secondo caso riuscendo negativa la prima parte essa è certamente minore della seconda, che è positiva: che se si muti il segno ad h, onde sia negativa anche la seconda parte, questa attesa la picciolezza di h è al di sotto di zero meno che la prima, e quindi la prima seguita ad esser minore della seconda, per lo che la AB si trova in mezzo a due inscritte amendue di lei minori, e perciò ella è massima. Finalmente nel terzo caso riuscendo zero la prima parte essa è certamente minore della seconda $+kh$; ma mutando il segno ad h la prima parte, che è zero, è maggiore della seconda, che è divenuta $-kh$, cioè negativa: dunque in questo caso la AB si trova in mezzo a due inscritte una minore di lei, l' altra maggiore, e per conseguenza ella non è nè massima, nè minima.

ESEMPIO II. Sia l' equazione

$$yy - \frac{4(a+2b)k}{(a+2b)^2 - 4\omega k^2}\,xy + \frac{4k^2}{(a+2b)^2 - 4\omega k^2}\,xx + \frac{4a(a+b)k}{(a+2b)^2 - 4\omega k^2}\,y - \frac{4ak^2}{(a+2b)^2 - 4\omega k^2}\,x = 0$$

che nel caso della fig. 2 riferisce l' iperbola alla retta AB con la condizione che le due rette DA, DB le sieno tangenti nei due estremi A, B della medesima AB. Assumendo il numero $\omega = 1$, e supponendo che la ragione del prolungamento AC $= b$ alla retta AB $= a$ sia quella di 1 : 4, onde si abbia $b = \frac{a}{4}$, l' equazione diventa $yy - \frac{24ak}{9a^2 - 16k^2}\,xy + \frac{16k^2}{9a^2 - 16k^2}\,xx$ $+ \frac{20a^2k}{9a^2 - 16k^2}\,y - \frac{16ak^2}{9a^2 - 16k^2}\,x = 0$.

In

In questa per passare all' equazione in f si metta $\frac{af}{g}$ in luogo di x, e $\frac{4fh+gh}{4g}$ in luogo di y perchè siamo nel caso della figura 2, e abbiamo $b=\frac{a}{4}$. Fatto il calcolo, i due valori di f trascurando le potestà di h superiori alla seconda risultano tali, che sottraendo il minore dal maggiore l' espressione d' una delle due nuove inscritte, che così si ottiene, si riduce a $\frac{4akg\sqrt{16a^2k^2-48a^2kh+20k^2h^2+31a^2h^2}}{16a^2k^2-24a^2kh-16k^2h^2+9a^2k^2}$.

Paragono dunque questa espressione con a, e in questo paragone trascuro le sole potestà di h superiori alla terza. Essendo $g=a+\frac{h^2}{2a}$, e $\sqrt{16a^2k^2-48a^2kh+20k^2h^2+31a^2h^2}$ $=4ak-6ah-\frac{5ah^2}{8k}+\frac{5kh^2}{2a}-\frac{15ah^3}{16k^2}+\frac{15k^3}{4a}$, la prima parte della comparazione riesce $16a^2k^2-24a^2kh-\frac{5a^2h^2}{2}+18k^2h^2-\frac{15a^2h^2}{4k}$ $+3kh^3$, e la seconda $16a^2k^2-24a^2kh-16k^2h^2+9a^2h^2$, onde trasportando tutti i termini della seconda parte nella prima questa diventa $-\frac{23a^2h^2}{2}+34k^2h^2-\frac{15a^2h^3}{4k}+3kh^3$ rimanendo zero nella seconda. Dividendo ora per la quantità h^2 positiva, e trasportando nella seconda parte i due termini, che restano affetti da h, la prima parte è $34k^2-\frac{23a^2}{2}$, e la seconda è $\frac{15a^2h}{k}-3kh$.

È chiaro, che la seconda parte mutando il segno ad h, se è positiva, diventa negativa, e viceversa se è negativa, diventa positiva; e però se si assuma l' arbitraria $k=a\sqrt{\frac{23}{68}}$, onde la prima parte della comparazione sia zero, ella è minore della seconda, quando questa è positiva, e maggiore, quando questa col mutar il segno ad h passa ad essere negativa, così che una delle due nuove inscritte è minore di AB, e l'altra maggiore, e quindi la AB non è nè massima, nè minima: che se si prenda $k > a\sqrt{\frac{23}{68}}$ la prima parte della comparazione è positiva, e però maggiore della seconda non solo quando questa è negativa, ma attesa la piccolezza di h ancora quando è positiva; onde in questo caso l'una e l'altra delle due nuove inscritte è maggiore della AB, e quindi AB è minima: finalmente se si prenda $k < a\sqrt{\frac{23}{68}}$, la prima parte della comparazione è negativa, e minore certamente della seconda, quando questa è positiva, e minore pure di essa quando è ancor essa negativa, e ciò attesa la picciolezza di h; in questo caso pertanto la data AB è massima.

IX. Ma abbastanza, se non anche soverchiamente ci siam trattenuti nel secondo dei tre problemi enunciati nel §. II. Veniamo al terzo. E qui basterà per evitare ogni prolissità indicare le semplici costruzioni lasciando da parte i calcoli, giacchè questi mediante le cose notate nel problema precedente potranno sempre dall' industre analista eseguirsi.

Dunque *data l'equazione d'una curva, e data la posizione d'una inscritta* AB *debba trovarsi in questa inscritta* (Fig. 1, e 2) *il punto* C *tale, che tra tutte le rette, che per esso si possono alla curva inscrivere riesca la data* AB *massima, o minima.*

Soluzione. Dalla data equazione della curva, e dalla data posizione della inscritta AB ricavisi la posizione delle due tangenti AD, BD, che appartengono ai due punti estremi dell' inscritta AB. Conducansi queste tangenti, e dal punto del loro concorso D menisi la DE perpendicolare alla AB. Verrà così la AB ad essere divisa in due segmenti AE, EB. Notisi per ultimo nella stessa AB il punto C, che la divide nella stessa maniera, nella quale trovasi divisa in E. È chiaro pel Teorema (§. I.) che il punto C scioglie il Problema.

Esempio. La proposta curva (*Fig.* 5) sia l'epicicloide semplicissima LABR riferita all'asse LR mediante le coordinate ortogonali x, y nell'equazione $y^4 + 2x^2y^2 - 2cxy^2 - c^2y^2 + x^4 - 2cx^3 = 0$, nella quale $2c$ esprime l'asse LR, il cui punto L è il principio delle ascisse x. La data posizione dell'inscritta data AB sia tale, che l'estremo A corrisponda all'ascissa negativa $\mathrm{LI} = -\frac{c}{8}$, e l'altro estremo B all'ascissa positiva $\mathrm{LS} = \frac{sc}{4}$. L'equazione della curva porta che la sottangente IG positiva per l'estremo A sia $= \frac{(23 + 16\sqrt{2})c}{40 + 32\sqrt{2}}$, e la ST negativa per l'estremo B sia $= \frac{(48 + 3\sqrt{6})c}{8 - 12\sqrt{6}}$. Trovati questi due punti G, T tirinsi le due tangenti GA, TB, e dal punto D del loro concorso conducasi su l'inscritta AB la perpendicolare DE. Finalmente al segmento AE prendasi eguale dall'altra parte dell'inscritta medesima il segmento BC. Il citato Teorema non lascia dubitare che non sia C il punto cercato.

Qualora non incresca al paziente calcolatore d'ingolfarsi in un calcolo, che per lo più sarà assai prolisso, potrà egli anche trovare il valore del segmento AE = BC dato per i parametri della curva proposta, riflettendo che qualunque ella siasi, abbiamo sempre $\mathrm{AE} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AD}}^2 - \overline{\mathrm{BD}}^2}{2\mathrm{AB}}$ da prendersi positivamente, se il punto E cade tra A, e B, e negativamente, se E cade di qua da A; e $\mathrm{BE} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BD}}^2 - \overline{\mathrm{AD}}^2}{2\mathrm{AB}}$ da prendersi positivamente nel primo caso, e negativamente, se E cade oltre B. Quanto poi ai tre quadrati $\overline{\mathrm{AB}}^2$, $\overline{\mathrm{AD}}^2$, $\overline{\mathrm{BD}}^2$, il primo si ottiene sommando il quadrato della differenza tra le due ascisse corrispondenti ai punti A, B con quello della differenza tra le due ordinate, come ognuno sa; e trovato che siasi questo quadrato $\overline{\mathrm{AB}}^2$, e messolo eguale ad aa (volendo chiamare $= a$ la inscritta AB) si avrà la relazione tra a, e i suddetti parametri della curva. Gli altri due quadrati si otterranno intendendo condotta da D all'asse la perpendicolare DQ, la quale sarà $= \frac{AI \,.\, BS \,.\, GT}{AI \,.\, ST + GI \,.\, BS}$, e taglierà l'asse in maniera che si avrà $GQ = \frac{DQ \,.\, GI}{AI}$, e $QT = \frac{DQ \,.\, ST}{BS}$; trovate le quali quantità è pure trovato $\overline{AD}^2 = (GQ - GI)^2 + (DQ - AI)^2$, e $\overline{BD}^2 = (TQ - ST)^2 + (DQ - BS)^2$.

Per conoscere poi se la AB sia massima, o minima delle inscrivibili pel ritrovato punto C, o se non sia nè l'uno, nè l'altro, si potrà usare un metodo analogo a quello, che è stato proposto di sopra (§. VII).

Se la curva proposta fosse una sezion conica, speditissima sarebbe la costruzione, che conduce alla soluzione del problema. In fatti sia proposta la parabola AVB (*Fig.* 6) con la inscritta AB. Inscrivasi parallela alla AB una qualunque altra FS, e l'una e l'altra inscritta dividasi per metà, la prima in O, l'altra in Q. Per O, e Q tirisi la retta OQ, che incontrerà la curva in un punto V, e sarà un diametro, che avrà V per vertice. Prolunghisi questo diametro oltre il vertice in D, così che sia VD = VO. È noto cadere appunto in D il concorso delle tangenti della curva nei punti A, B. Dunque da D calisi alla AB la perpendicolare DE. Ecco trovato il punto E, trovato il quale è insieme trovato C.

Venga mo proposta la ellisse AVB (*Fig.* 7) o la iperbola AVB (*Fig.* 8) con la inscritta AB. Se non vi è notato il centro K, questo si trovi mediante l'intersecazione di due diametri, ciascun de' quali si conduce come si è poco fa condotto quello della parabola. Dal centro K sia la KO, che divida per metà la AB, e tagli la curva in V; indi facciasi KO : KV : : KV : KD. È noto essere D il punto di concorso delle tangenti ai due punti di curva A, B. È dunque D il punto, da cui deesi calare alla AB la perpendicolare DE.

Se l'inscritta giacesse tra le due opposte iperbole, come nella fig. 9, allora non potendo più il concorso delle tangenti

Fig. 2

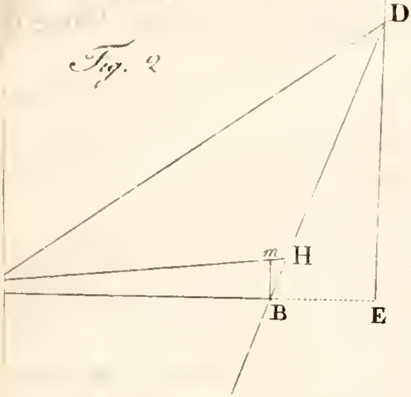


Fig. 3

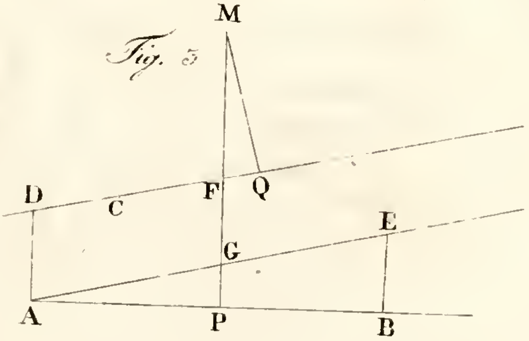

M
D
C
F
Q
E
G
A
P
B

Fig. 5

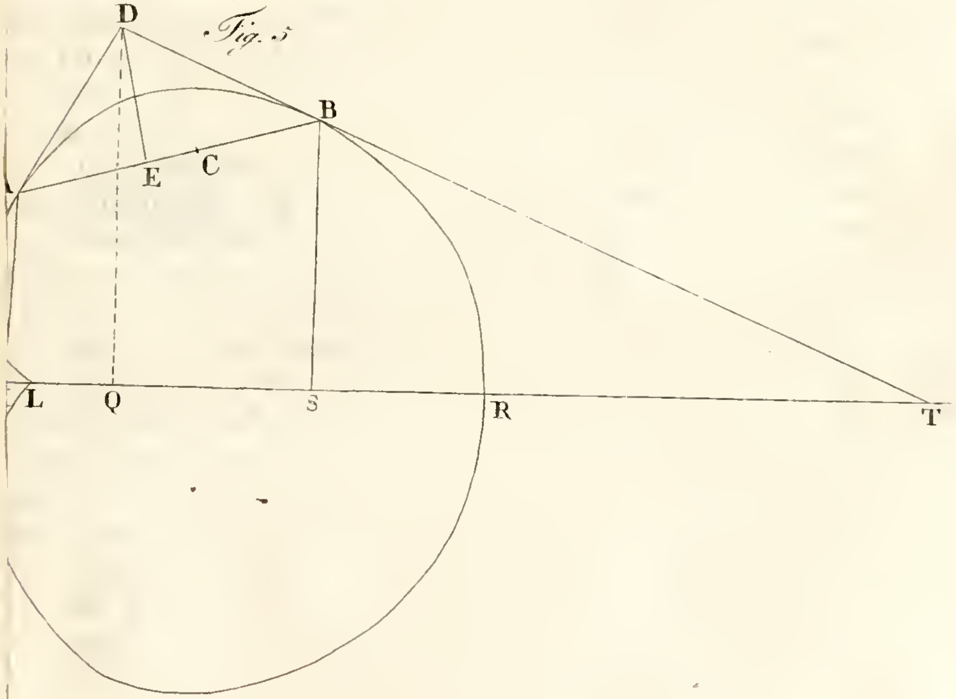


Fig. 1

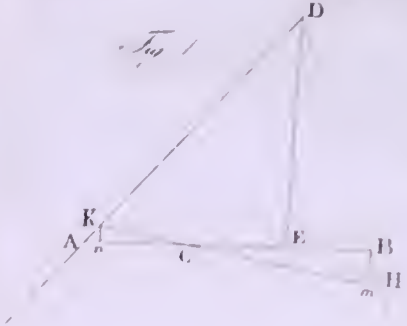


Fig. 2

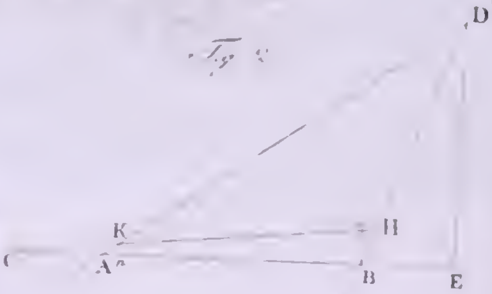


Fig. 5

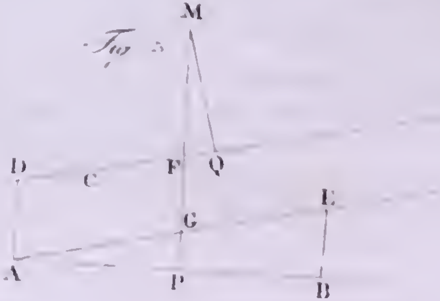

M
D
C
F
Q
G
E
A
P
B

Fig. 4

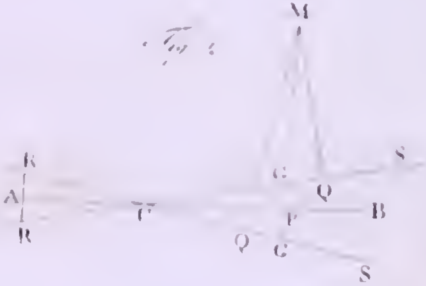
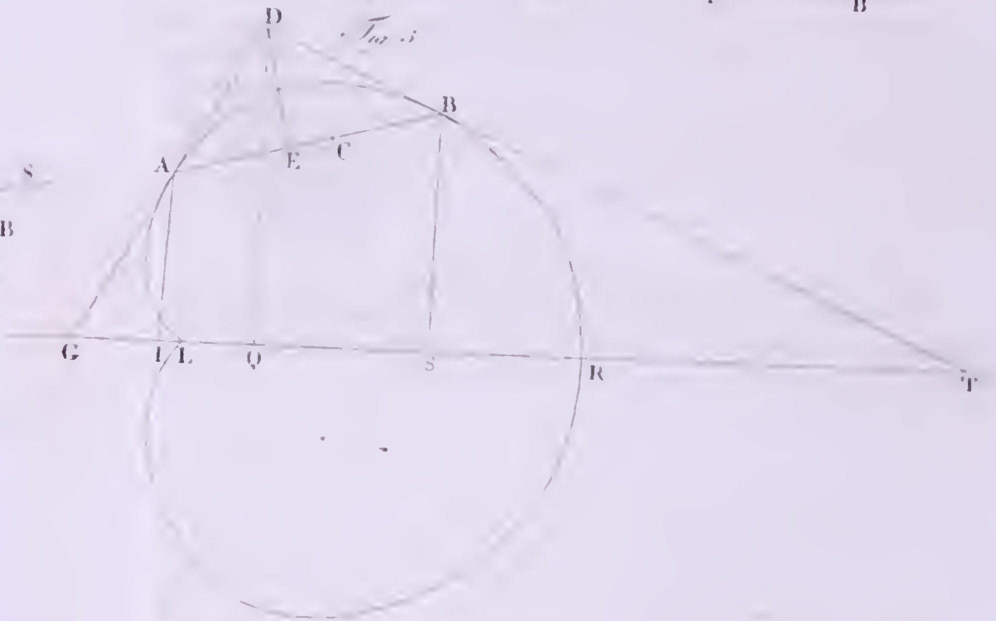

M
K
A
R
F
G
Q
S
B
P
Q
G
S

Fig. 3


D
B
A
E
C
G
I
L
Q
S
R
T

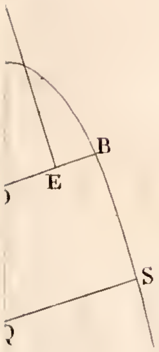


Fig. 7

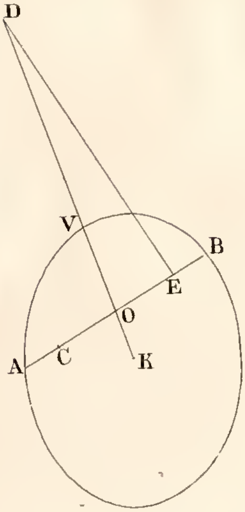
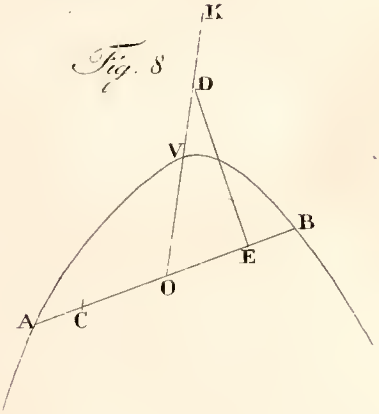


Fig. 8



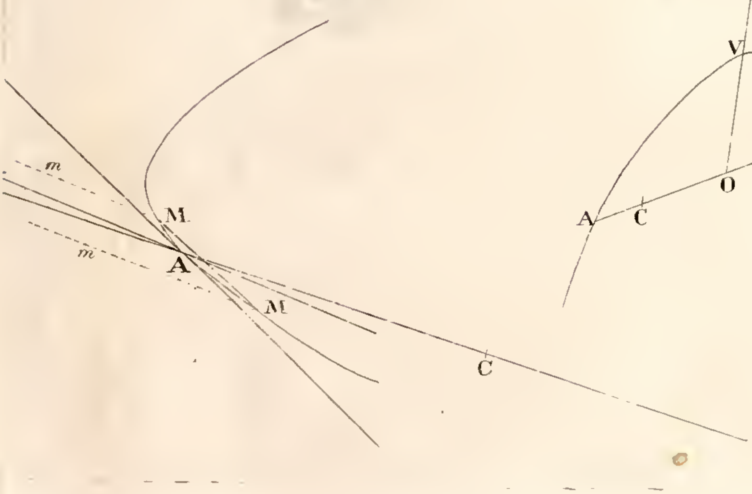


Fig. 6

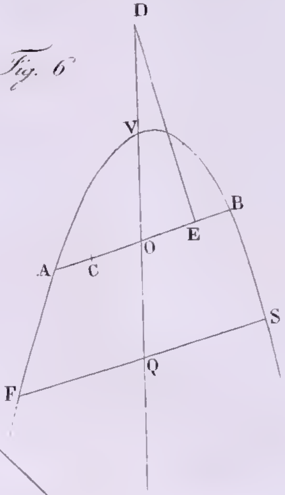

D
V
B
E
O
A
C
S
Q
F

Fig. 7

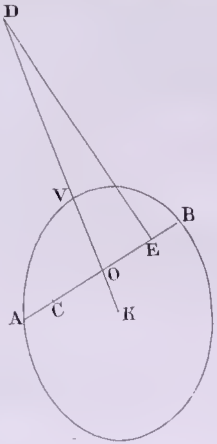


Fig. 8

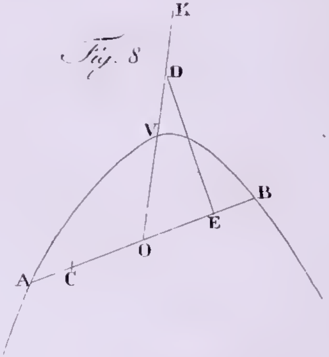
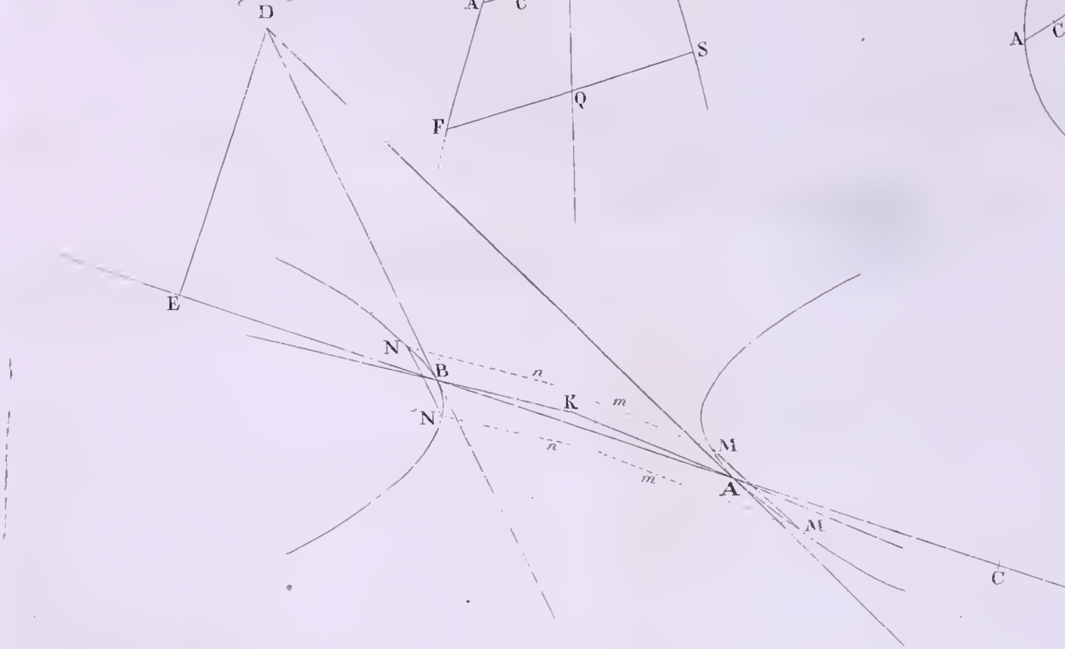


Fig. 9


D
E
N
B
n
K
m
N
n
m
M
A
M
C

ne' due punti A, B cadere in un diametro cognito, bisogna, se non fosse già notato, trovar il centro K mediante il concorso di due diametri, come si è detto di sopra: indi condotte da K ai punti A, B le rette KA, KB, che prolungate ciascuna entro la propria iperbola sono due diametri, tirar comunque due parallele M*m*, M*m* equidistanti da KA una da una parte, l' altra dall' altra parte della stessa KA, ed altre due N*n*, N*n* equidistanti da KB; poichè unendo i due punti M, M, e gli altri due N, N, dove esse incontrano la rispettiva iperbola, la MM sarà una doppia ordinata al diametro KA, e la NN una doppia ordinata al diametro KB. Per lo che condotta pel vertice A del diametro KA la AD parallela alla doppia ordinata MM, e pel vertice B del diametro KB la BD parallela alla doppia ordinata NN saranno questa AD, e questa BD le tangenti delle due opposte iperbole nei punti estremi della data inscritta A, B. Il punto pertanto D, dove queste due tangenti s' incontrano, è quello, da cui si dee condur alla inscritta AB la perpendicolare, che va a segnare in essa il punto E, il qual serve a trovare il punto cercato C.

SEGUITO DE' SAGGI DI MECCANICA E DI ALGEBRA TRASCENDENTE

Del Signor Pietro Franchini

Presentati dal Sig. Giuseppe Venturoli li 20 Novembre 1814
ed approvati dal Sig. Magistrini.

ARTICOLO VI.

Nuovo metodo per misurare le grandi altezze la cui base sia inaccessibile.

§. 1. Per misurare le grandi altezze non si conoscono che tre metodi, il primo trigonometrico, fondato sulla risoluzione di alcuni triangoli rettilinei, determinati per mezzo di esattissimi sperimenti: il secondo dipendente da osservazioni barometriche e termometriche, fatte sulla base e sulla sommità dell'altezza richiesta: il terzo appoggiato alla formola

$$s = \frac{1}{gk^2} \log . \tfrac{1}{2} \left\{ e^{gkt} + e^{-gkt} \right\}, \ldots (1),$$

dove g esprime la gravità terrestre, t il tempo che un corpo di nota figura e di noto peso impiega a percorrere liberamente l'altezza richiesta, k un coefficiente che dipende dalla figura e dalla densità del corpo suddetto, e dal rapporto della sua gravità specifica a quella del mezzo in cui si effettua la caduta, e la base de' logaritmi Neperiani.

I primi due metodi suppongono però la base accessibile, e divengono inutili se niuna osservazione può farsi su di essa; come quando si tratta di misurare la profondità di un pozzo, o la elevazione di una rupe che verticalmente sovrasti ad una valle inaccessibile.

Il terzo soggiace a delle gravi difficoltà quando è inaccessibile la base, e quando manca un secondo osservatore su di essa, perchè rimane ignoto l'elemento t.

Nè può essere di alcun uso il calcolo degli spazj liberamente percorsi da un grave in forza della legge Galileiana, perchè l'elemento t non può precisamente determinarsi, e perchè la resistenza del mezzo eccessivamente ne modifica il risultato (*). È dunque necessario un nuovo metodo generale che supplisca nell'occorrenza al difetto de' metodi conosciuti.

§. 2. Dalla sommità dell'altezza richiesta si lasci cadere una sfera di noto peso, e si osservi il numero de' minuti secondi che scorrono dal principio della caduta sino all'istante in cui giunge all'orecchio il suono, prodotto dall'urto della sfera contro il piano della base. Essendo a il numero de' secondi, s il numero de' piedi parigini che misura l'altezza cercata, siccome il suono in 1'' percorre uniformemente 1042 piedi, s'istituisca la proporzione

$$1042^{p.} : s^{p.} :: 1'' : \frac{s''}{1042}.$$

Pongasi $\left(a - \frac{s}{1042}\right)''$ per t nella nota formola $s = \frac{1}{2} g t^2 = 15^{p.},098\, t^2$; si risolva l'equazione quadratica che ne deriva, ed una delle risolventi darà per s un valore s_1, che sarebbe il vero se la caduta della sfera si fosse effettuata nel vuoto. Ciò posto si assuma la formola (1); vi si sostituisca $\left(a - \frac{s_1}{1042}\right)''$ per t: si appuri il valore di s, e indicandolo per s_2 si sostituisca nella stessa formola $\left(a - \frac{s_2}{1042}\right)''$ per t: si calcoli di nuovo s e si replichi due altre volte la stessa operazione. Il risultato finale esprimerà quasi esattamente quello che si ri-

---

(*) Il Sig. Ab. *Marie* (Traité de Mécan. p. 225) si propone il seguente Probl.: *Trouver la profondeur d'un puits, au fond du quel on sait qu'un corps ne parvient qu'au bout de* 7''; ma il risultato $739^{pi.}.\frac{4}{5}$ ch'egli ottiene è destituito d'ogni apparenza di verità, perchè vi si trascura la resistenza dell'aria, e gratuitamente si suppone cognito il momento nel quale il grave perviene al fondo del pozzo.

cerca. Ecco un Problema che porge un compiuto schiarimento dell'esposto metodo.

§. 3. PROBLEMA. Dalla sommità di una rupe che verticalmente sovrasta alla soggetta valle si lascia cadere una data sfera. Dal principio della caduta sino al momento in cui si sente il suono prodotto dall'urto della sfera contro il suolo della valle scorrono $10''$. Si dimanda di quanti piedi parigini sia la verticale che misura l'altezza della rupe sul piano della sua base.

SOLUZIONE. Due sono le ricerche a cui fa d'uopo soddisfare: 1.° Qual sia il tempo assoluto che la sfera impiega nella sua caduta: 2.° Qual sia lo spazio che ad onta della resistenza dell'aria la sfera percorre nel tempo assegnato. Sia il numero de' piedi che prescindendo dalla resistenza, misurerebbe la linea della caduta. Siccome si ha $1042^{p.} : s^{p.} :: 1'' : \frac{s''}{1042}$, se la sfera cadesse nel vuoto il tempo della sua caduta sarebbe $= 10'' - \frac{s''}{1042}$. In questa ipotesi la nota formola $s = \frac{1}{2}gt^2$, sostituendo $15^{p.},098$ per $\frac{1}{2}g$, e $10'' - \frac{s''}{1042}$ per t diviene $s = 15^{p.},098\left(10 - \frac{s}{1042}\right)''^2$ cioè $s = 15^{p.},098\,\frac{108576400 - 208405 + s^2}{1085764}$, e fatte le riduzioni si ha l'equazione

$$s^2 - 92754,425 \times s = -108576400:$$

quindi $\quad s = 46377,212875 \pm 45191,475294$,

e preso il segno inferiore perchè la somma dà un'altezza incompatibile col tempo assegnato di $10''$, risulta

$$s_1 = 1185^{p.},737581.$$

Dunque $t = 10'' - \frac{1185,737581}{1042} = 10'' - 1'',137236 = 8'',862056$.

Siccome nel calcolo di s non si è avuto riguardo alla resistenza, il valore $1185^{p.},737581$ ottenuto per s è $>$ del vero, e n'è per conseguenza minore quello che ne risulta per t cioè $8'',862056$. Si vede peraltro che ci vuole un errore di $104^{p.},2$ nel valore di s per averne uno di $\frac{1}{10}$ di $1''$ in quello di t.

di t. Ciò posto, passiamo a stabilire i principj che sono necessarj per introdurre nel calcolo la considerazione della resistenza .

Peso di un poll. cub. d'aria	gr.	0 , 317
Peso della sfera, che per fissare le idee supponiamo di marmo nero d'Italia, e di un diam. di $5^{pol.}$, 28 , e però di un volume $= 77^{pol.\ cub.}$, 073 , ...	gr.	1186 , 679438
Peso di un'eguale sfera d'aria . . .	gr.	24 , 432141
Peso assoluto della sfera di marmo . .	gr.	1211 , 111579
Valore assoluto della gravità terrestre in 1″	poll.	362 , 352
Valore relativo della gravità nella sfera durante la sua caduta	poll.	355 , 042

Resistenza totale sofferta dalla sfera cadente $\} =$ (Meccan.) alla metà del peso di un prisma d'aria, avente per base il circolo massimo della sfera, cioè $27^{poll.\ q.}$, 895 , e per altezza $\frac{u^2}{2g} \} = \frac{0,317 \times 21,895 . u^2}{2 . 2g} = \frac{6,940715\, u^2}{4g} = 1,735179 \frac{u^2}{g}$.

Resistenza elementare, cioè quella che vien provata da ciascuna particella elementare della sfera $\} =$ al valore prec. $1,735179 \frac{u^2}{g}$ diviso per la massa della sfera, cioè per $\frac{1211,111579}{g} \}$ $= 0,001432 u^2$.

Dunque (Meccan.) $gk^2 = 0,001433$; e perchè $g = 355,042$ si ha $k^2 = \frac{0,001433}{355,042} = 0,00000\ 40361\ 42$; $k = 0,002009$; $gk = 0,7132719378$ ed $\frac{1}{gk^2} = 697,836706$. Si ha d'altronde $e = 2,718282$.

Per diminuire la prolissità del calcolo si prenda

$$gk = 0,713 ,\quad e = 2,718 ,\quad t = 8'',8621 .$$

Così la formola (1) si riduce ad

$$s = 697,836706 \log . \tfrac{1}{2} \{ 2,718^{6,318677} + 2,718^{-6,318677} \} .$$

Per mezzo de'logaritmi tabulari si trova $2,718^{6,318677} = 554,470963$.

Dunque $\frac{1}{2,718^{6,318677}} = 0,001803$; per conseguenza

$$s = 697,836706 \log. 277,236383:$$

Ma $\log.^{tab.} 277,236383 = 2,443250$, e però

$\log.^{nep.} 277,236383 = 5,625791$: Dunque si ha

$s_2 = 697,836706 \times 5,625791 = 3925^{poll.},881520 = 327^{pie.},156793$. Questo valore è < del vero perchè tal è il valore $8'',8621$ assunto per t nella formola (1). Per altro, siccome ad ogni $104^{p},2$ di aumento nel valore di s corrisponde un decremento di $\frac{1}{10}$ di $1''$ nel tempo, se si rappresenta per z il numero de' secondi che deesi aggiungere all'assunto valore di t, l'equazione

$$327,156793 + 104,2 \times z = 1185,737581,$$

il cui secondo membro supera il vero valore di s, c'insegna che z è necessariamente $< 0'',823973$. Ma facendo

$$t = 8'',8621 + 0'',823973 = 9'',686073$$

la formola (1) dà

$$s = 4335^{pol.},18562325 = 361^{pie.},265469,$$

e questo risultato differisce dall'antecedente di $34^{pi.},108676$. Dunque l'errore del valore difettivo $s_2 = 327^{pi.},156793$ non giunge a $34^{pi.},2$; e qualora si assuma il precedente valore di s, e si faccia

$$t = 10'' - \frac{327'',156793}{1042} = 10'' - 0'',313970 = 9'',686030$$

l'errore per eccesso che può commettersi nella valutazione di t non giunge a $\frac{34'',2}{1042}$ cioè a $0'',032822$.

Pongasi dunque $t = 9'',686030$. La formola (1) si cangia in

$$s = 697,836706 \log. \tfrac{1}{2} \left\{ 2,718^{6,906139} + 2,718^{-6,906139} \right\}$$

e dà $s_3 = 4335^{pol.},148637 = 361^{pi.},262394$.

Calcolando il tempo che il suono impiega a percorrere $361^{pi.},262394$ si trova $0'',346709$, e questo tempo unito a quello assunto per t, cioè $9'',686030$ dà $10'',032739$. Si ha dunque un'aberrazione in più di $0'',032739$, n.° < del limite $0'',032822$ sopra determinato.

Pongasi $t = 10'' - \frac{361,262394}{1042} = 10'' - 0'',346701 = 9'',653299$

e si avrà

$$s = 697,836706 \log. \tfrac{1}{2} \{ 2,718^{6,882022} + 2,718^{-6,882022} \}$$

e fatto tutto il calcolo $s_4 = 4315^{pol.},526028 = 359^{pi.},627169$.

Il tempo che il suono impiega a percorrere $359^{pi.},627169$ è $= \frac{359'',627169}{1042} = 0'',345132$, e questo unito al valore $9'',653299$ assunto per t dà $9'',998431$, cioè un risultato che aberra difettivamente dal vero di $0'',001569$, vale a dire di un momento insensibile.

Pongasi finalmente

$$t = 10'' - \frac{359,627169}{1042} = 10'' - 0'',345132 = 9'',654868$$

$$s = 697,836706 \log. \tfrac{1}{2} \{ 2,718^{6,88392} + 2,718^{-6,88392} \}$$

ossia $s_5 = 4319^{pol.},644806 = 359^{pi.},9704005$.

La proporzione $1042 : 1'' :: 359,9704005 : x = 0'',345461$ ci dà luogo di riconoscere che si ha

$$9'',654868 + 0'',345461 = 10'',000329$$

cioè che la soluzione precedente è dotata di tutta quell'esattezza che in un problema di questa natura può desiderarsi.

ARTICOLO VII.

Dimostrazione del teorema fondamentale

$$a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} .$$

I Geometri, dopo ch'ebbero trovata la formola generale, esprimente lo sviluppo di $(a + b)^m$ nell'ipotesi di m intiero, conobbero la necessità di determinare la forma dello sviluppo analogo nell'ipotesi che m sia una frazione qualunque. Per la stessa ragione, dopo che si è provato essere $a^m . a^n = a^{m+n}$ nell'ipotesi che m, n sieno intieri, convien determinare l'espressione di $a^m . a^n$ nell'ipotesi che m, n sien numeri fratti, perchè la dimostrazione con cui si prova essere $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$ quando m, n sono intieri, non ha luogo se m, n sieno fratti. Questo teorema è uno de' fondamenti dell'Algebra, e niuno, per quanto è a nostra notizia, lo ha sin qui dimostrato.

Si riduca il numero a alla forma $\alpha+\beta$, indi per mezzo della formola del binomio si deduca

$$\text{I}\ldots.(\alpha+\beta)^{\frac{m}{n}} = \alpha^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\alpha^{\frac{m}{n}-1}\beta + \tfrac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\alpha^{\frac{m}{n}-2}\beta^2 + \text{ec.}$$

$$\text{II}\ldots.(\alpha+\beta)^{\frac{p}{q}} = \alpha^{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q}\alpha^{\frac{p}{q}-1}\beta + \tfrac{1}{2}\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\alpha^{\frac{p}{q}-2}\beta^2 + \text{ec.}$$

$$\text{III}\ldots.(\alpha+\beta)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = \alpha^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} + \left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)\alpha^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-1}\beta + \tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-1\right)\alpha^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-2}\beta^2\ \text{ec}$$

L'ordinata moltiplicazione de' primi due sviluppi dà

$$\begin{aligned}\text{IV}\ldots.(\alpha+\beta)^{\frac{m}{n}}(\alpha+\beta)^{\frac{p}{q}} = \alpha^{\frac{m}{n}} . \alpha^{\frac{p}{q}} + \frac{m}{n}\alpha^{\frac{m}{n}-1} . \alpha^{\frac{p}{q}}\beta + \frac{m}{n} . \frac{p}{q}\alpha^{\frac{m}{n}-1} . \alpha^{\frac{p}{q}-1}\beta^2 + \text{ec.}\\ + \frac{p}{q}\alpha^{\frac{p}{q}-1}\alpha^{\frac{m}{n}}\beta + \tfrac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\alpha^{\frac{m}{n}-2}\alpha^{\frac{p}{q}}\beta^2 + \text{ec.}\\ + \tfrac{1}{2}\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\alpha^{\frac{p}{q}-2}\alpha^{\frac{m}{n}}\beta^2 + \text{ec.}\end{aligned}$$

Ma supponendo $\alpha^{\frac{m}{n}} . \alpha^{\frac{p}{q}} = \alpha^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$, e per conseguenza $\alpha^{\frac{m}{n}-1}$ $\alpha^{\frac{p}{q}} = \alpha^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-1}$ (*) il IV sviluppo si cangia nel III, ed un'ipotesi che trasforma uno sviluppo legittimo in un altro sviluppo legittimo è necessariamente legittima. Dunque l'equazione $\alpha^{\frac{m}{n}} . \alpha^{\frac{p}{q}} = \alpha^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ è vera generalmente.

(*) Basta fare $\frac{m}{n} - 1 = \frac{m'}{n'}$ per ricondurre questa equazione alla precedente.

ARTICOLO VIII.

Nuovo metodo per formare speditamente le alte potenze delle cifre, e de' numeri ch' equivalgono al prodotto di più cifre.

Siccome si ha $4^m = 2^m . 2^m$, $6^m = 2^m . 3^m$, $8^m = 2^m . 2^m$, $9^m = 3^m . 3^m$, per formare speditamente una data potenza intiera positiva di una delle cifre $2, 3, 4 \ldots . 9$, altro non si richiede che un metodo compendioso con cui si ottenga una potenza qualunque delle cifre $2, 3, 5, 7$. Noi diciamo che a quest' effetto basta introdurre nel calcolo le successive potenze sudduple de' successivi quadrati della cifra proposta. Come ciò si eseguisca non si può meglio dichiarare che con gli esempj.

Volendo formare la potenza 2^{30} si deduca successivamente
$2^{30} = 4^{15} = 4 . 4^{14} = 4 . 16^7 = 4 . 16 . 16^6 = 64 . (16^2)^3 = 64 . 256^3$
$= 64.256.256^2 = 64.256.65536 = 16384.65536 = 1073741824.$
Nella stessa guisa si ottiene
$2^{64} = 4^{32} = 16^{16} = (16^2)^8 = 256^8 = (256^2)^4 = (65536)^4 = (65536^2)^2$
$= (4294967296)^2 = 18446744083709551616$.

L' ultimo prodotto non richiede che cinque diverse moltiplicazioni. Così
$3^{19} = 3 . 3^{18} = 3 . 9^9 = 3 . 9 . 9^8 = 27 . 81^4 = 27 . (81^2)^2 = 27 . 6561^2$
$= 27 . 43046721 = 1162251467$.

Se il numero proposto sia il prodotto di più cifre si fa la potenza di ciascuna, ed il prodotto de' risultati è ciò che si cerca. Così facilmente si trova

$$42^8 = 2^8 . 3^8 . 7^8 = 256 . 6561 . 5764801 .$$

Per formare la potenza 2^m essendo $m > 0$, si osservi che si ha

$\frac{1}{2} = 0,5$ $\qquad \frac{1}{2^2} = 0,25$

$\frac{1}{2^3} = 0,125$ $\qquad \frac{1}{2^4} = 0,0625$

$$\frac{1}{2^5}=0,03125 \qquad \frac{1}{2^6}=0,015625$$

$$\frac{1}{2^7}=0,0078125 \qquad \frac{1}{2^8}=0,00390625$$

$$\frac{1}{2^9}=0,001953125 \qquad \frac{1}{2^{10}}=0,0009765625$$

Formato il 10.° quoziente si abbrevia l'operazione osservando che le ultime tre cifre sono alternativamente 125 e 625, e che le cifre antecedenti alle ultime tre si ottengono con moltiplicare per 5 le simili cifre del quoziente anteriore, ed aggiungendo 3 al prodotto se trattisi di formare un quoziente di ordine dispari. Si ha per esempio

$$15=3.5;\ 78=15.5+3;\ 390=78.5;\ 1953=390.5+3,\ \text{ec.}$$

Mediante l'espressione di 2^{2m} si ha quella di 4^m perchè $2^{2m}=4^m$. Le potenze negative di 5 si ottengono anche più facilmente. Essendo

$$\frac{1}{5}=0,2=0,2^1, \qquad \frac{1}{5^2}=0,04=0,02^2$$

$$\frac{1}{5^3}=0,008=0,002^3, \qquad \frac{1}{5^4}=0,0016=0,002^4$$

$$\frac{1}{5^5}=0,00032=0,0002^5, \qquad \frac{1}{5^6}=0,000064=0,00002^6$$

si vede che il numero degli zeri cresce di due unità per ogni tre divisioni, il che basta ec. Si ha per esempio

$$\frac{1}{5^{24}}=0,00000\ 00000\ 00000\ 02^{24};$$

e perchè $2^{24}=4^{12}=16^6=256^3=256 . 65536=16777216$, risulta

$$\frac{1}{5^{24}}=0,00000\ 00000\ 00000\ 01677\ 7216 .$$

Per conseguenza si ha $\frac{1}{25^m}=\frac{1}{5^{2m}}$.

ARTICOLO IX.

Nuovo metodo elementare per cui direttamente si ottiene il valore prossimo dell' incognita i *spettante alla nota equazione*

$$c(1+i)^t = r\left\{\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right\}$$

dove i *è l' anno interesse di una lira,* t *un dato numero di anni,* r *un' annua rendita,* c *un capitale, che nell' ipotesi dell' interesse composto equivale al profitto risultante dall' esazione di un numero* t *di rendite consecutive.*

Noi supponiamo che fatto $r=1$ siasi calcolato il valore di c corrispondente alle quattro distinte ipotesi, d' $i=0$; $i=0,04$; $i=0,05$; $i=0,06$, e per tutti i valori intieri positivi di t inclusivamente compresi fra 1 e 100. Le tavole che risultano da questo calcolo si trovano nella DOTTRINA DEGLI *AZZARDI* del Sig. *Moivre* tradotta dal P. *Gaeta* (Milano per il *Galeazzi* 1776).

Chiamando c', r', t' il respettivo dato valore di c, r, t; $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$, $c_{,v}$ il capitale corrispondente alla rendita di $1^{li.}$ nell' ipotesi di $t=t'$, e nelle rispettive ipotesi di

$$i_{,}=0,03;\ i_{,,}=0,04;\ i_{,,,}=0,05;\ i_{,v}=0,06,$$

le proporzioni

$$\left\{c_{,} : c' :: 1 : r_{,};\ c_{,,} : c' :: 1 : r_{,,};\ c_{,,,} : c' :: 1 : r_{,,,};\ c_{,v} : c' :: 1 : r_{,v}\right\} \ldots (a)$$

danno il valore $r_{,}$, $r_{,,}$, $r_{,,,}$, $r_{,v}$ della rendita respettiva che nelle accennate ipotesi corrisponde al capitale c'.

Posto che niuno de' valori $r_{,}$, $r_{,,}$, $r_{,,,}$, $r_{,v}$ si trovi $=r'$, altrimenti i sarebbe già noto, il valore di r' cadrà fra due de' consecutivi numeri $r_{,}$, $r_{,,}$, $r_{,,,}$, $r_{,v}$ (*).

Se r' cade fra $r_{,}$, ed $r_{,,}$ si osservi a quale de' due limiti

---

(*) Se si trovasse $r_{,v} < r'$ l' interesse sarebbe $> 0,06$ e però non ammissibile. Si dovrebbe dunque diminuire la rendita r'.

sia più vicino: qualora sia più vicino ad $r_{,}$ si faccia $i = i_{,} + \delta$: essendo r' più vicino ad $r_{,,}$ si farebbe $i = i_{,,} - \delta$. Dicasi lo stesso nelle respettive ipotesi che r' cada fra $r_{,,}$ ed $r_{,,,}$ o fra $r_{,,,}$ ed $r_{,v}$. Suppongasi per esempio che abbia luogo l'equazione $i = i_{,} + \delta$. Sostituita questa espressione d'i nell'equazione del problema, siccome il massimo valore di δ è 0,005, e però il massimo valore di δ^3 è 0,000000125, si trascurino le potenze di δ superiori alla seconda; si sciolga l'equazione quadratica che ne risulta, equazione che più speditamente si ottiene mettendo la proposta sotto la forma

$$(ci - r)(1 + i)^t + r = 0,$$

e si avrà con un'approssimazione assai notabile il richiesto valore $i_{,} + \delta (= i)$.

Sia per esempio $c' = 100^{sc.}$, $r' = 15^{sc.}, 5$; $t' = 8^{an.}$. Consultando le tavole terza e quarta si vede che le ultime due delle proporzioni (*a*) si riducono a

$$6,4632 : 100 :: 1 : r_{,,,};\ 6,2097 : 100 :: 1 : r_{,v},$$

e danno

$$r_{,,,} = 15^{sc.}, 472,\ r_{,v} = 16^{sc.}, 103.$$

Dunque r' cade fra $r_{,,,}$ ed $r_{,v}$ e si ha $i = 0,05 + \delta$.

Posto $i_{,,,} + \delta$ per i l'equazione del problema è

$$(c'i_{,,,} + c'\delta - r')(1 + i_{,,,} + \delta)^{t'} + r' = 0, \quad \text{ossia}$$

$$\left\{(c'i_{,,,} - r')\frac{t'}{2}(t' - 1)(1 + i_{,,,})^{t'-2} + c't'(1 + i_{,,,})^{t'-1}\right\}\delta^2 +$$
$$\left\{c'(1 + i_{,,,})^{t'} + (c'i_{,,,} - r')t'(1 + i_{,,,})^{t'-1}\right\}\delta + (c'i_{,,,} - r')(1 + i_{,,,})^{t'} + r' = 0,$$

e sostituiti i valori

$$\left\{(5-15,5)28(1,05)^6 + 800(1,05)^7\right\}\delta^2 + \left\{100(1,05)^8 + (5-15,5)8(1,05)^7\right\}\delta +$$
$$(5 - 15,5)(1,05)^8 + 15,5 = 0.$$

Siccome $(1,05)^6 = 1,340095$; $(1,05)^7 = 1,407099$; $(1,05)^8 = 1,477455$, la precedente si riduce a

$$(725,679800 - 393,987930)\delta^2 + (147,745474 - 118,196379)\delta -$$
$$0,013275 = 0, \quad \text{ossia}$$

$$331,691870\,\delta^2 + 29,549095\,\delta - 0,013275 = 0.$$

Quindi

$$\delta^2 + 0,089082\,\delta - 0,000040 = 0,$$

$\delta = -$

$\delta = -0,044541 \pm \sqrt{(0,000040 + 0,001984)} = -0,044541 \pm \sqrt{0,002024} = -0,044541 \pm 0,044988 = 0,000447$ ed $i (= 0,05 + \delta) = 0,050447$.

ARTICOLO X.

Teoria de' vitalizj dedotta da' suoi veri principj .

Nozioni Preliminari .

§. 1. I. Dicesi *montante* di un capitale c la somma del capitale stesso e del suo interesse *composto*, al termine di un dato tempo t .

Chiamando i l'annuo interesse di una lira la proporzione

$$1 : i :: c : ci$$

c'insegna che il montante di c al termine del primo anno è $c(1 + i)$; che al termine del secondo è $c(1 + i) + c(1 + i)i = c(1 + i)^2$; che al termine del terzo è $c(1 + i)^2 + c(1 + i)^2 i = c(1 + i)^3$, ec.

In generale al termine del tempo t il montante del capitale c vien espresso per $m = c(1 + i)^t$.

Fatto $c = \frac{1}{(1 + i)^t}$ si ha $m = 1^{li.}$, e posto $1 + i = h$ si scuopre che i capitali

$$\frac{1}{h}, \frac{1}{h^2}, \frac{1}{h^3} \ldots\ldots \frac{1}{h^t}$$

danno tutti al respettivo termine di $1, 2, 3, \ldots . t$ anni il montante di una lira .

II. La probabilità p che un dato evento fortuito succeda sta in ragione diretta del numero F de' casi favorevoli al successo, ed in ragione inversa del numero P de' casi possibili, cioè si ha $p = \frac{F}{P}$.

Infatti se resta F invariato, l'aumento di p è proporzionale al decremento di P e viceversa: se resta invariato P, la variazione di p è $=$ alla variazione di F.

Indicando con la lettera C il numero de' casi contrarj al successo si ha $P = F + C$, e mentre la probabilità del successo è $\frac{F}{F+C}$, la probabilità contraria risulta $= \frac{C}{F+C}$ ossia $= 1 - \frac{F}{F+C}$.

III. La probabilità di un avvenimento composto di più avvenimenti semplici indipendenti, è uguale al prodotto delle probabilità assolute di ciascuno avvenimento semplice. *Dimostrazione*.

Il numero de' casi possibili relativi all' avvenimento composto equivale al prodotto de' numeri che respettivamente rappresentano i casi possibili di ciascuno avvenimento semplice, perchè ognuno de' suddetti casi relativi ad uno degli avvenimenti semplici può combinarsi con ciascuno de' casi possibili relativi a ciascuno degli altri. Dicasi lo stesso per rapporto ai casi favorevoli e si concluderà ec.

IV. Il prodotto cp di un certo capitale c nella probabilità p che vi è di guadagnarlo, dicesi *sorte* e *speranza matematica*.

Se il capitale c non può conseguirsi che al termine del tempo t, il valore della sorte corrispondente al principio del tempo t si ottiene con sostituire in cp per c il capitale *dovuto* alla somma stessa, tale cioè che al termine del tempo t dia il montante c. Questo capitale è $\frac{c}{(1+i)^t}$.

Con questi semplicissimi principj siamo in grado di soddisfare ai principali problemi spettanti alla dottrina de' vitalizj e delle successioni.

§. 2. TEOREMA. Prescindendo da ogni particolare permanente cagione di deperimento, la vita *media* o *probabile* equivale alla frazione il cui numeratore sia il numero de' superstiti dopo l' età data, il denominatore il numero de' viventi nell'età stessa. *Dimostrazione*. Dai registri di *Sussmilch* (*) risulta che di 1000 nati giungono

		Mortalità			Mortalità
All'età di anni 90	11	2	All'età di anni 94	4	1
91	9	2	95	3	1
92	7	2	96	2	1
93	5	1	97	1	1

Abbiasi un'urna che contenga 11 biglietti: suppongasi che per 7 anni consecutivi al termine di ogn'anno si faccia l'estrazione di un numero di biglietti espresso dalla respettiva cifra della terza colonna, e che gl'individui il cui biglietto resta nell'urna guadagnino uno zecchino per ciascheduno. È chiaro (n.° IV) che nell'istante della prima estrazione ciascuno degli 11 biglietti ha diritto a $\frac{9}{11}$ di zecchino, perchè $\frac{9}{11}$ è la sua probabilità di vincere nella predetta estrazione; che ciascuno degli stessi biglietti nell'istante medesimo ha diritto a $\frac{9}{11}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{11}$ di zecchino per conto della seconda estrazione (§. 1. n.° III); che ha diritto a $\frac{9}{11}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{11}$, a $\frac{9}{11}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{11}$, a $\frac{9}{11}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{11}$, a $\frac{9}{11}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{11}$, a $\frac{9}{11}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{11}$ per conto delle respettive estrazioni 3.ª, 4.ª, 5.ª, 6.ª e 7.ª. Dunque il diritto che risulta da tutte l'estrazioni equivale ad uno zecchino moltiplicato per una frazione, il cui numeratore sia la somma 31 di tutte le cifre della colonna media eccettuato il 1.°, e il denominatore sia il primo termine 11. Il diritto in questione è dunque $=\frac{31}{11}^{zec.}=2^{zec.}\,\frac{9}{11}$. Alla vincita di uno zecchino si sostituisca la sopravvivenza di un anno, e si concluderà che un individuo di 90 anni ha diritto ad una vita media di $2^{an.}$ e 10 mesi presso a poco.

(*) Die göttliche ordnung in den veränderungen den menschlichen geschlechts aus der geburt, dem tode und der fortpflanzung desselben erwiesen. Berl. 1765.

Il raziocinio precedente, quantunque applicato ad un esempio particolare, essendo di sua natura generico, se dicasi E l'età data, e però E + 1, E + 2, ec. ciascuna dell'età consecutive, indicando per n, n', n'' ec. il numero de' viventi nell'età respettive, onde si abbiano le due seguenti serie in colonna

$$\begin{array}{l|l} E & n \\ E+1 & n' \\ E+2 & n'' \\ E+3 & n''' \\ \cdots & \\ \cdots & \\ E+m & 1 \end{array}$$

la vita media dell'età E risulta $= \frac{n'+n''+n'''\,.....+1}{n}$.

§. 3. Il teorema stabilito è vero in astratto, cioè indipendentemente da qualunque permanente cagione, la quale in una speciale maniera tenda a conservare o diminuire la vitalità. Le principali cagioni del primo genere sono: la tranquillità dello spirito, un proporzionato esercizio delle membra, un'esatta morigeratezza e la salubrità dell'aria. Il diuturno difetto di ciascuna delle predette cagioni costituisce una cagione contraria ossia del secondo genere, ed è una cagione non dissimile la discendenza da genitori mal sani e l'esercizio di una professione pregiudizievole (*). Sì dell'une che delle altre cagioni convien tenere il più esatto conto in ogni caso particolare, ed a tal effetto sono utili le tavole di *Hogdson* e di *Deparcieux*, la prima formata sui registri di Londra, città per la natura del clima e per la eccessiva popolazione assai nemica della longevità; la seconda ricavata dai registri delle comunità religiose e dei tontinisti di Parigi (**). La ta-

---

(*) Veggasi la bell'Opera *De Morbis Artificum* di *Bernardino Ramazzini*.

(**) *Tontina* così detta perchè *Lorenzo Tonti* Napoletano nel 1663 la introdusse in Francia, è una lotteria vitalizia da cui risulta un'annua rendita determinata per ciascun socio, con la condizione che cessando di vivere un qualunque numero di socj, le rendite loro restino a vantaggio de' superstiti. La moglie di un barbiere che aveva impiegati 300 franchi nella R. tontina di Parigi del 1687, divenne padrona dell'annua rendita di franchi 73500. I socj della predetta tontina furono 5911, e furono 3349 quelli che composero la susseguente tontina di Parigi del 1696.

vola di *Hogdson* per esempio c'insegna che la massima vita media è in Londra di $39^{an.}$. $9^{m.}$, e dalla tavola di *Deparcieux* risulta ch'essa è di $48^{an.}$. $3^{m.}$.

Il confronto delle due tavole precedenti ci dà luogo di riconoscere un singolar fenomeno, ed è che sino all'età di 80 anni la regolarità del metodo dietetico e della condotta morale vince l'effetto della insalubrità dell'aria derivante da un'eccessiva popolazione, e che al di là dell'anno ottuagesimo il vizio dell'aria prevale al benefizio del regime. Per es. la vita media di un individuo di 90 anni, secondo i registri di *Sussmilch*, i quali sono ricavati dal complesso di più regni, è, come abbiamo veduto, di $2^{an.}$. $10^{m.}$, mentre la tavola di *Deparcieux* non dà che $1^{an.}$. $9^{m.}$.

Un fenomeno simile si ravvisa confrontando la tavola di *Sussmilch* con quella di *Kersboom* costruita per l'Olanda (*).

Lasciate da parte le tavole di *Dupré de S.t Maur* e di *Halley*, la prima perchè limitata a 15 parrochie, 3 di Parigi, 12 dell'adiacente campagna; la seconda perchè formata sui registri della sola città di Breslavia, noi ci proponiamo di calcolare a tenore del teorema stabilito (§. 2) la vita media d'ogni età su i dati di *Sussmilch*, nella cui tavola, riportata nella *Dottrina degli Azzardi* di *Moivre* tradotta dal P. *Gaeta* (Milano per il *Galeazzi* 1776) il valore delle vite medie aberra quasi sempre dal vero. Abbiamo aggiunto nella colonna 3.ª il numero de' sopravviventi in tutte l'età consecutive, numero che è quello di tutti i casi favorevoli. Il numero de' sopravviventi nell'età data, e che trovasi nella colonna 2.ª, è il numero de' casi possibili. Così in una stessa linea orizzontale si hanno, accanto al numero esprimente una data età, gli elementi della vita media. Per esempio la vita media dell'età di $50^{an.}$ è $= \frac{5502}{313} = 17 \frac{1}{2}$. I numeri che

---

(*) *Batavia insalubris est et brevis ævi* (*Haller* Physiol. T. 8).

Sussmilch adduce nella 3.^{a} colonna appartengono ai sopravviventi contati dal principio della tavola, e ci sembra che non sieno di alcun uso.

Un numero n della 2.^{a} colonna diviso pel numero superiore m, misura la probabilità che l'età corrispondente al numero m nella colonna antecedente ha di vivere per un anno. Così $\frac{305}{313}$ è la probabilità di vivere un anno spettante all'età di 50 anni.

Le frazioni adottate sono le più semplici e prossime. Ciò basta in un problema che non ammette una soluzione rigorosa.

TAVOLA

Dell' annua probabilità di vivere, e della vita media.

Età attuale	Di 1000 soppraviv. ogn'anno	Sopravvivuti in tutte l'età consecutive	Vita media	Età attuale	Di 1000 sopravviv. ogn'anno	Sopravvivuti in tutte l'età consecutive	Vita media
An. 0	1000	28924	29	An. 51	305	5197	17
1	740	28184	38	52	297	4900	16 $\frac{1}{2}$
2	660	27524	41 $\frac{2}{3}$	53	289	4611	16
3	620	26904	43 $\frac{2}{3}$	54	280	4331	15 $\frac{1}{2}$
4	596	26308	44 $\frac{1}{7}$	55	271	4060	15
5	584	25724	44	56	262	3798	14 $\frac{1}{2}$
6	574	25150	43 $\frac{4}{5}$	57	253	3545	14
7	564	29596	43 $\frac{1}{2}$	58	244	3301	13 $\frac{1}{2}$
8	554	24042	43 $\frac{2}{5}$	59	235	3066	13
9	546	23496	43	60	226	2840	12 $\frac{1}{2}$
10	540	22956	42 $\frac{1}{2}$				
11	535	22421	42	61	217	2623	12
12	530	21891	41 $\frac{2}{7}$	62	208	2415	11 $\frac{3}{5}$
13	526	21365	40 $\frac{3}{5}$	63	199	2216	11 $\frac{1}{7}$
14	522	20843	40	64	190	2026	10 $\frac{2}{3}$
15	518	20325	39 $\frac{1}{4}$	65	180	1846	10 $\frac{1}{4}$
16	514	19811	38 $\frac{1}{2}$	66	170	1676	9 $\frac{6}{7}$
17	510	19301	37 $\frac{4}{5}$	67	160	1516	9 $\frac{1}{2}$
18	506	18795	37 $\frac{1}{7}$	68	150	1366	9
19	501	18294	36 $\frac{1}{2}$	69	140	1226	8 $\frac{5}{7}$
20	496	17798	36	70	130	1096	8 $\frac{3}{7}$
21	491	17307	35 $\frac{1}{4}$	71	120	976	8 $\frac{1}{7}$
22	486	16821	34 $\frac{2}{3}$	72	111	865	7 $\frac{4}{5}$
23	481	16340	34	73	102	763	7 $\frac{1}{2}$
24	476	15864	33 $\frac{3}{4}$	74	93	670	7 $\frac{1}{5}$
25	471	15393	32 $\frac{3}{4}$	75	85	585	6 $\frac{5}{6}$
26	466	14927	32	76	77	508	6 $\frac{2}{3}$
27	461	14466	31 $\frac{1}{3}$	77	69	439	6 $\frac{1}{3}$
28	456	14010	30 $\frac{3}{4}$	78	62	377	6
29	451	13559	30	79	55	322	5 $\frac{6}{7}$
30	446	13113	29 $\frac{3}{5}$	80	49	273	5 $\frac{1}{2}$
31	441	12672	28 $\frac{3}{4}$	81	43	230	5 $\frac{1}{3}$
32	436	12236	28	82	37	193	5 $\frac{1}{5}$
33	431	11805	27 $\frac{2}{5}$	83	32	161	5
34	426	11379	26 $\frac{3}{4}$	84	28	133	4 $\frac{3}{4}$
35	420	10959	26 $\frac{1}{10}$	85	24	109	4 $\frac{1}{4}$
36	413	10546	25 $\frac{1}{2}$	86	21	88	4 $\frac{1}{5}$
37	406	10140	25	87	18	70	4
38	399	9741	24 $\frac{2}{7}$	88	15	55	3 $\frac{2}{3}$
39	392	9349	23 $\frac{6}{7}$	89	13	42	3 $\frac{1}{4}$
40	385	8964	23 $\frac{1}{4}$	90	11	31	3
41	378	8586	22 $\frac{3}{4}$	91	9	22	2 $\frac{1}{2}$
42	371	8215	22 $\frac{1}{7}$	92	7	15	2 $\frac{1}{7}$
43	364	7851	21 $\frac{1}{2}$	93	5	10	2
44	357	7494	21	94	4	6	1 $\frac{1}{2}$
45	350	7144	20 $\frac{3}{7}$	95	3	3	1
46	343	6801	19 $\frac{5}{6}$	96	2	1	0 $\frac{1}{2}$
47	336	6465	19 $\frac{1}{4}$	97	1	0	0
48	329	6136	18 $\frac{2}{3}$	98	0	0	0
49	321	5815	18 $\frac{1}{3}$				
50	313	5502	17 $\frac{1}{2}$				

4. TEOREMA. Chiamando p', p'', p''' . . . $p^{(t)}$ la successiva probabilità che al termine di ogn'anno una vita v ha di sopravvivere un anno, e U il valore della vita stessa, cioè il valore dell'annua rendita di $1^{li.}$ sulla vita v, si ha

$$U=\frac{p'}{h}+\frac{p'p''}{h^2}+\frac{p'p''p'''}{h^3}\;.\,.\,.\,.\,.+\frac{p'p''p'''\,.\,.\,.\,.\,p^{(t)}}{h^t}\;.\,.\,.\,.(a)$$

dove $p^{(t)}$ è l'ultima probabilità e però $p^{(t+1)}=0$. *Dimostraz.* Infatti (§. 1. n.° IV) il 1.° termine del 2.° membro esprime la sorte della vita v relativamente alla sopravvivenza del 1.° anno; il 2.° termine esprime la sorte della vita v relativamente alla sopravvivenza del 2.° anno, e così in seguito fino all'anno t^{esimo} inclusivamente, oltre il quale non evvi probabilità di sopravvivenza.

ESEMPIO. Vogliasi il valore dell'annualità di $1^{li.}$ sopra una vita di 86 anni, nell'ipotesi che sia $i=0,05$.

La tavola dà $p'=\frac{18}{21}$, $p''=\frac{15}{18}$, $p'''=\frac{13}{15}$, ec. Dunque

$$U=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{1{,}05}+\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^2}+\frac{13}{21}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^3}+\frac{11}{21}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^4}+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^5}+$$
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^6}+\frac{5}{21}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^7}+\frac{4}{21}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^8}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^9}+\frac{2}{21}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^{10}}+$$
$$\frac{1}{21}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^{11}},$$ ossia

$$U=\frac{6}{7{,}35}+\frac{5}{7{,}7175}+\frac{13}{24{,}310125}+\frac{11}{25{,}525626}+\frac{3}{8{,}933969}+\frac{1}{4{,}020285}+$$
$$\frac{5}{29{,}5491}+\frac{4}{31{,}026555}+\frac{1}{10{,}859294}+\frac{2}{34{,}206760}+\frac{1}{35{,}91709}$$
$$=0{,}816326+0{,}647878+0{,}534756+0{,}430939+0{,}335791+$$
$$0{,}248738+0{,}168871+0{,}128921+0{,}092087+0{,}058464+$$
$$0{,}027841=3{,}490612^{li.}.$$

Nella stessa maniera per rapporto ad una vita di 90 anni si ha

$$U=\frac{9}{11}\cdot\frac{1}{1{,}05}+\frac{7}{11}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^2}+\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^3}+\frac{4}{11}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^4}+\frac{3}{11}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^5}+$$
$$\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^6}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{(1{,}05)^7}.$$

=

$= 0, 77922 + 0, 57720 + 0, 39265 + 0, 29916 + 0, 21368 + 0{,}13567 + 0, 06460 = 2, 46218^{li.}$.

5. Se l'annua rendita sia di r lire il valore U' della medesima si ha dalla proporzione $1 : r :: \mathrm{U} : \mathrm{U}'$.

Per esempio se U è il valore di una vita di 86 anni, cioè $3, 490612^{li.}$ il valore U' di un'annua rendita di $100^{li.}$ sulla vita stessa si trova $= 349, 061^{li.}$.

La stessa proporzione serve a determinare l'annua rendita r, corrispondente ad un dato valore di U'. Per mezzo dell'equazione (a) si può dunque risolvere il seguente.

Problema. Dato che un capitale effettivo $c (= \mathrm{U}')$ si voglia impiegare a vitalizio sopra una data vita v, qual è l'annua rendita o prestazione che gli compete.

Sia per esempio $\mathrm{U}' = 100^{li.}$; la vita data di 86 anni, e si avrà $1 : r :: 3, 4906 : 100^{li.}$, $r = \frac{1000000}{34906} = 28^{li.}, 648$ (*).

Il Sig. *Moivre* chiama *compimento della vita* quel num. d'anni che manca a' 86: posto $= k$ il compimento rappresenta le respettive probabilità di vivere 1, 2, 3 .... t anni coi n.^{i}

$$\left\{ \frac{k-1}{k}, \frac{k-2}{k}, \frac{k-3}{k} \ldots\ldots \frac{k-t}{k} \right\} \ldots . (b)$$

e ne deduce che il valore della vita il cui compimento è k sia

$$\mathrm{U} = \frac{k-1}{kh} + \frac{k-2}{kh^2} + \frac{k-3}{kh^3} + \ldots . + \frac{k-(k-1)}{kh^{k-1}} = \left(1 - \frac{hu}{k}\right) : (h-1),$$

dove $u = \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^3} \ldots . + \frac{1}{h^k}$.

Questa formola per altro ha il difetto di non essere applicabile ad una vita $> 85^{an.}$, e di essere oltre di ciò del tut-

---

(*) L'equazione $c(1+i)^t = r \left\{ \frac{(1+i)^t - 1}{i} \right\}$ relativa alle rendite certe (Art. IX) non si rende opportuna al calcolo vitalizio con sostituirvi la vita media per t. Deducendone per esempio il valore dell'annua rendita di $1^{li.}$ sulla vita di 90 anni si trova $c (= \mathrm{U}) = 2, 582$, mentre l'equazione ($a$) somministra $\mathrm{U} = 2{,}46218$.

Ricavandone r nell'ipot. di $c = 100^{li.}$ e di $t = 2^{an} \frac{5}{6}$ (valore medio della vita di $90^{an.}$) si ottiene $r = 38, 733^{li.}$, mentre la proporzione $1 : r :: \mathrm{U} : \mathrm{U}'$ dà $r = 40, 614^{li}$.

to fallace: nè poteva essere altrimenti perchè i rapporti (b) non abbastanza corrispondono ai dati della tavola di *Halley*, con cui *Moivre* gli confrontò, perchè la stessa tavola di *Halley* è notabilmente inesatta, e perchè l'ipotesi del *compimento* contiene anch'essa qualche principio d'incertezza e di equivoco.

6. PROBLEMA. Qual è il valore dell'annua rendita di 1$^{li.}$ nell'ipot. che questa si debba pagare finchè coesistono due vite date?

SOLUZIONE. Sieno p', p'', p''' ... le respettive probabilità che la 1.^{a} vita ha di durare per il 1.°, 2.°, 3.° ec. anno: sieno $\varpi', \varpi'', \varpi'''$, ... le simili probabilità respettive della 2.^{a} vita. Le probabilità che le due vite hanno di durare insieme 1, 2, 3, ec. anni sono respettivamente (§. 1. n.° III) $p'\varpi'$, $p'p''\varpi'\varpi''$, $p'p''p'''\varpi'\varpi''\varpi'''$, ec. Dunque il valore cercato è

$$U = \frac{p'\varpi'}{h} + \frac{p'p''\varpi'\varpi''}{h^2} + \frac{p'p''p'''\varpi'\varpi''\varpi'''}{h^3} \text{ ec. . . . . } (c)\ (*).$$

ESEMPIO. Posto $i = 0,05$ le due vite date sieno una di 86 anni l'altra di 90. La serie da sommarsi è

$$\frac{\frac{18}{21}\cdot\frac{9}{11}}{1,05} + \frac{\frac{18}{21}\cdot\frac{15}{18}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{7}{9}}{(1,05)^2} + \frac{\frac{18}{21}\cdot\frac{15}{18}\cdot\frac{13}{15}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{5}{7}}{(1,05)^3} +$$

$$\frac{\frac{18}{21}\cdot\frac{15}{13}\cdot\frac{13}{15}\cdot\frac{11}{13}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{5}}{(1,05)^4} + \frac{\frac{18}{21}\cdot\frac{15}{18}\cdot\frac{13}{15}\cdot\frac{11}{13}\cdot\frac{9^2}{11^2}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}}{(1,05)^5} +$$

$$\frac{\frac{18}{21}\cdot\frac{15}{18}\cdot\frac{13}{15}\cdot\frac{11}{13}\cdot\frac{9^2}{11^2}\cdot\frac{7^2}{9^2}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}{(1,05)^6} +$$

$$\frac{\frac{18}{21}\cdot\frac{15}{18}\cdot\frac{13}{15}\cdot\frac{11}{13}\cdot\frac{9^2}{11^2}\cdot\frac{7^2}{9^2}\cdot\frac{5^2}{7^2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{(1,05)^7} \text{ vale a dire}$$

(*) La soluzione del Sig. *Moivre* è molto più semplice ma guasta per l'influenza di quattro gravi cagioni di errore, e sono: 1.° l'ipotesi che sia $p' = p'' = p'''$ ec., $\varpi' = \varpi'' = \varpi'''$ ec. 2.° l'ipotesi che la serie decrescente (c) sia infinita e però $= \frac{p'\varpi'}{h - p'\varpi'}$: 3.° l'espressione di p', ϖ', calcolata nella supposizione che la probabilità di ciascuna vita sia costante da un anno all'altro, $= a$ per la prima, $= b$ per la seconda: 4.° l'ipotesi che la serie $\frac{a}{sh} + \frac{a^2}{s^2h^2} \ldots\ldots (= p')$, $\frac{b}{sh} + \frac{b^2}{s^2h^2} \ldots\ldots (= \varpi')$, dove s è il numero de'casi possibili, sieno infinite.

$$\frac{54}{7.11(1,05)}+\frac{5}{11(1,05)^2}+\frac{5.13}{11.21(1,05)^3}+\frac{4}{21(1,05)^4}+\frac{3.9}{11.21(1,05)^5}+$$
$$\frac{2.7}{11.21(1,05)^6}+\frac{5}{11.21(1,05)^7}=1,6139\,.$$

La solita proporzione $1 : r :: \mathrm{U} : \mathrm{U}'$ dà uno de' termini r, U'. Supponendo per esempio $\mathrm{U}' = 100^{li.}$ e le due vite date una di 86, l'altra di 90 anni si ha

$$1 : r :: 1,6139 : 100, \text{ cioè } r = \frac{100^{li.}}{1,6139} = 61,961^{li.}\,.$$

7. Problema. Dato il valore di due vite A, B, si dimanda quello di un'annua rendita di $1.^{li.}$ nell'ipotesi che la rendita debba pagarsi finchè una delle vite sussiste.

Soluzione. Sieno a, b le respettive probabilità che le vite A, B hanno di esistere per lo spazio di un anno. Siccome $(1-a)(1-b)$ è (§. 1. n.° II) la probabilità che le vite A, B hanno di cessare in un anno, $1-(1-a)(1-b)$ esprime la probabilità contraria, cioè che non cessino ambedue in un anno. Così se a', b', rappresentano le respettive probabilità che A, B, hanno di durare pel secondo anno, $1-(1-a')(1-b')$ è la probabilità che entrambe non cessino nel secondo anno, ec. Dunque

$$\frac{1}{h}-\frac{(1-a)(1-b)}{h}+\frac{1}{h^2}-\frac{(1-a')(1-b')}{h^2}+\frac{1}{h^3}-\frac{(1-a'')(1-b'')}{h^3}\text{ ec. ossia}$$

$$\frac{a}{h}+\frac{a'}{h^2}+\frac{a''}{h^3}\text{ ec.}+\frac{b}{h}+\frac{b'}{h^2}+\frac{b''}{h^3}\text{ ec.}-\left\{\frac{ab}{h}+\frac{a'b'}{h^2}+\frac{a''b''}{h^3}\text{ ec.}\right\}$$

rappresenta la somma de' valori dell'annua rendita di $1^{li.}$ da pagarsi al termine degli anni 1.°, 2.°, 3.° ec. Essa costituisce per conseguenza il total valore dell'annua rendita suddetta sulla più lunga delle vite A, B, e però si ha l'equazione

$$\mathrm{U}=\frac{a}{h}+\frac{a'}{h^2}+\frac{a''}{h^3}\text{ec.}+\frac{b}{h}+\frac{b'}{h^2}+\frac{b''}{h^3}\text{ec.}-\left(\frac{ab}{h}+\frac{a'b'}{h^2}+\frac{a''b''}{h^3}\text{ec.}\right)\ldots.(d).$$

Introducendo nel calcolo una terza vita C, la cui probabilità di vivere 1, 2, 3 ec. anni sia respettivamente c, c', c'' ec. si trova che il valore dell'annua rendita di $1^{li.}$ sulla più lunga delle vite A, B, C, vien espressa per

$$\frac{a}{h}+\frac{a'}{h^2}+\frac{a''}{h^3}\text{ ec.}+\frac{b}{h}+\frac{b'}{h^2}+\frac{b''}{h^3}\text{ ec.}+\frac{c}{h}+\frac{c'}{h^2}+\frac{c''}{h^3}\text{ ec.}-$$
$$\left\{\frac{ab}{h}+\frac{a'b'}{h^2}+\frac{a''b''}{h^3}\text{ ec.}\right\}-\left\{\frac{ac}{h}+\frac{a'c'}{h^2}+\frac{a''c''}{h^3}\text{ ec.}\right\}-\left\{\frac{bc}{h}+\frac{b'c'}{h^2}+\frac{b''c''}{h^3}\text{ ec.}\right\}+$$
$$\frac{abc}{h}+\frac{a'b'c'}{h^2}+\frac{a''b''c''}{h^3}\text{ ec.}$$

Questa formola c' insegna che qualora il n.° delle vite A, B, C ec. sia n, il valore dell'annua rendita di $1^{li.}$ sulla più lunga di esse equivale alla somma de' valori di tutte le vite, meno la somma de' valori delle vite stesse combinate a due per due, più la somma de' valori delle vite combinate a tre per tre, ec. sino alla combinazione inclusiva de' valori di tutte le vite date.

ESEMPIO. Sia $A = 86$, $B = 90$. Le vite separate valgono respettivamente (§. 4) 3,4906, 2,4622. Le due vite unite valgono (§. antec.) 1,6319. Dunque il valore della vita più lunga è

$$U = 5{,}9528 - 1{,}6319 = 4{,}2209.$$

Dato un capitale U' la determinazione dell'annua rendita dovuta alla più lunga di due vite date si riconduce alla solita proporzione $1 : r :: U : U'$. Sia per esempio $U' = 100^{li.}$, $A = 86^{an.}$, $B = 90^{an.}$, e si avrà

$$1 : r :: 4{,}2209 : 100 \text{ ed } r = \frac{1000000}{42209} = 23^{li.}{,}691.$$

8. PROBLEMA. Tizio ha diritto di succedere a Cajo nel godimento di un'annua rendita. Si dimanda il valore U della successione 1.° nell'ipotesi che Tizio succeda per se e per li suoi eredi: 2.° che succeda per se solo.

SOLUZIONE. Dal valore $\frac{1}{i}$ dell'annua rendita perpetua si tolga il valore u dell'annua rendita dovuta alla vita di Cajo ed $U = \frac{1}{i} - u$ sarà il valore cercato nella prima ipotesi.

Chiamando u' il valore dell'annua rendita dovuta alla vita di Tizio, ed $\overline{uu'}$ il valore delle vite unite di Tizio e di

Cajo, il valore cercato nella seconda ipotesi è manifestamente

$$U = u' - \overline{uu'}\,.$$

Se si avesse un terzo successore, chiamando u'' il valore dell'annua rendita dovuta alla sua vita, il valore della sua espettazione sarebbe nella seconda ipotesi

$$U = u'' - \overline{uu''} - \overline{u'u''} + \overline{uu'u''}$$

e così in seguito.

Supponendo che l'età di Tizio sia di 86 anni, quella di Cajo di 90, la formola $U = u' - \overline{uu'}$ dà

$$U = 3,4906 - 1,6139 = 1,8767\,.$$

ARTICOLO XI.

Supplemento all' Articolo III de' Saggi di Meccanica e di Algebra Trascendente.

§. 1. Per compiere la risoluzione dell' equazioni cubiche aventi una o tutte le risolventi razionali, resta da trovarsi un metodo sufficientemente semplice, per cui, qualunque sia il coefficiente del secondo termine, vengano determinati i criterj da' quali dipende che almeno una risolvente della proposta sia razionale, e per cui si scuopra il valore della risolvente razionale s'ella è unica, di tutte e tre se sono più di una.

Sia $x^3 + lx^2 + mx + n = (x^2 + fx + g)(x + h)$

$$= x^3 + (f + h)x^2 + (g + fh)x + gh = 0\,.$$

Il confronto dà

$$f + h = l\,,\; g + fh = m\,,\; gh = n\,.$$

La prima moltiplicata per f diviene $f^2 + fh = fl$. Da questa si tolga la seconda, e si avrà

$$f^2 - lf = g - m\,,\text{ cioè } f = \frac{l \pm \sqrt{[4(g-m) + l^2]}}{2} \;\ldots\,(\alpha)\,.$$

Affinchè la proposta abbia almeno una risolvente razionale bisogna che fra i divisori di n ve ne sia uno che renda $l^2 - 4m + 4g$ un quadrato positivo μ^2, tale che $l \pm \mu$ sia numero pari, e bisogna che abbiasi

$$\frac{l \pm \mu}{2} + h = l \text{ cioè } 2h \pm \mu = l\,.$$

Se ciò non si verifica le risolventi sono tutte irrazionali; ma qualora le condizioni anzidette rimangano soddisfatte si ha la risolvente razionale $h = \frac{n}{g}$, e si ha il fattore quadratico $x^2 + fx + g$ che comprende le altre due risolventi.

Sia per esempio $x^3 - 5x^2 + 22x + 45 = 0$.

Siccome la risolvente ipotetica h dev'essere negativa altrimenti non può produrre l'evanescenza della proposta, si prendano per g i soli divisori positivi di 45, e siccome

$$25 - 4 \times 22 + 4g \text{ ossia } -63 + 4g$$

è un numero sempre < 0, ancorchè si prenda per g il divisore massimo 15, si concluderà che la proposta non ha veruna risolvente razionale.

Sia $x^3 - 9x^2 - 31x - 60 = 0$.

Omessi i divisori 1, 60, il 1.° perchè troppo piccolo, il 2.° perchè troppo grande, si ponga $g = 2, 3, 4, 5$. La funzione $l^2 - 4m + 4g$, a motivo che $l^2 - 4m = 81 + 124 = 205$, diviene respettivamente

$205 \pm 8 = 213, 197 \}$ n.^{i} non quadrati perchè finiscono in 3, 7.
$205 \pm 12 = 217, 193 \}$ n.^{i} non quadrati per la ragione addotta.
$205 \pm 16 = 221, 189 \}$ n.^{i} non quadrati.
$205 \pm 20 = 225, 186 \}$ n.^{i} il primo de' quali è $= 15^2$.

L'equazione (α) si riduce pertanto a $\frac{-9 \pm 15}{2} = 3, = -12$; e perchè $f = 3$ verifica l'equazione $f + h = l$ che diviene $3 - 12 = -9$, si conclude che si ha $x = 12$ e poi $x^2 + 3x + 5 = 0$.

§. 2. Trattandosi di un'equazione di 4.° grado, il cui 2.° termine sia affetto da un coefficiente non divisibile per 4, giova procedere col seguente metodo.

Pongasi $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = (x^3 + fx^2 + gx + h)(x + i) = 0$, e paragonando la trasformata

$$x^4 + (f + i)x^3 + (g + fi)x^2 + (h + gi)x + hi = 0$$

con la proposta si avrà

$$f+i=p,\ g+fi=q,\ h+gi=r,\ hi=s.$$

Eliminando i dalle prime due si ottiene

$$f=\tfrac{1}{2}\{p\pm\sqrt{(p^2-4q+4g)}\}:$$

ma dalla terza risulta $g=\frac{r-h}{i}$: dunque

$$f=\tfrac{1}{2}\left\{p\pm\sqrt{\left(p^2-4q+4\frac{(r-h)}{i}\right)}\right\}.$$

Si divida s in due fattori reciproci h, i, e quelli che danno

$\frac{r-h}{i}=$ n.° int.°; $p^2-4q+4\frac{(r-h)}{i}=+m^2$, $\frac{p\pm m}{2}=$ n.° int.°,

serviranno alla determinazione della risolvente razionale e del fattore cubico della proposta.

Sia per esempio $x^4-x^3-3x^2-5x-12=0$.
Osservo che qualora esista una risolvente razionale questa non può essere negativa, perchè il 1.° membro dell'equazione

$$x^4-x^3-5x=3x^2+12$$

è minore del 2.° se $x=+1$, ed è maggiore del 2.° se $-x>+1$. Divido pertanto l'ultimo termine 12 in due fattori $-i$, $+h$, e fo $i=-3$, $h=4$. Risulta

$$g=\frac{-5-4}{-3}=3,$$

$$p^2-4q+4\frac{(r-h)}{i}=1+12+12=5^2.$$

$$f=\tfrac{1}{2}(-1+5)=2,$$

e però i fattori cercati sono

$$x^3+2x^2+3x+4,\ x-3.$$

ARTICOLO XII.

Soluzione Analitica de' Problemi spettanti alla Geodesia.

La Geodesia ha per oggetto di risolvere il seguente Problema generale:

PROBLEMA. Data una superficie piana terminata da linee rette, dividerla in m parti che stiano fra loro in una data ragione per mezzo di m linee rette, le quali passino tutte per un dato punto o sieno parallele ad una retta data di posizione.

Per procedere dal semplice al composto noi ci proponiamo di contemplare successivamente il trigono, il trapezio, il rombo, il tetragono, il pentagono, l'esagono ed un poligono qualunque.

PROBLEMA. Dividere un trigono dato BAC (*Fig.* 1) in due parti che stiano come $a' : a''$, 1.° con una retta che passi per un dato punto P; 2.° con una retta parallela ad una retta data (*).

SOLUZIONE. Chiamando s la superficie del trigono dato, s' quella del semmento richiesto EAF si ha

$$s' : s - s' :: a' : a'' \text{ e però } s' = \frac{a's}{a'+a''}.$$

Così tutto si riduce a condurre la retta PEF in guisa, che il semmento EAF risulti $= \frac{a's}{a'+a''}$. Se il semmento EAF dovesse corrispondere ad a'' il suo valore sarebbe $\frac{a''s}{a'+a''}$.

Per P si tiri una parallela al lato CA e sia I il punto in cui essa incontra il lato BA prolungato: indi si abbassino PH, EG, perpendicolari alla retta BAI. Siccome il punto P è determinato quando si conoscono le rette AI, PH (**) pon-

---

(*) In questo e ne' seguenti Problemi può aggiungersi la condizione che il semmento corrispondente ad a' sia da una determinata parte della trasversale.

(**) Il punto P può esser dato in 85 maniere. Sieno PH, PL, PN (*Fig.* 2) respettivamente perpendicolari ai lati BA, AC, BC, e si tirino le rette PA, PB, PC, e due qualunque degli elementi PH, PL, PN, PA, PB, PC, AH, AL, CN, PAC, PBC, PCN, il che dà 66 combinazioni, basteranno a determinare il punto P. Lo stesso si ottiene mediante il semmento AI ed una delle rette PH, PA, o mediante il semmento stesso e l'angolo PAI. Siccome ciò vale per ciascun vertice si hanno 9 combinazioni.

Finalmente se per P si conducono le XX', YY', ZZ', respettivamente parallele ai lati, due de' semmenti AI, AR, AS, CT, CV, bastano per determinare il punto P: ciò produce 10 combinazioni. È poi facile il vedere che gli elementi di una combinazione bastano per determinare quelli di tutte le altre.

Nell'ipotesi da cui siamo partiti il punto P si determina con prendere sulla parallela Y'IY una parte IM di una grandezza arbitraria, poichè tirando la MO perpendicolare ad AI si ha $\text{MO} = \frac{\text{IM}}{\text{sen. BAC}}$ e poi MO : PH : : IM : IP.

gasi AI $= a$, PH $= b$, AF $= x$. La proporzione

$$\text{IF} : \text{AF} \; (: : \text{IP} : \text{AE}) : : \text{PH} : \text{EG}$$

ossia

$$a + x : x : : b : \text{EG} = \frac{bx}{a+x}$$

dà tri. EAF $= \frac{bx^2}{2(a+x)}$: dunque $\frac{bx^2}{2(a+x)} = s'$,

cioè $x^2 - \frac{2s'}{b}x = \frac{2as'}{b}$ ed $x = \frac{1}{b}\left\{ s' + \sqrt{(s'^2 + 2abs')} \right\}$

espressione che non si costruisce perchè giova averne il valore in numeri, che sieno per esempio pertiche, braccia, once, ec.

Se il punto P è in un lato, per esempio nel lato AC, basta fare $a = 0$ e risulta $x = \frac{2s'}{b}$.

Se trovasi dentro al perimetro in P', la solita parallela al lato CA determina il semmento negativo AI' e però convien fare $a < 0$.

Se il punto P fosse nel prolungamento A*f* si troverebbe $b = 0$ ed $x = 0$, che dimostra l'impossibilità del Problema nell'ipotesi che la trasversale debba incontrare il lato AB. Bisogna dunque prendere per incognita un semmento degli altri due lati.

Succede lo stesso se il punto P coincide con uno de' vertici, per esempio col punto A; ma in questo caso basta dividere il lato BC nella ragione data, e condurre la trasversale pel punto di divisione e per A.

Passando alla seconda parte in cui la trasversale vuolsi parallela ad una retta data, suppongasi primieramente che la retta sia uno de' lati, per esempio BC (*Fig.* 3).

Sia E il punto cercato, facciasi AE $= x$, AB $= a$, e siccome

$$\text{tri. EAF} : \text{tri. BAC} : : x^2 : a^2$$

si avrà $x^2 : a^2 : : a' : a' + a''$ ed $x = a\sqrt{\frac{a'}{a' + a''}}$.

Se la retta data è AK (*Fig.* 4) si tiri la trasversale CD ad essa parallela; indi si determini la ragione de' trigoni DAC, BDC, il che può sempre ottenersi, perchè oltre l'angolo DAC ed il lato AC si ha ACD = CAK, angolo noto a motivo che AK è data di posizione. Se l'anzidetta ragione, che indichiamo per $a' : a''$, è maggiore di $\alpha' : \alpha''$ s'istituisca l'analogia

$$\text{tri. DAC} - \delta : \text{tri. BDC} + \delta :: \alpha' : \alpha'',$$

si deduca $$\delta = \frac{\alpha'' \,\text{tri. DAC} - \alpha' \,\text{tri. BDC}}{\alpha' + \alpha''}$$

e si divida (Probl. prec.) il trigono DAC con una retta EF parallela a CD in due parti che stiano come $\delta : \text{tri. DAC} - \delta$.

Parleremo della divisione in m parti quando avremo trattato della maniera di spartire un tetragono.

PROBLEMA II. Dividere un trapezio ed un rombo dato in due parti che stiano come α', α'' 1.° con una retta che passi per un dato punto; 2.° con una retta parallela ad una retta data.

SOLUZIONE. La prima parte del Problema esige che si considerino separatamente due ipotesi cioè 1.° che attesa la posizione del dato punto, il lato incontrato in primo luogo dalla trasversale richiesta sia uno de' lati paralleli, 2.° che sia uno de' lati convergenti.

Essendo (*Fig.* 5) AD, BC lati paralleli si supponga PEF la trasversale e sia L il punto in cui taglia il lato AB prolungato. Per P si tiri una parallela ad AD e sia I il punto nel quale incontra il lato BA prolungato: dai punti P, E, F si conducano PH, EG, FM, perpendicolari ad LBAI, e pongasi $\text{AI} = a$, $\text{PH} = b$, $\text{AB} = \alpha$, $\text{BL} = x$. Sostituendo $\alpha + x$ per x nella espressione di EG (Prob. I) si ha

$$\text{tri. AEL} = \frac{b(\alpha + x)^2}{2(a + \alpha + x)}.$$

La proporzione IL : LB :: PH : FM dà $\text{FM} = \dfrac{bx}{a + \alpha + x}$. Dunque

$$\text{tri. BFL} = \frac{bx^2}{2(a + \alpha + x)}.$$

La superficie richiesta AEFB è per conseguenza $= \dfrac{b(\alpha^2 + 2\alpha x)}{2(a + \alpha + x)}$.

La stessa superficie si è trovata (Prob. I) $= \frac{\alpha' s}{\alpha' + \alpha''} \; (= s')$.

Dunque

$$\frac{b(\alpha^2 + 2\alpha x)}{2(a + \alpha + x)} = s' \; \ldots . (1); \; x = \frac{\alpha^2 b - 2(a + \alpha)s'}{2(s' - ab)} \; \ldots . (\mathrm{I})$$

formola che mutando i segni corrisponde all'ipot. che il lato AB e la trasversale convergano dalla parte opposta come nella fig. 6.

Infatti supponendo AI $= a$, PH $= b$, AB $= \alpha$, BL $= x$, il metodo precedente dà

$$x = \frac{2(a + \alpha)s' - \alpha^2 b}{2(s' - ab)}.$$

Quando $x = \infty$, cioè quando $s' = \alpha b$, la trasversale è parallela ad AB e viceversa.

Se il lato CD si rivolge intorno al punto C finchè divenga parallelo ad AB il metodo precedente è ugualmente applicabile. Difatto il rombo non è altro che un caso particolare del trapezio come questi è un caso particolare del tetragono. Dunque la formola (I) serve anche alla divisione del rombo.

Se il punto P è nel lato AD basta fare $a = 0$; se dentro al perimetro $a < 0$. Nel primo di questi casi evvi però la maniera di ottenere direttamente una più semplice espressione d'x tanto pel trapezio che pel rombo.

Sia (*Fig.* 6) AE $= a$, BC $= \beta$, AD $= \gamma$, BF $= x$ e la distanza de' lati BC, AD, $= h$. Si ha

$$\tfrac{1}{2} h(\beta + \gamma) : \tfrac{1}{2} h(a + x) :: \alpha' + \alpha'' : \alpha'$$

e però $x = \frac{\alpha'(\beta + \gamma) - a(\alpha' + \alpha'')}{\alpha' + \alpha''}$.

Se il trapezio degenera in rombo è $\gamma = \beta$ e si ha

$$x = \frac{2\alpha'\beta - a(\alpha' + \alpha'')}{\alpha' + \alpha''}.$$

Si danno de' casi che non restano compresi nella formola (I) e sono quelli in cui il punto dato cade nel prolungamento AL del lato AB. Infatti si ha $b = 0$ e l'equazione (1) si riduce a $0 = s'$; il che dimostra incompatibile l'ipotesi da cui siamo partiti, cioè che l'incognita x rappresenti un semmento del lato AB o del suo prolungamento. Facendo $= x$ il semmento di un altro lato l'incompatibilità sparisce, e si trova x sotto una nuova forma. Per vederlo sia il punto P in I (*Fig.* 7) e posta la $BF = x$ si conducano le solite perpendicolari EG, FM. Siccome $FM = x$ sen. B ed

$$IA\,(=a) : EG :: IB\,(=a+x) : FM\,(=x\ \text{sen.}\,B)$$

si ha

$$\text{tetr.}\,AEFB\,(=\text{tri.}\,IFB - \text{tri.}\,IEA) = \tfrac{1}{2}\left[(a+\alpha)\,x\ \text{sen.}\,B - \frac{a^2 x\ \text{sen.}\,B}{a+\alpha}\right]$$

ma tetr. $AEFB = s'$: dunque

$$x\ \text{sen.}\,B\,[(a+\alpha)^2 - a^2] = 2\,(a+\alpha)\,s'$$

e però
$$x = \frac{1}{\text{sen.}\,B}\cdot\frac{2\,(a+\alpha)\,s'}{2a\alpha+\alpha^2};$$

formola che quando $a = 0$ si riduce ad

$$x = \frac{2s'}{\alpha\ \text{sen.}\,B} = \frac{1}{\text{sen.}\,B}\cdot\frac{\alpha'\,(\beta+\gamma)\,h}{\alpha\,(\alpha'+\alpha'')}.$$

Se il trapezio degenera in rombo h equivale ad α sen. B, è $\gamma = \beta$ e si ha
$$x = \frac{2\alpha'\beta}{\alpha'+\alpha''}.$$

Nella seconda ipotesi in cui il lato incontrato in primo luogo è uno de' convergenti (*Fig.* 8) si prolunghino i lati CB, DA finchè s'incontrino in G, si determini la superficie Δ del trigono AGB che è $= AB^2\,\frac{\text{sen.}\,A\ \text{sen.}\,B}{2\,\text{sen.}\,G}$, e siccome AEFB $= \frac{\alpha' s}{\alpha'+\alpha''}$, altro non resta che dividere il trigono CGD con una trasversale che passi per P, in due parti che stiano come

$$\Delta + \frac{\alpha' s}{\alpha'+\alpha''} : s - \frac{\alpha' s}{\alpha'+\alpha''}$$

ossia come
$$\alpha'\,(\Delta + s) + \alpha''\Delta : \alpha'' s.$$

Per risolvere la seconda parte del Problema suppongasi 1.° che la trasversale debba essere parallela ad uno de' lati convergenti, per esempio ad AB (*Fig.* 9).

Condotta AH perpendicolare ai lati paralleli si faccia AH$=h$ e si prenda sul lato contiguo BC il semmento BF$=\frac{\alpha' s}{h(\alpha'+\alpha'')}$; indi si tiri EF parallela ad AB, ed il rombo ABFE sarà uno de' semmenti richiesti.

Si supponga 2.° che la trasversale vogliasi parallela ai lati paralleli. Prolungati (*Fig.* 10) i lati convergenti finchè s' incontrino in L si cali sul lato BC la perpendicolare LG che tagli in I il lato AD, si ponga BC $=\gamma$, AD $=\beta$, AH, distanza de' lati paralleli, $=h$, e mediante la proporzione LI : LI $+h$: : β : γ si deduca

$$\mathrm{LI}=\frac{\beta h}{\gamma-\beta}.$$

Facciasi AE$=x$, si tiri EF parallela a BC, e siccome risulta A$h=x$ sen. B la proporzione LI : LI + Il : : β : EF, ossia

$$\frac{\beta h}{\gamma-\beta} : \frac{\beta h}{\gamma-\beta}+x \text{ sen. B} :: \beta : \text{EF}$$

dà
$$\text{EF}=\frac{\beta h+x(\gamma-\beta)\text{ sen. B}}{h}.$$

Quindi trap. ADFE$=\frac{x \text{ sen. B}}{2h}\left\{2\beta h+x(\gamma-\beta)\text{ sen. B}\right\}$.

Ma si sa che questa espressione dev' essere $=s'$. Dunque l'equazione del Problema è

$$x^2+\frac{2\beta h}{(\gamma-\beta)\text{ sen. B}}\,.\,x=\frac{2hs'}{(\gamma-\beta)\text{ sen.}^2\text{ B}}$$

e dà
$$x=\frac{1}{(\gamma-\beta)\text{ sen. B}}\left\{-\beta h+\sqrt{[2hs'(\gamma-\beta)+\beta^2h^2]}\right\}.$$

Suppongasi 3.° che la trasversale debba essere parallela ad una retta DG (*Fig.* 11) data di posizione.

Condotta la diagonale AC si determini la superficie del trigono ACD, indi si cerchi la superficie δ che gli si dee togliere o aggiungere affinchè sia

$$\text{tri. BCD}\mp\delta : \text{tri. ABD}\pm\delta :: \alpha' : \alpha''.$$

Trovato δ tutto si riduce a dividere (Probl. I) in una ragione data uno de' trigoni ACD, ABC, con una trasversale parallela ad una retta DG data di posizione.

Quando avremo trattato dello spartimento del tetragono ci occuperemo della divisione di un trapezio e di un rombo dato in un numero di parti > 2.

PROBLEMA III. Dividere un tetragono dato in due parti che stiano come α', α'', 1.° con una trasversale che passi per un dato punto; 2.° con una trasversale parallela ad una retta data di posizione.

Soluzione. Immaginando i lati AD, BC (*Fig.* 12) prolungati finchè s'incontrino in G si determini la superficie Δ del trigono CGD. Siccome si sa che uno de' semmenti richiesti, per esempio CDEF è $= \frac{\alpha' s}{\alpha'+\alpha''}$ non si ha che da dividere il trigono cognito AGB con una trasversale che passi per P, in due parti che stiano nella ragione di

$$\Delta + \frac{\alpha' s}{\alpha'+\alpha''} : s - \frac{\alpha' s}{\alpha'+\alpha''}.$$

La soluzione si riconduce sempre al Prob. I qualunque sia la posizione del punto P.

Volendo che la trasversale sia parallela ad una retta BH data di posizione (*Fig.* 12) si conduca la diagonale AC, si calcoli l'aja Δ del trigono ACD, e se la ragione $\Delta : s - \Delta$ è $> \alpha' : \alpha''$, mediante la proporzione

$$\Delta + \delta : s - \Delta - \delta :: \alpha' : \alpha''$$

si calcoli δ e si divida il trigono ABC con una parallela a BH in due parti che stiano come $\delta : s - \Delta - \delta$, avvertendo che il semmento δ cada fra la trasversale ed AC.

Se il tetragono si vuol dividere in tre parti che stiano come α', α'', α''', si divida in due che stiano come uno de' numeri α', α'', α''', alla somma degli altri due, per esempio come α' ad $\alpha''+\alpha'''$; poi si divida il tetragono che corrisponde ad $\alpha''+\alpha'''$ in due parti che stiano come α'', α'''. Si procede nella stessa guisa se il numero delle parti debba esser maggiore.

Sapendo dividere un tetragono in un numero di parti >2, una simile divisione di un trapezio, di un rombo e di un trigono non soggiace a difficoltà.

Problema IV. Dividere come sopra un pentagono, un esagono, un ettagono ed un poligono qualunque in due parti che stiano come a', a''.

Soluzione. Sia il pentagono ABCDE (*Fig.* 13). Avendo prolungati i lati convergenti EA, CB, finchè s' incontrino in H, ed i lati convergenti BC, ED, finchè s' incontrino in I (*) si determini la superficie Δ, Δ', de' respettivi trigoni ABH, DCI; e fissato che sia il semmento ABGF $= \frac{a's}{a'+a''}$, si divida il trigono cognito IHE con una trasversale PFG condotta pel dato punto P, in due parti che stiano nella ragione di

$$\Delta + \frac{a's}{a'+a''} : \frac{a''s}{a'+a''} + \Delta' .$$

Trattandosi di un esagono ABCDEF (*Fig.* 14) si tirino le diagonali AC, FD, e si calcoli la superficie de' trigoni ABC, DEF. Dal semmento AGHCB $= \frac{a's}{a'+a''}$ si tolga il trigono ABC $= \Delta$; dal semmento FGHDEF $= \frac{a''s}{a'+a''}$ si tolga il trigono DEF $= \Delta'$, e non si tratterà che di condurre pel dato punto P una trasversale PGH, la quale divida il tetragono cognito ACDF in due parti che stiano nella ragione di

$$\frac{a's}{a'+a''} - \Delta : \frac{a''s}{a'+a''} - \Delta' .$$

Qualora siavi ragione di sospettare che la trasversale non incontri il lato CD si prolunghino sino all' intersezione i lati CB, DE, AF; si calcoli la superficie de' trigoni ABL, EFI, come pure quella de' richiesti semmenti s', s'' dell' esagono, e si spartisca il tetragono CLID in due parti che stiano come trig. ABL $+ s'$: trig. EFI $+ s''$.

Volendo la trasversale parallela alla DH (*Fig.* 15) data di posizione si tiri la diagonale AC, si determini la superfi-

---

(*) Si otterrebbe lo stesso se invece si prolungassero i lati BC, ED, sino alla loro intersezione.

cie Δ del trigono ABC, e chiamando s la superficie del pentagono, se la ragione $\Delta : s - \Delta$ è $> \alpha' : \alpha''$ dicasi δ la superficie che deesi aggiungere a Δ; dalla proporzione

$$\Delta + \delta : s - \Delta - \delta :: \alpha' : \alpha'' \ldots . (2)$$

si deduca $\delta = \frac{\alpha' s - \Delta(\alpha' + \alpha'')}{\alpha' + \alpha''} = \frac{\alpha' s}{\alpha' + \alpha''} - \Delta$;

quindi pel Probl. III si divida il tetragono ACDE con una trasversale parallela alla retta data, nella ragione di

$$\frac{\alpha' s}{\alpha' + \alpha''} - \Delta : s - \frac{\alpha' s}{\alpha' + \alpha''} \text{ ossia } \alpha' s - (\alpha' + \alpha'')\Delta : \alpha'' s .$$

Se $\Delta : s - \Delta$ fosse $> \alpha' : \alpha''$ basterebbe dividere con una parallela a DH il trigono ABC nella ragione di $\Delta - \delta : \delta$. Nell'uno e nell'altro caso la superficie δ dee trovarsi fra la trasversale e la diagonale AC.

Se si tratta di un esagono si conduca una diagonale per esempio BD (*Fig.* 16) si determini la superficie del trigono BCD, e siccome si conosce la superficie $s - \Delta$ del pentagono ABDEF, non resta che dividerlo con una trasversale parallela ad AG, in due parti che stiano come $\delta : s - \Delta - \delta$, dove δ si suppone trovata mediante la proporzione (2).

Abbiasi finalmente un ettagono ABCDEFG (*Fig.* 17). Il punto dato essendo P si tiri la diagonale AF e si calcoli la superficie di AFG: si prolunghino i lati CD, FE, finchè s' incontrino in H e si calcoli la superficie del trigono DHE.

Posto che il semmento espresso per $\frac{\alpha' s}{\alpha' + \alpha''}$ debba essere IAGFL si divida il pentagono AFHCB in due parti che stiano come $\frac{\alpha' s}{\alpha' + \alpha''} - \Delta : \frac{\alpha'' s}{\alpha' + \alpha''} + \Delta'$ e si avrà ec.

Si procede in una maniera del tutto simile se il poligono dato abbia un maggior numero di angoli.

Per non trascurare il caso che la superficie proposta presenti qualche angolo rientrante, sia l'esagono ABCDEF (*Fig.* 18) coll'angolo rientrante D.

Si prolunghi il lato ED finchè incontri in I il lato AB e si calcoli la superficie Δ del tetragono BCDI . Pel dato punto P si conduca la retta PGH perpendicolare ad AF, che incontri AF in G, DE in H . Trovati con la misura o con le formole della Tetragonometria i lati BI, DI del tetragono BCDI si conoscono i lati AG, AI ($=$ AB $-$ IB) e gli angoli del tetragono AGHI; in conseguenza si possono calcolare i lati GH, IH e la superficie, e lo stesso può farsi per rapporto al tetragono EFGH . Sieno s', s'' le respettive superficie de' tetragoni AGHI, EFGH . Posto che la ragione di $s' + \Delta : s''$ sia $> \alpha' : \alpha''$ dicasi

$$s' + \Delta - \delta : s'' + \delta :: \alpha' : \alpha'';$$

si deduca $$\delta = \frac{\alpha'' s' - \alpha' s'' + \alpha'' \Delta}{\alpha' + \alpha''}$$

e non si avrà che da dividere il tetragono AGHI in due parti con una trasversale PML tale, che risulti GHLM $= \delta$.

Sia per ultimo il seguente Problema riputato dagli Agrimensori assai difficile e non solubile che per tentativo.

Problema . È dato il campo ABCDEF (*Fig*. 19) ed in esso è compresa la parte infruttifera AOQE . Si vuol dividere la parte fruttifera con due trasversali che passino per un dato punto P in tre porzioni che stiano come α', α'', α''', ed a ciascuna si vuole unire una simile porzione del terreno infruttifero .

Soluzione . Dicansi s', s'', s''' i richiesti semmenti del terreno fruttifero, la cui superficie s si suppone cognita, s'istituiscano le proporzioni

$$s' : s - s' :: \alpha' : \alpha'' + \alpha'''; \; s'' : s - s'' :: \alpha'' : \alpha' + \alpha'''; \; s''' : s - s''' :: \alpha''' : \alpha' + \alpha''$$

e si deduca $s' = \dfrac{\alpha' s}{\alpha' + \alpha'' + \alpha'''}$, $s'' = \dfrac{\alpha'' s}{\alpha' + \alpha'' + \alpha'''}$, $s''' = \dfrac{\alpha''' s}{\alpha' + \alpha'' + \alpha'''}$.

Ciò posto si misuri la diagonale CQ e la superficie $s_{,}$ del pentagono CBAOQ; questo si divida con la trasversale PMG in due parti ABMG, GMCQ, la prima delle quali sia $= s'$ ed il Problema sarà ridotto a dividere la figura CDEQOGM in due parti che stiano come α'', α'''. Si prolunghi il lato QO finchè incontri la PMG in a, si tiri la diagonale CE, si misuri la superficie Δ del trigono CDE, si divida il pentagono CEQaM in due parti, la prima delle quali verso s' sia $=s''$, l'altra $=s'''-\Delta$, ed il terreno fruttifero sarà diviso a tenore della condizione assegnata. Pel punto H già determinato si tiri una trasversale che divida il pentagono AOQEF in due parti, una delle quali EFIH stia a tutto il pentagono come $\alpha''' : \alpha'+\alpha''$: pel punto G si tiri la GL che divida il pentagono AIHQO in due parti AILG, GLHQO, che stiano come α', α'', e le superficie MBAILG, MGLHRHN, NHIFEDC, daranno lo spartimento richiesto, purchè nella definitiva demarcazione, mediante un opportuno e quasi insensibile spostamento della retta NH, si spartisca fra i due ultimi possidenti, nella solita ragione respettiva di α', α'', α''', la piccolissima superficie aOG ch'è rimasta indivisa.

Fig. II

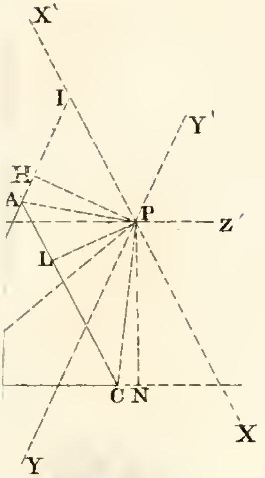
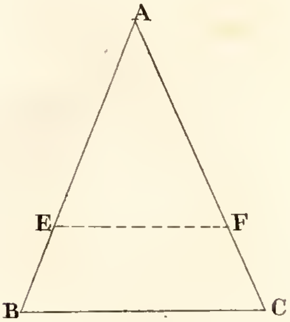

X'
I
Y'
H
A
P
Z'
L
C
N
X
Y

Fig. III



V

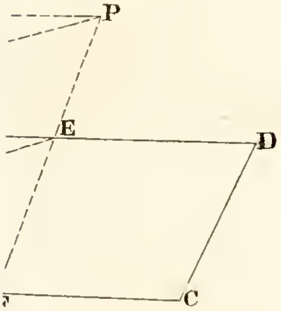


Fig. VI

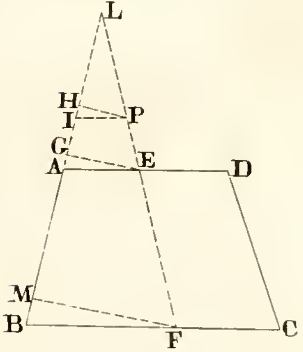

L
H
I
P
G
A
E
D
M
B
F
C

Fig. VIII

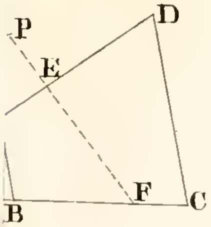


Fig. IX

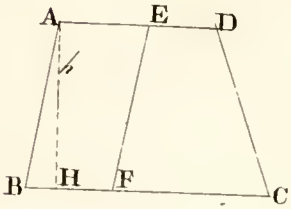


Fig. I

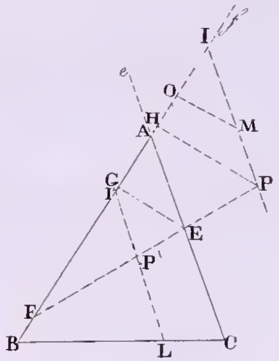

I
f
e
O
H
A
M
G
I
P
E
P'
F
B
L
C

Fig. II

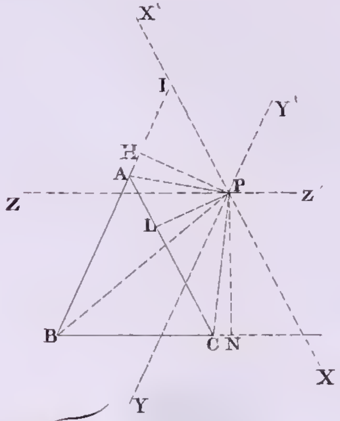

X'
I
Y'
H
A
P
Z
Z'
L
B
C
N
X
Y

Fig. III

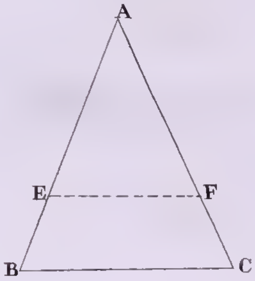


Fig. IV

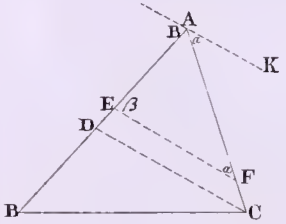

A
B
a
K
E
β
D
a
F
B
C

Fig. V

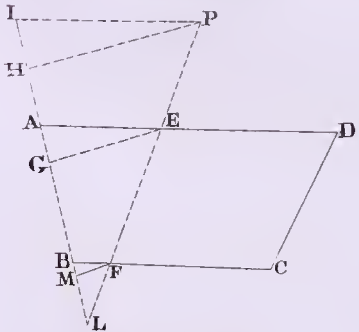

I
P
H
A
E
D
G
B
M
F
C
L

Fig. VI

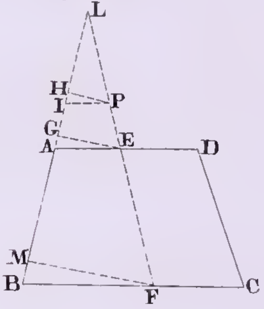

L
H
I
P
G
A
E
D
M
B
F
C

Fig. VII

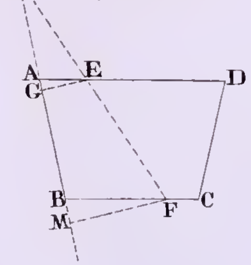


Fig. VIII

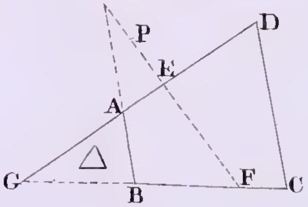


Fig. IX

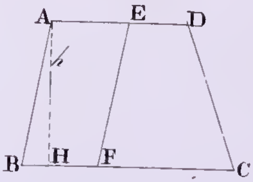


Fig. XI

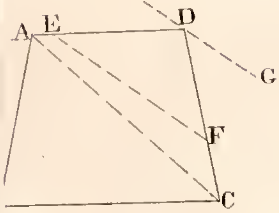


Fig. XII

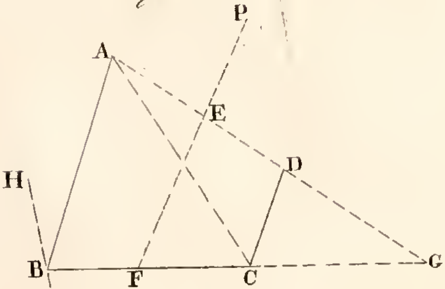


Fig. XIV

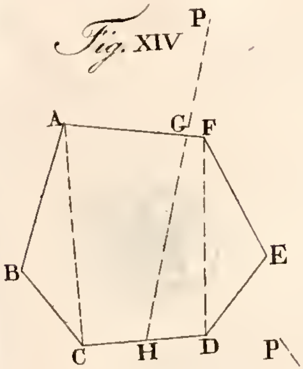


Fig. XV

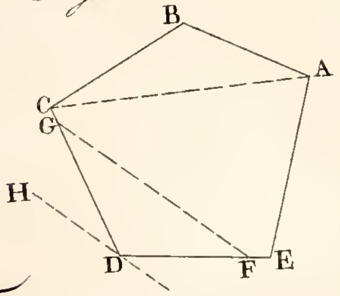


Fig. XVII

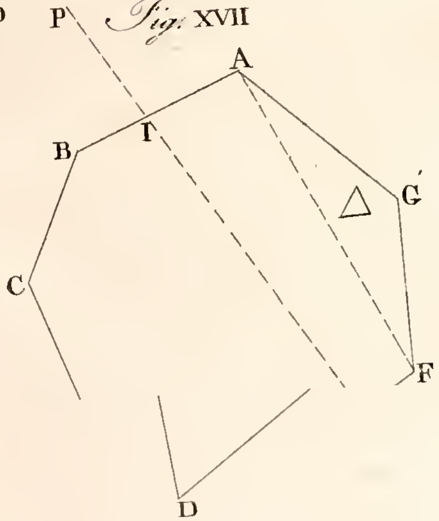


Fig. X

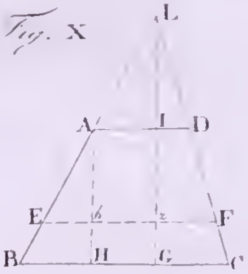

L
A
I
D
E
b
z
F
B
H
G
C

Fig. XI

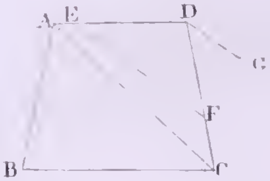


Fig. XII

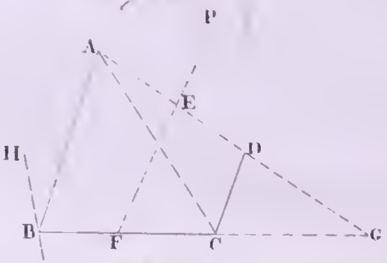


Fig. XIII

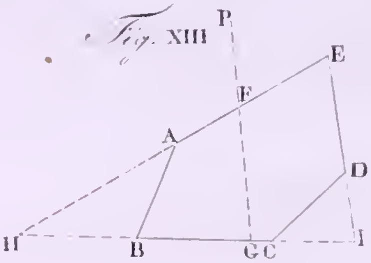

P
E
F
A
D
H
B
G
C
I

Fig. XIV

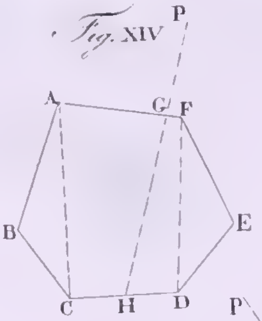


Fig. XV

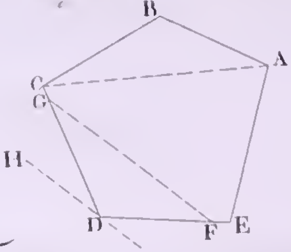


Fig. XVI

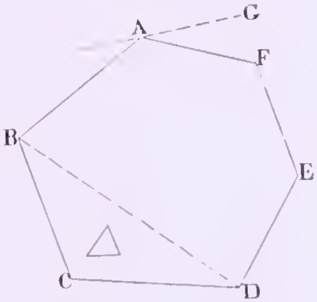


Fig. XVII

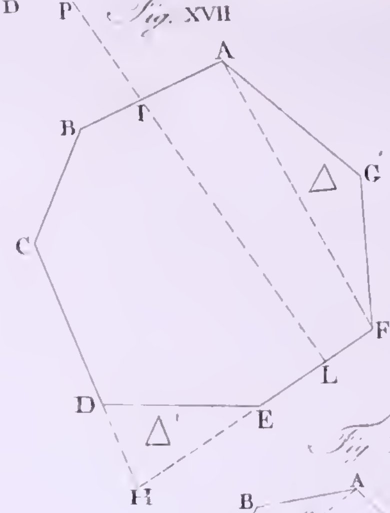

P
A
B
I
△
G
C
F
L
D
E
△'
H

Fig. XVIII

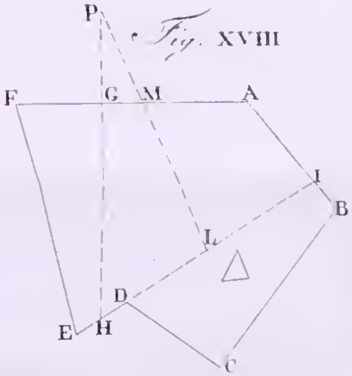
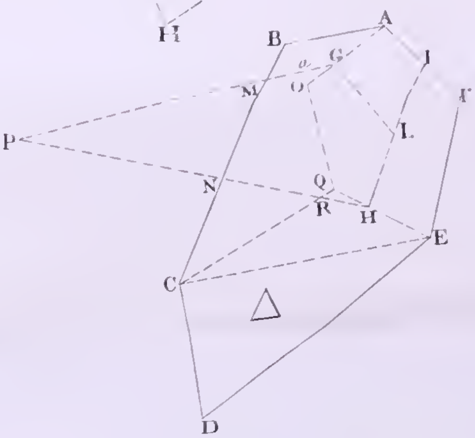

P
F
G
M
A
I
B
L
△
D
E
H
C

Fig. XIX


A
B
G
I
o
M
O
F
L
P
N
Q
R
H
E
C
△
D

CALCOLO D' OCCULTAZIONI DI ALCUNE STELLE E RELATIVE RICERCHE INTORNO ALLA POSIZIONE GEOGRAFICA IN LONGITUDINE DELL' OSSERVATORIO DI PADOVA RISPETTO AL MERIDIANO DI PARIGI.

MEMORIA

Dell' Abate Francesco Bertirossi-Busata

Presentata li 6 Dicembre 1814 dal Cav. Cesaris ed approvata dal Socio Sig. Santini.

La determinazione della Longitudine e Latitudine del luogo in cui si osserva è uno degli oggetti più interessanti per l'Astronomo, giacchè è sopra di questa base principalmente ch'egli deve lavorare alla perfezione della scienza. La correzione delle Tavole Astronomiche di cui egli abbisogna incessantemente, è un altro oggetto del pari interessante ed importantissimo. Questi due oggetti o, a dir meglio, Problemi restano soddisfatti mirabilmente (per quanto spetta alla posizione in longitudine ed alla correzione delle Tavole Lunari) dalle occultazioni delle fisse. Eccitato da questo doppio scopo intrapresi a calcolarne alcune osservate qui in Padova dalli Signori Professori *Chiminello*, *Santini*, e da me. Dopo di ciò ho calcolato pure le osservazioni medesime per altri paesi. Ho scelto fra le altre quelle cui avevo più di fiducia e per l'esatta determinazione del tempo, e per la bontà delle osservazioni. Ho cominciato dalle Plejadi che furono osservate nella notte dei 7 Febbrajo 1805 dal sopracitato Sig. *Chiminello* e da me; e sebbene intorno alla precisione di queste vi possa esser qualche piccolo dubbio, giacchè la posizione della Luna era in quella circostanza molto incomoda per noi, e d'altro canto, essendo di già passata la prima quadratura, mandava una luce assai forte e copiosa, cosa che noceva non poco all'osservazione di Stelle molto minute quali esse sono; tuttavia non riscontrando nel calcolo degli errori grandi a segno di renderle trascurabili affatto ed incerte, ho creduto bene di tenerne conto e di trascriverle coll'ordine stesso con cui sono state osservate. Il numero delle occultazioni da me calcolate non è in vero gran fatto considerabile, ma spero che si accrescerà in avvenire, ed avrò così l'occasione di potermi prestare a queste ricerche con una maggior suppellettile di osservazioni e di confronti, e di assicurarmi in tal guisa assai meglio della posizione in longitudine della nostra Specola e dell'esattezza delle Tavole Lunari pubblicate sino al giorno presente; e ciò con maggiore sicurezza in quanto che la suddetta Specola trovasi ora arricchita d'un eccellente stromento dei passaggi, opera del ch. Sig. *Reichenbach*, con cui possiamo determinare con precisione i tempi dei celesti Fenomeni. Quanto al metodo di cui mi sono servito nel calcolo delle occultazioni seguenti egli è puramente analitico. Le formole per ottenere la parallasse lunare in longitudine e latitudine sono quelle pubblicate dal Professore *Santini* nella sua Memoria stampata nel 1807 presso il Seminario. I luoghi di Luna sono stati da me calcolati sulle Tavole del Sig. *Bürg* pubblicate nel 1806 dal Bureau delle Longitudini di Francia, e su quelle del Sig. *Burckhardt* recentemente uscite alla luce, cioè nel 1812. Per ciò che riguarda alla posizione media delle Stelle, io l'ho presa dal grande Catalogo del Professor Piazzi facendovi le correzioni indicate dall'Autore medesimo nel Libro VI del Reale Osservatorio di Palermo. Ciò premesso, chiamisi

ϑ l'Ascensione retta del mezzo del cielo.

ω l'obliquità apparente dell'Eclittica.

φ la latitudine dell'Osservatorio diminuita dell'angolo della verticale.

ϖ la parallasse orizzontale dell'Osservatore.

g la longitudine del Nonagesimo.

h la sua distanza al Zenit.

P la parallasse della Luna in longitudine .

P' quella di latitudine .

Δ il Semidiametro orizzontale della Luna .

α la longitudine vera della Luna .

β la latitudine vera .

a la longitudine apparente della Stella occultata .

b la sua latitudine .

α' e β' la longitudine e latitudine apparenti della Luna .

Δ' il semidiametro d'altezza al momento dell'immersione .

Δ'' lo stesso semidiametro nell'istante dell'emersione .

α'' e β'' l'apparente longitudine e latitudine lunare per quel medesimo istante ; e siano finalmente

s, ed s' le distanze corrispondenti dei centri per i due momenti suddetti .

Per le note fondamentali Dottrine dell'Astronomia avremo ;

$$\text{I.}^{\circ} \quad \text{tang.}\, g = \frac{\text{sen.}\,\omega\,.\,\text{sen.}\,\varphi + \cos.\,\omega\,.\cos.\,\varphi\,.\,\text{sen.}\,\vartheta}{\cos.\,\varphi\,.\cos.\,\vartheta}$$

$$\text{II.}^{\circ} \quad \text{sen.}\,h = \text{sen.}\,\varphi\,.\cos.\,\omega - \text{sen.}\,\omega\,.\cos.\,\varphi\,.\,\text{sen.}\,\vartheta$$

$$\text{III.}^{\circ} \quad \cos.\,g = \frac{\cos.\,\varphi\,.\cos.\,\vartheta}{\cos.\,h}\,.$$

E per le formole del Sig. *Santini*

$$\text{P} = \frac{\text{sen.}\,\varpi\,.\cos.\,h\,.\,\text{sen.}\,(\alpha - g)}{\cos.\,\beta\,.\,\text{sen.}\,1''} + \left(\frac{\text{sen.}\,\varpi\,.\cos.\,h}{\cos.\,\beta}\right)^2 . \frac{\text{sen.}\,2\,(\alpha - g)}{\text{sen.}\,2''} + \text{ec.}$$

formola di sufficiente esattezza trascurando eziandio le terze potenze .

Facciasi ora

$s_{,} = \text{sen.}\,\varpi\,[\,\text{sen.}\,h\,.\,\text{sen.}\,\beta + \cos.\,h\,.\cos.\,\beta\,.\cos.\,(\alpha - g)\,]$, avremo

$$\text{P}' = \frac{\text{sen.}\,\varpi\,.\,\text{sen.}\,h\,(1 + s_{,})}{\cos.\,\beta\,.\,\text{sen.}\,1''} - \frac{s_{,}\,.\,\text{sen.}\,\beta}{\cos.\,\beta\,.\,\text{sen.}\,1''},$$

e il semidiametro aumentato, ossia $\Delta' = \Delta\,(\,1 + s_{,}\,)$

sarà poi $\alpha' = \alpha + \text{P}$

$$\beta' = \beta - \text{P}'$$

ed $s = \sqrt{(a - \alpha')^2 . \cos.\,\beta'^2 + (\beta' - b)^2}$

e per l'emersione similmente dopo di aver operato come sopra

$$\alpha'' = \alpha + \text{P}$$

$$\beta'' = \beta - P'$$

$$s' = \sqrt{(\alpha'' - a)^2 . \cos.^2 \beta'' + (\beta'' - b)^2} .$$

Se le Tavole sono esatte dovrà essere $s = \Delta'$, ed $s' = \Delta''$. In caso diverso sia $\Delta' = s + ds$, e $\Delta'' = s' + ds'$, e sia la longitudine vera della Luna $= \alpha + d\alpha$, e la latitudine $= \beta + d\beta$. Differenziando le due superiori equazioni, e trascurando il termine che nascerebbe dalla differenziazione di $\cos.^2 \beta'$ il qual diventa presso che zero, avremo

$$s . ds = -(a - \alpha') . \cos.^2 \beta' . d\alpha + (\beta' - b)\, d\beta$$

$$s' . ds' = (\alpha'' - a) . \cos.^2 \beta'' . d\alpha + (\beta'' - b)\, d\beta$$

dalle quali si otterranno i valori di $d\alpha$, e di $d\beta$ d'applicarsi convenevolmente alla longitudine e latitudine lunare. Per trovare le distanze apparenti dei centri, piuttosto che risolvere le due equazioni $s = \sqrt{(a - \alpha')^2 . \cos.^2 \beta' + (\beta' - b)^2}$, ec., ec., le quali non sono molto comode pel calcolo logaritmico, ho amato meglio di cercare prima uno degli angoli del triangoletto rettangolo formato dai lati s, $(a - \alpha')$, e $(\beta' - b)$. Chiamando u quest'angolo, si ha per la Trigonometria

$$\text{tang.}\, u = \frac{(a - \alpha') . \cos. \beta'}{(\beta' - b)} \text{ ed in seguito } s = \frac{(\beta' - b)}{\cos. u} .$$

Seguono i Calcoli.

TAVOLE DI BURCKHARDT.

Calcolo dell' Occultazione di Elettra osservata in Padova nella notte dei 7 Febbrajo 1805.

Immersione $= 5^h. 31'. 2'', 2$ tempo medio.
$2 . 40 . 22, 1$ tempo sidereo.
$\vartheta = 40°. 5'. 33''$
$\alpha = 56 . 21 . 59, 8$
$\beta = 4 . 30 . 25, 6$ Bor.
$a = 56 . 41 . 50, 2$
$b = 4 . 10 . 15, 5$ Bor.

$g = 52 . 21 . 30$
$h = 28 . 3$
Log. sen. $\varpi = 8 . 23541$
$\Delta = 16' . 8'', 2$
$P = 3 . 42 , 4$
$P' = 24 . 2 , 9$
$\Delta' = 16 . 24 , 9$
$\alpha' = 56^\circ . 25' . 42'', 2$
$\beta' = 4 . 6 . 22 , 7$
$(a - \alpha') = 968'', 0$
$(\beta' - b) = - 232'', 8$
$s = 993'', 0$
$ds = - 8 , 1$

Dalla prima equazione $s . ds = -(a - \alpha') . \cos.^2 \beta . d\alpha + (\beta' - b) d\beta$ facendovi $d\beta = 0$, ottiensi $d\alpha = 8'', 4$, e quindi α corretta $= 56^\circ . 22', 8'', 2$. Distanza dalla congiunzione in gradi $= 0^\circ . 19' . 42'', 0$. Moto orario in longitudine $= 35' . 25''$; e quindi distanza dalla congiunzione in tempo $= 0^h . 33' . 21'', 5$, e perciò l'istante della congiunzione per Padova $= 6^h . 4' . 33'', 7$ tempo medio.

Calcolo dell' Occultazione di Merope osservata in Padova nella notte dei 7 Febbrajo 1805.

Immersione $= 6^h . 21' . 44'', 7$ tempo medio.
$3 . 31 . 13 , 0$ tempo sidereo.
$\vartheta = 52^\circ . 48' . 15''$
$\alpha = 56 . 51 . 55 , 7$
$\beta = 4 . 29 . 0 , 5$ Bor.
$a = 56 . 59 . 5 , 0$
$b = 3 . 56 . 14 , 6$ Bor.
$g = 61 . 54$
$h = 25 . 18$
Log. sen. $\varpi = 8 . 23541$
$\Delta = 16' . 9'', 9$

$\mathrm{P} = 4 . 47 , 0$
$\mathrm{P}' = 21 . 26 , 2$
$\Delta' = 16 . 25 , 5$
$\alpha' = 56^\circ . 47' . 8'' , 7$
$\beta' = 4 . 7 . 34 , 3$
$(a - \alpha') = 716'' , 3$
$(\beta' - b) = 679 , 7$
$s = 986 , 2$
$ds = -0 , 7$

Dalla prima equazione $s . ds = -(a - \alpha') . \cos.^2 \beta' . d\alpha + (\beta' - b) d\beta$, facendo $d\beta = 0$, abbiamo $d\alpha = 1'' , 0$, sarà quindi la longitudine della ☾ corretta $= 56^\circ . 51' . 56'' , 7$. Distanza dalla congiunzione in gradi $= 0^\circ . 7' . 8'' , 3$. In tempo $= 0^h . 12' . 4'' , 8$; perciò l'istante della congiunzione $= 6^h . 33' . 49'' , 5$ tempo medio.

Calcolo della stessa Occultazione osservata in Marsiglia da M. Thulis.

Immersione $= 5^h . 43' . 52'' , 45$ tempo medio.
$2 . 53 . 18 , 8$ tempo sidereo.
$\vartheta = 43^\circ . 19' . 42''$
$\alpha = 56 . 44 . 56 , 3$
$\beta = 4 . 29 . 20 , 0$
$a = 56 . 59 . 5 , 0$
$b = 3 . 56 . 14 , 6$
$g = 54 . 1 . 30$
$h = 25 . 18 . 0$
Log. sen. $\varpi = 8 . 23554$
$\Delta = 16' . 9'' , 9$
$\mathrm{P} = 2 . 25 , 3$
$\mathrm{P}' = 21 . 25 , 3$
$\Delta' = 16 . 25 , 3$
$\alpha' = 56^\circ . 47' . 31'' , 6$
$\beta' = 4 . 7 . 54 , 7$

$(a - \alpha')$

$$(a - \alpha') = 693'',4$$
$$(\beta' - b) = 700,1$$
$$s = 984,1$$
$$ds = 1,2$$

Dalla prima equazione, fatto al solito $d\beta = 0$, si ottiene $d\alpha = -1'',7$, e quindi sarà la longitudine della Luna corretta $= 56^\circ.44'.54''.6$. Distanza dalla congiunzione $= 0^\circ.14'.10'',4$. Moto orario $= 35'.25''$. Distanza in tempo $= 0^h.24'.0'',7$. Istante della congiunzione per Marsiglia . . . . $= 6^h.7'.53'',1$ tempo medio
Congiunzione per Padova . $= 6.33.49,5$
Differenza de' Meridiani . . $= 25'.56'',4$

Calcolo dell' Occultazione di Maja osservata in Padova nella notte dei 7 Febbrajo 1805.

Immersione $= 6^h.28'.59'',7$ tempo medio.
$3.38.29,2$ tempo sidereo.
$\vartheta = 54^\circ.37'.18'',0$
$\alpha = 56.56.12,5$
$\beta = 4.28.48,2$ Bor.
$a = 56.57.48,4$
$b = 4.22.15,0$ Bor.
$g = 63.15.30$
$h = 24.59.0$
Log. sen. $\varpi = 8.23554$
$\Delta = 16'.10'',0$
$P = -6.0,1$
$P' = 21.6,3$
$\Delta' = 16.24,5$
$\alpha' = 56^\circ.50'.12'',4$
$\beta' = 4.7.41,9$
$(a - \alpha') = 455'',0$
$(\beta' - b) = -873,1$
$s = 984,0$
$ds = 0,5$

Non ho tenuto conto che dell'immersione, giacchè l'emersione non è registrata come precisa, e perciò facendo come sopra $d\beta = 0$ nella prima equazione differenziale, si ha $d\alpha = -1'',1$, e quindi la longitudine della ☾ corretta nell' istante dell'immersione $= 56°.56'.11'',4$. Distanza dalla congiunzione $= 1'.37''$. Moto orario $= 35'.26'',8$, e perciò l'istante della congiunzione per Padova $= 6^h.31'.43'',9$ tempo medio.

Calcolo della stessa Occultazione osservata a Viviers da M. Flaugergues.

Immers. $= 6^h.19'.48'',9$ t. m. Emers. $= 6^h.53'.14'',7$ t. m.
$\alpha = 56°.50'.47'',4$ . . . . . $= 57°.10'.32'',0$
$\beta = 4.29.\ 3,6$ . . . . . $= 4.28.\ 6,9$
$a = 56.57.48,4$
$b = 4.22.15,0$
$g = 55.49$ . . . . $= 62.10$
$h = 26.\ 1$ . . . . $= 24.18$
$\log.\,\text{sen}.\varpi = 8.23554$ . . . . . . $= 8.23554$
$P = 0'.58'',6$ . . . . . . $= -4'.46'',1$
$P' = 22.15,8$ . . . . . . $= 20.28,8$
$\Delta' = 16.24,6$ . . . . . $\Delta'' = 16.25,6$
$\alpha' = 56°.51'.46'',0$ . . . $\alpha'' = 57°.\ 5'.45'',9$
$\beta' = 4.\ 6.47,8$ . . . $\beta'' = 4.\ 7.38,7$
$(a-\alpha') = 6'.\ 2''.4$ . . $(\alpha''-a) = 7'.57'',5$
$(\beta'-b) = -15.27,2$ . . $(\beta''-b) = -14.36,3$
$s = 995'',2$ . . . . . . $s' = 997'',3$
$ds = -10,6$ . . . . . . $ds' = -11,7$

Le due equazioni differenziali per ottenere il $d\alpha$ ed il $d\beta$ sono le seguenti:

$$12'',987 = 0'',389\, d\alpha + d\beta$$
$$-15,023 = 0,543\, d\alpha - d\beta$$

E quindi $d\alpha = -2'',1$, e $d\beta = 12'',2$ (troppo forte). Longitudine corretta nell'immersione $= 56°.50'.45'',3$, e nell'emersione $= 57°.10'.29'',9$. Distanza dalla congiunzione per l'immersione $= 0°. 7'. 3'', 1$; e per l'emersione $= -0°. 12'. 41'', 5$; le quali ridotte in tempo col mezzo del moto orario, si ha $11'. 56'', 2$ d'aggiungersi all'immersione, e $21'. 29'', 0$ da togliersi dall'emersione per ottenere l'istante della congiunzione. Ciò fatto si trova:

Congiunzione col mezzo dell'immersione $= 6^h.\ 2'. 59'', 1$
col mezzo dell'emersione $= 6\ .\ 2\ .\ 59\ , 7$

Medio $= 6\ .\ 2\ .\ 59\ , 8$
Congiunzione di Padova $= 6\ .\ 31\ .\ 43\ , 9$

Differenza dei Meridiani $= 28\ .\ 44\ , 5$

Calcolo dell' Occultazione d' Alcione osservata in Padova nella notte dei 7 *Febbrajo* 1805.

Immersione $= 6^h. 55'. 30'', 0$ tempo medio.
$4\ .\ 5\ .\ 3\ , 8$ tempo sidereo.
$\vartheta = 61°. 16'. 0''$
$\alpha = 57\ .\ 11\ .\ 52$
$\beta = 4\ .\ 28\ .\ 3\ , 1$ Bor.
$a = 57\ .\ 16\ .\ 38\ , 6$
$b = 4\ .\ 1\ .\ 56\ , 4$ Bor.
$g = 68\ .\ 15\ .\ 30$
$h = 23\ .\ 53\ .\ 30$
Log. sen. $\varpi = 8\ .\ 23554$
$\Delta = 16'. 10'', 0$
$P = -10\ .\ 33\ , 9$
$P' = 20\ .\ 7\ , 6$
$\Delta' = 16\ .\ 25\ , 5$
$\alpha' = 57°. 1', 18'', 1$
$\beta' = 4\ .\ 7\ , 55\ , 5$
$(a - \alpha') = 920'', 3$
$(\beta' - b) = 359\ , 1$
$s = 985\ , 9$
$ds = -0\ , 4$

L'emersione registrata a $8^h. 9'. 0'', 7$ tempo medio non pare troppo giusta, giacchè darebbe un errore non ammissibile in latitudine, quindi ho creduto bene di trascurarla, e di tener conto solamente dell'immersione da cui si ricava $d\alpha = 0'',4$. Perciò la longitudine della ☾ corretta pel momento dell'immersione $= 57^\circ.11'.52'',4$. Distanza dalla congiunzione in gradi $= 0^\circ.4'.46'',2$; in tempo $= 0^h.8'.4'',4$. Istante della congiunzione $= 7^h.3'.34'',4$ tempo medio.

Calcolo della stessa occultazione osservata a Marsiglia da M. Thulis.

Immersione $= 6^h.17'.40'',7$ tempo medio.
$3.27.12,6$ tempo sidereo.
$\vartheta = 51^\circ.48'.9''$
$\alpha = 57.4.54,1$
$\beta = 4.28.23,1$ Bor.
$a = 57.16.38,6$
$b = 4.1.56,4$
$g = 60.31$
$h = 23.29$
Log. sen. $\varpi = 8.23565$
$\Delta = 16'.10'',0$
$P = -3.18,6$
$P' = 19.39,2$
$\Delta' = 16.25,5$
$\alpha' = 57^\circ.1',35'',5$
$\beta' = 4.8,43,9$
$(a-\alpha') = 903'',1$
$(\beta'-b) = 407,5$
$s = 988,3$
$ds = -2,8$

Nell'equazione $s.ds = -(a-\alpha')\cos^2\beta'.d\alpha + (\beta'-b)d\beta$ sostituendo i valori qui sopra trovati, e facendo $d\beta = 0$, abbiamo $d\alpha = 3'',1$, e quindi la longitudine della ☾ corretta $= 57^\circ.4'.57'',2$, e la distanza dalla congiunzione in gradi

$= 0^\circ.11'.41'',4$. Moto orario in longitudine $= 35'.26'',8$. Distanza dalla congiunzione in tempo $= 0^h.19'.47'',2$, perciò il momento della congiunzione per Marsiglia $= 6^h.37'.27'',9$

Congiunzione di Padova $= 7\ .\ 3.34,4$

Differenza dei Meridiani $= \quad 26\ .\ 6,5$

Calcolo dell' Occultazione medesima osservata a Viviers da M. Flaugergues.

Immers. $=$	$6^h.13'.17'',8$ t. m.	Emers. $=$	$7^h.25'.\ 5'',4$ t. m.
	$3.22.49,4$ t. sid.	$=$	$4.36.49,1$ t. s.
$\vartheta =$	$50^\circ.42'.21'',0$	$=$	$69^\circ.12'.15'',0$
$\alpha =$	$57\ .\ 3,55,7$	$=$	$57.47,31,4$
$\beta =$	$4.28.25,9$ Bor.	$=$	$4.26,20,4$ Bor.
$a =$	$57.16.38,6$		
$b =$	$4\ .\ 1.56,4$		
$g =$	$60\ .\ 2$	$=$	$74\ .\ 6$
$h =$	24.50	$=$	$21.58.30$
log.sen.$\varpi =$	8.23554	$=$	8.23565
$\Delta =$	$16'.10'',0$	$=$	$16'.10'',1$
$P =$	$-2.49,7$	$=$	$-15.41,5$
$P' =$	$20.58,5$	$=$	$18.20,8$
$\Delta' =$	$16.25,5$	$\Delta'' =$	$16.25,6$
$\alpha' =$	$57^\circ.\ 1',\ 6'',0$	$\alpha'' =$	$57^\circ.31',50'',3$
$\beta' =$	$4\ .\ 7,27,4$	$\beta'' =$	$4\ .\ 7,59,6$
$(a-\alpha') =$	$932'',6$	$(\alpha''-a) =$	$911'',7$
$(\beta'-b) =$	$331,0$	$(\beta''-b) =$	$363,2$
$s =$	$988,7$	$s =$	$979,3$
$ds =$	$-3,2$	$ds =$	$6,3$

Dalle due equazioni differenziali seguenti

$$-\ 9'',558 = -2'',803\ d\alpha + d\beta$$

$$16,\ 99 = \ 2,497\ d\alpha + d\beta$$

abbiamo $d\alpha = 5'',0$ e $d\beta = 4'',5$, e correggendo per l' istante dell' immersione la longitudine e la latitudine della ☾, sarà $\alpha + d\alpha = 57^\circ.4'.0'',7$, e $\beta + d\beta = 4^\circ.28'.30'',4$; e si-

milmente per l'emersione $\alpha + d\alpha = 57^\circ.47'.36'',4$, e $\beta + d\beta = 4^\circ.26'.24'',9$. Distanza dalla congiunzione in gradi ottenuta dall'immersione $= 0^\circ.12'.37'',9$. Distanza dalla passata congiunzione per mezzo dell'emersione $= 0^\circ.30'.57'',8$. Moto orario in longitudine $= 35'.26'',8$; e quindi distanza dalla congiunzione in tempo coll'immersione $= 0^h.21'.22'',9$, e coll'emersione $= - 0^h.52'.24'',6$. Congiunzione ricavata
dall'immersione . . . . $= 6^h.34'.40'',7$
e dall'emersione . . . . $= 6.34.40,8$
Congiunzione di Padova come sopra $= 7.3.34,4$
Differenza de' Meridiani . $=$ $28'.53'',7$

Calcolo dell'Occultazione di Atlante osservata in Padova nella notte dei 7 Febbrajo 1805.

Immersione $= 8^h.1'.36'',6$ tempo medio.
$5.11.21,3$ tempo sidereo.
$\vartheta = 77^\circ.50'.19''$
$\alpha = 57.50.55,7$
$\beta = 4.26.10,6$ Bor.
$a = 57.38.24,2$
$b = 3.53.53,3$ Bor.
$g = 80.47$
$h = 22.8$
Log. sen. $\varpi = 8.23566$
$\Delta = 16'.10'',1$
$P = -21.43,7$
$P' = 18.38,8$
$\Delta' = 16.24,6$
$\alpha' = 57^\circ.29'.12'',0$
$\beta' = 4.7.31,8$
$(a - \alpha') = 552'',2$
$(\beta' - b) = 818'',5$
$s = 986'',7$
$ds = -2,1$

Facendo secondo il solito $d\beta = 0$ nella prima equazione ottiensi $da = 3'', 8$ col qual valore correggendo la longitudine Lunare pel momento dell'immersione avremo $a + da = 57^\circ.50'.59'', 5$, che confrontata con la longitudine della Stella dà $0^\circ.12'.35'', 3$ per differenza in gradi, la qual in tempo si trova $= -0^h.21'.18'',5$; e perciò l'istante della congiunzione $= 7^h.40'.18'', 1$ tempo medio.

Calcolo dell'Occultazione di χ dell'Acquario osservata in Padova li 22 Luglio 1807.

Immers. $=$	$11^h.18'.54'',4$ t. m.	Emers. $=$	$12^h.8'.\ 3'', 5$ t.m.
	$19.17,52,7$ t. sid.	$=$	$20.7.9, 2$ t. s.
$\alpha =$	$336^\circ.22'.43'',0$ (Tav. di *Bürg*)	$=$	$336^\circ.47'.17'',9$
$\beta =$	$5.6.1,0$ Bor.	$=$	$5.6.6,1$
$a =$	$336.44.44,0$		
$b =$	$4.7.24,5$		
$g =$	305.42	$=$	324.18
$h =$	66.18	$=$	62.49
$\varpi =$	$54'.11'', 5$	$=$	$54'.11'', 4$
$\Delta =$	$14.48, 9$	$=$	$14.48, 7$
$P' =$	$48.6, 8$	$=$	$46.16, 1$
$P =$	$11.12, 3$	$=$	$5.24, 2$
$\Delta' =$	$14.54, 9$	$\Delta'' =$	$14.55, 9$
$\alpha' =$	$336^\circ.33',55'',3$	$\alpha'' =$	$336^\circ.52'.42'',1$
$\beta' =$	$4.17.54,2$	$\beta'' =$	$4.19.50,0$
$(a-\alpha') =$	$10.48,7$	$(\alpha''-a) =$	$7.58,1$
$(\beta'-b) =$	$10.29,7$	$(\beta''-b) =$	$12.25,5$
$s =$	$902'', 8$	$s' =$	$884'', 9$
$ds =$	$-\ 7, 9$	$ds' =$	$11, 0$

Equazione prima $-11'',33 = -1'',024\, da + d\beta$

Equazione seconda $13'',06 = 0'',638\, da + d\beta$

dalle quali si ha $da = 14'', 7$, e $d\beta = 3'', 7$. Correggendo i luoghi di Luna, e prendendo il moto orario $= 30'.0'',4$, si trova la distanza dalla congiunzione in tempo per mezzo dell'immersione $= 0^h.43'.32'', 0$; e per mezzo dell'emersione

$= -0^h.5'.37'',1$; e quindi l'istante della congiunzione ottenuto

dall'immersione $= 12^h.2'.26'',4$ } tempo medio.
dall'emersione $= 12.2.26,4$ }

Calcolo della stessa Occultazione osservata a Lilienthal dal Sig. Bessel.

Immers. =	$11^h.12'.28'',8$ t.m.	Emers. =	$12^h.12'.34'',7$ t.m.
	$19.11.28,2$ t.s.	=	$20.11.43,9$ t.s.
α =	$336°.25'.28'',0$	=	$336°.55'.31'',6$
β =	$5.6.1,5$	=	$5.6.7,7$
a =	$336.44.44,0$		
b =	$4.7.24,5$		
g =	311.36	=	$335°.58'.30''$
h =	73.51	=	68.59
ϖ =	$54.10,5$	=	$54.10,4$
Δ =	$14.48,9$	=	$14.48,7$
P =	$6.22,4$	=	$0.19,5$
P' =	$50.53,1$	=	$48.59,1$
Δ' =	$14.53,6$	Δ'' =	$14.54,8$
α' =	$336°.31'.50'',4$	α'' =	$336°.55'.51'',1$
β' =	$4.15.8,4$	β'' =	$4.17.8,6$
$(a-\alpha')$ =	$12.53,6$	$(\alpha''-a)$ =	$11.7,1$
$(\beta'-b)$ =	$7.43,9$	$(\beta''-b)$ =	$9.44,1$
s =	$15.0,5$	s' =	$14.44,3$
ds =	$-.6,7$	ds' =	$9,5$

Equazione prima $-13'',0 = -1'',658\,d\alpha + d\beta$
seconda $14'',4 = 1'',136\,d\alpha + d\beta$

dalle quali $d\alpha = 9'',8$ e $d\beta = 3'',2$. Distanza dalla congiunzione in tempo per mezzo dell'immersione $= 0^h.38',11'',9$ e per mezzo dell'emersione $= -0^h.21'.54'',5$. Congiunzione ottenuta dall'immersione $= 11.50.40,7$

dall'emersione $= 11.50.40,2$
Medio $= 11.50.40,45$
Congiunzione di Padova . . $= 12.2.26,40$
Differenza de' Meridiani . . $= 11.46$

Calcolo della medesima osservata a Dresda dalli Signori Lindenau *e* Seiffert.

Immers. = $11^h.34'.46'',2$ t.m. Emers. = $12^h.31'.\ 3'',2$ t.m.
$19.33.46,0$ t.s. . . = $20.30.12,3$ t.s.
$\vartheta = 293^\circ.26'.30''$ . . . . . $= 307^\circ.33'.\ 4'',5$
$\alpha = 336.26.55,6$ . . . . . $= 336.55.\ 4,2$
$\beta = 5.\ 6.\ 1,8$ . . . . . $= 5.\ 6.\ 7,4$
$a = 336.44.44,0$
$b = 4.\ 7.24,5$
$\Delta = 14.48,9$ . . . . . $= 14'.48'',7$
$\varpi = 54.10,8$ . . . . . $= 54.10,4$
$P = 5.38,9$ . . . . . $= -\ 0.42,2$
$P' = 49.38,2$ . . . . . $= 47.34,1$
$\Delta' = 14.54,5$ . . . $\Delta'' = 14.55,5$
$\alpha' = 336.32.34,5$ . . . $\alpha'' = 336.54.22,0$
$\beta' = 4.16.23,6$ . . . $\beta'' = 4.18.33,3$
$(a-\alpha') = 12.\ 9,5$. $(\alpha''-a) = 9.38,0$
$(\beta'-b) = 8.59,1$. $(\beta''-b) = 11.\ 8,8$
$s = 15.\ 5,4$ . . . $s' = 14.42,8$
$ds = -\ 10,9$ . . . $ds' = 12,7$
e perciò $d\alpha = 15'',9$, e $d\beta = 3'',1$.
Istante della Congiunzione $= 12^h.\ 9',51'',2$ tempo medio
Congiunzione di Padova $= 12.\ 2.\ 26,4$
Differenza de' Meridiani $= 7.24,8$
Latitudine vera di ☾ $= 5^\circ.6'.8'',5$ Boreale.

Calcolo dell' Occultazione di μ 1 *del Sagittario osservata in Padova li* 6 *Luglio* 1808.

Immers. = $10^h.49'.14'',8$ t.m. Emers. = $12^h.\ 5'.37'',5$ t.m.
$17.43.\ 3,0$ t.s. . . . . = $19.\ 4.38,0$ t.s.
$\vartheta = 267^\circ.\ 0'.45,0$ . . . . . $= 286^\circ.\ 9'.30'',0$
$\alpha = 270^\circ.14'.30'',3$ . . . . . $= 270.59.42,2$

β = 3 . 18 . 2 , 4 Bor. . . = 3 . 21 . 5 , 2
a = 270 . 32 . 51 , 8
b = 2 . 22 . 6 , 1
g = 264 . 14 . . . . = 300 . 7
h = 68 . 37 . . . . = 67 . 0
ϖ = 59′. 2″, 6 . . . . . . = 59′. 1″, 6
Δ = 16 . 8 , 5 . . . . . . = 16 . 8 , 2
P = 2 . 16 , 2 . . . . . . = - 11 . 18 , 4
P′ = 54 . 3 , 1 . . . . . . = 53 . 25 , 5
Δ' = 16 . 15 , 4 . . . . . . = 16 . 14 , 8
α' = 270°. 16′. 46″, 5 . . . α'' = 270°. 48′. 23″, 8
β' = 2 . 23 . 59 , 3 . . . β'' = 2 . 27 . 39 , 7
$(a-\alpha')$ = 16 . 5 , 3 . . $(\alpha''-a)$ = 15 . 32 , 0
$(\beta'-b)$ = 1 . 53 , 2 . . $(\beta''-b)$ = 5 . 33 , 6
s = 16 . 11 , 5 . . . . s' = 16 . 29 , 1
ds = 4 , 3 . . . . ds' = − 14 , 3

L'equazioni che ne risultano sono le seguenti:

$$36'',89 = -8'',51\,d\alpha + d\beta$$
$$-42,40 = 2,79\,d\alpha + d\beta$$

dalle quali si ottiene $d\alpha = -7'',0$, e $d\beta = -21'',7$: valore troppo forte, e quindi non ammissibile. Si noti che la Stella passò vicina al centro della Luna. Longitudine vera di ☾ nell' immersione = 270° . 14′ . 23″, 3. Nell' emersione = 270°. 59′. 35″, 2. Moto orario in longitudine = 35′. 30″, 2; in latitudine = 2′. 25″, 0. Istante della congiunzione dato dall' immersione . . = 11^h. 20′. 28″, 1
dall' emersione . = 11 . 20 . 27 , 8
Medio . . = 11 . 20 . 27 , 95 tempo medio.

Calcolo della stessa Occultazione osservata a Seeberg dalli Signori Lindenau *e* Pabst.

Immers. = 10^h.43′.21″,3 t. m. Emers. = 11^h.58′.34″,3 t. med.
17 . 42 . 9 , 1 t. s. . . . . = 18 . 57 . 34 , 1 t. sid.
ϑ = 265°.32′.16″,5 . . . . = 284°.23′.31″,5

$\alpha = 270.13.43,8$ . . . . . $= 270.58.14,5$
$\beta = \ \ 3.17.59,2$ . . . . . $= \ \ 3.20.59,2$
$a = 270.32.51,8$
$b = \ \ 2.22.\ 6,1$
$g = 259.40$ . . . . $= 301.47$
$h = 74.\ 4$ . . . . $= 72.38$
$\varpi = 59'.\ 1'',3$ . . . . $= 59'.\ 0'',5$
$\Delta = 16.\ 8,5$ . . . . $= 16.\ 8,2$
$P = \ \ 2.59,3$ . . . . $= -\ 9.\ 4,8$
$P' = 56.\ 3,4$ . . . . $= 55.37,6$
$\Delta' = 16.13,9$ . . . . . $\Delta'' = 16.13,3$
$\alpha' = 270^\circ.16.43'',1$ . . . $\alpha'' = 270^\circ.49'.\ 9'',7$
$\beta' = \ \ 2.21.55,8$ . . . $\beta'' = \ \ 2.25.21,6$
$(a-\alpha') = \ \ 16.\ 8,7$. $(\alpha''-a) = \ \ 16.17,9$
$(\beta'-b) = \ \ -\ 10,3$. $(\beta''-b) = \ \ 3.15,5$
$s = 967'',9$ . . . . . . $s = 996'',3$
$ds = 6,0$ . . . . . $ds = -\ 23'',0$ (troppo forte)

Le due equazioni $563^\circ,8 = -93'',89\, d\alpha - d\beta$
$-114,0 = \ \ 4,98\, d\alpha + d\beta$

dando dei valori insussistenti per $d\beta$, passando la Stella quasi pel centro della Luna; ho trascurato la seconda e fatto $d\beta = 0$ nella prima, con che ottenni $d\alpha = -6'',0$. Corretto quindi l'errore in longitudine, ed istituito il calcolo necessario, si ha l'istante della congiunzione . $= 11.15.50,0$ t. med.
Congiunzione di Padova come sopra $= 11.20.27,9$
Differenza de' Meridiani $= \ \ 4.37,9$.

Calcolo della medesima Occultazione osservata in Bologna dal Sig. Caturegli.

Immers. $= 10^h.46'.12'',9$ t. m. Emers. $= 12^h.\ 2'.40'',0$ t. m.
$17.45.\ 0,6$ t. s. . . . $= 19.\ 1.40,3$ t. s.
$\vartheta = 266^\circ.15'.\ 9''$ . . . . . $= 285^\circ.25'.\ 4'',5$
$\alpha = 270.13.58$ . . . . . . $= 270.59.12,9$
$\beta = \ \ 3.18.\ 0,2$ . . . . . . $= \ \ 3.21.\ 3,2$

$a = 270 . 32 . 51 , 8$
$b = 2 . 22 . 6 , 1$
$\Delta = 16 . 8 , 5 \; . \; . \; . \; . \; . = 16 . 8 , 2$
$\varpi = 59 . 2 , 6 \; . \; . \; . \; . \; . = 59 . 1 , 7$
$P = 2 . 52 , 1 \; . \; . \; . \; . \; . = -10 . 57 , 3$
$P' = 53 . 38 , 7 \; . \; . \; . \; . \; . = 53 . 4 , 8$
$\Delta' = 16 . 15 , 6 \; . \; . \; . \; \Delta'' = 16 . 15 , 0$
$\alpha' = 270^{\circ} . 16' . 50'' , 5 \; . \; . \; . \; \alpha'' = 270^{\circ} . 48' . 15'' , 6$
$\beta' = 2 . 24 . 21 , 5 \; . \; . \; . \; \beta'' = 2 . 27 . 58 , 4$
$(a - \alpha') = 16 . 1 . 3 \; . \; (\alpha'' - a) = 15 . 23 , 8$
$(\beta' - b) = 2 . 15 , 4 \; . \; (\beta'' - b) = 5 . 52 , 3$
$s = 16 . 8 , 9 \; . \; . \; . \; s' = 16 . 27 , 9$
$ds = 6 , 7 \; . \; . \; . \; ds' = - 12 , 9$

Questi valori danno le due equazioni seguenti:

$$6'' , 765 = - d\alpha + 0'' , 1411 \, d\beta$$
$$- 13 , 82 = d\alpha + 0 , 3821 \, d\beta$$

dalle quali ricavasi $d\alpha = - 8'' , 7$, e $d\beta = - 13'' , 5$. Longitudine corretta nell'immersione $270^{\circ} . 13' . 49'' , 7$; e nell'emersione $= 270^{\circ} . 59' . 4'' , 2$. Istante della congiunzione dato

dall'immersione $= 11^{h} . 18' . 23'' , 0$
dall'emersione $= 11 . 18 . 22 , 7$
Medio $= 11 . 18 . 22 , 85$ tempo medio.
Congiunzione di Padova $= 11 . 20 . 27 , 9$
Differenza de' Meridiani $= 2 . 5 , 1$.

Calcolo della stessa Occultazione osservata in Parigi.

Immersione $= 9^{h} . 56 . 13'' , 2$ tempo medio.
$16 . 54 . 58 , 5$ tempo sidereo.
$\vartheta = 253^{\circ} . 44' . 38''$
$\alpha = 270 . 5 . 42 , 8$
$\beta = 3 . 17 . 26 , 5$
$a = 270 . 32 . 51 , 8$
$b = 2 . 22 . 6 , 1$
$\Delta = 16 . 8 , 5$

$\varpi = 59.\ 1,8$

$P = 11.\ 1,0$

$P' = 54.48,6$

$\Delta' = 16.14,0$

$\alpha' = 270.16.43,8$

$\beta' = 2.22.37,9$

$s = 16.\ 7,6$

$ds = 6,4$

Sostituiti i valori or ora trovati nella prima equazione, abbiamo $6,41 = -d\alpha + 0'',03291\, d\beta$ nella quale trascurato il $d\beta$ si ha $d\alpha = -6'',41$. La longitudine della Luna corretta pel momento dell'immersione sarà $= 270^\circ.5'.36'',4$. Distanza dalla congiunzione $= 0^\circ.27'.15'',4$.

Moto orario in longitudine $= 35'.30'',2$.

Istante della congiunzione $= 10^h.42'.17'',2$ tempo medio.

Congiunzione di Padova . $= 11.20.27,9$

Differenza de' Meridiani . $= 38.10,7$.

Calcolo dell'Occultazione di δ dei Pesci osservata in Padova li 10 *Agosto* 1808.

Immers. $= 12^h.\ 2'.34'',7$ t. m. Emers. $= 13^h.18'.34'',4$ t.m.

$21.19,34,2$ t. sid. . . $= 22.35.46,3$ t. s.

$\alpha = 11^\circ.\ 0'.42'',0$ . . . . . $= 11^\circ.38'.48'',8$

$\beta = 2.55.45,1$ . . . . . $= 2.53.\ 0,7$

$a = 11.28.42,2$

$b = 2.55.45,1$

log.sen.$\varpi = 8.20013$ . . . . $= 8.20012$

$\Delta = 14'.54'',0$ . . . . . . $= 14'.53'',8$

$P = 12.53,6$ . . . . . . $= 4.36,0$

$P' = 44.16,4$ . . . . . . $= 39.34,6$

$\Delta' = 15.\ 2,0$ . . . . . $\Delta'' = 15.\ 3,8$

$\alpha' = 11^\circ.13',35'',6$ . . . $\alpha'' = 11^\circ.43'.24'',8$

$\beta' = 2.11.28,7$ . . . $\beta'' = 2.13.26,1$

$(a-\alpha') = 15.16,6$ .. $(\alpha''-a) = 14.42,6$

$(\beta'-b) =$ 57,5 . $(\beta''-b) =$ 2.54,9
$s =$ $907'',8$ . . . $s' =$ $889'',1$
$ds =$ $-5,8$ . . . $ds' =$ 4,7

Dai superiori risultamenti abbiamo le due seguenti equazioni:

$$-5,816 = -d\alpha + 0'',0635\ d\beta$$
$$4,795 = d\alpha + 0,1985\ d\beta$$

e perciò $d\beta = -3'',9$. $d\alpha = 5'',6$. E fatte le necessarie correzioni alle due longitudini si ricava l'istante della congiunzione dato dall'immersione $= 12^h.\ 58'.\ 13'',8$
dall'emersione $= 12.58.13,7$
Medio . . $= 12.58.13,75$ tempo medio.

Calcolo della medesima Occultazione osservata in Milano dal ch. Sig. Oriani.

Immers. $= 11^h.49'.35'',6$ t.m. Emers. $= 13^h.\ 4'.45'',1$ t.m.
21 . 6.33,0 t.s. . . . $=$ 22.21.54,8 t.s.
$\vartheta = 316°.38.15$ . . . . . . $= 335°.28.42''$
$\alpha =$ 10.59.35,4 . . . . . $=$ 11.37.16,8
$\beta =$ 2.55.50,0 . . . . . . $=$ 2.53. 7,4
$a =$ 11.28.42,2
$b =$ 2.55.45,1
log.seu.$\varpi =$ 8.20013 . . . . $=$ 8.20012
$\Delta =$ 14.54,0 . . . . . . $=$ 14.53,8
$g =$ 342.35.52 . . . . $=$ 1.20. 5,0
$h =$ 57.34.30 . . . . $=$ 50.10.30
$P =$ 14. 1.2 . . . . $=$ 6.18,1
$P' =$ 44.59,9 . . . . . $=$ 40.29,6
$\Delta' =$ 15. 1,2 . . . $\Delta'' =$ 15. 2,9
$\alpha' =$ 11.13.36,6 . . . $\alpha'' =$ 11.43.34,9
$\beta' =$ 2.10.50,1 . . . $\beta'' =$ 2.12.37,8
$(a-\alpha') =$ 15. 5,6 . $(\alpha''-a) =$ 14.52,7
$(\beta'-b) =$ 18,9 . $(\beta''-b) =$ 2. 6,6
$s =$ 15. 5,0 . . . $s' =$ 15. 0,9
$ds =$ $-$. 3,8 . . . $ds' =$ 2,0

Si ricavano quindi le due seguenti equazioni:

$$-3'',80 = -d\alpha + 0'',0209\,d\beta$$

$$2,021 = d\alpha + 0,1420\,d\beta$$

e perciò $d\alpha = 4'',0$ e $d\beta = 10'',9$. Istante della Congiunzione

ottenuto dall'immersione $= 12^h.\,47'.\,30'',8$

dall'emersione $= 12.\,47.\,31,0$

Medio . . $= 12.\,47.\,30,9$ tempo med.

Congiunzione di Padova . $= 12.\,58.\,13,8$

Differenza de' Meridiani $= 10.\,42,9$

Calcolo dell'Occultazione di λ della Vergine osservata in Padova li 27 Gennajo 1810.

Immers. =	$16^h.42'.\,6'',4$ t.m.	Emers. =	$17^h.29'.10''.9$ t.m.
	13 . 9 . 5 ,2 t.sid.	=	13 .56 .17 ,0 t. s.
$\vartheta =$	197°. 16'. 18"	=	209°. 4'. 15"
$\alpha =$	213 .43, 2 ,8	=	214 . 9,29 ,1
$\beta =$	1 .25 .53 ,4 Bor.	=	1 .28, 7 ,8
$a =$	214 . 18 . 3 ,0		
$b =$	0 .30 .26 ,4 Bor.		
$g =$	172 .19 .20	=	182 .55 .30
$h =$	47 .15	=	51 .56
log.sen.$\varpi =$	8 .22584	=	8 .22592
$\Delta =$	15'.49", 1	=	15'.49", 4
P =	26 .11 , 5	=	18 .39, 5
P' =	42 . 5, 4	=	45 . 9, 1
$\Delta' =$	15 .57, 4	$\Delta'' =$	15 .58, 1
$\alpha' =$	214 . 9 ,14 ,3	$\alpha'' =$	214 .28, 8 ,6
$\beta' =$	0 .43 ,48 ,0	$\beta'' =$	0 .42 ,58 ,7
$(a - \alpha') =$	528",7	$(\alpha'' - a) =$	605",6
$(\beta' - b) =$	801 ,6	$(\beta'' - b) =$	752 ,3
$s =$	960 ,4	$s =$	965 ,8
$ds =$	−3 ,0	$ds =$	−7 ,7

Col mezzo delle due equazioni

$$-5'',45 = -d\alpha + 1'',516\,d\beta$$

$$-12,28 = d\alpha + 1,242\,d\beta$$

si ottiene $d\alpha = -4'',3$ e $d\beta = -6'',4$; e quindi la longitudine e latitudine corrette nel momento dell'immersione, cioè $\alpha + d\alpha = 213^\circ.42'.58'',5$ e $\beta + d\beta = 1^\circ.25'.47'',2$ Bor. con che abbiamo l'istante della congiunzione dato

dall'immersione = $17^h.44'.33'',7$
dall'emersione = $17.44.34,0$
Medio dei due = $17.44.33,85$ tempo med.

Calcolo dell'Occultazione medesima osservata in Roma dal ch. Sig. Oriani *nella Specola del Collegio Romano.*

Immers. =	$16^h.54'.4'',1$ t.m.	Emers. =	$17^h.26'.23'',2$ t.m.
	$13.21.44,5$ t.s.	=	$13.53.31,7$ t.s.
ϑ =	$200^\circ.26'.7'',5$	=	$208^\circ.22'.55'',5$
α =	$214.18.3,0$	=	$214.6.33,1$
β =	$1.26.22,6$ Bor.	=	$1.27.53,0$
a =	$214.18.3,0$		
b =	$0.30.26,4$		
g =	177.53	=	185.16
h =	$45.34.30$	=	48.44
log.sen.ϖ =	8.22588	=	8.22597
Δ =	$15'.49'',1$	=	$15'.49'',4$
P =	$23.59,4$	=	$18.35,0$
P' =	$40.52,5$	=	$43.2,7$
Δ' =	$15.58,6$	=	$15.58,9$
α' =	$214.12.44,1$	=	$214.25.8,1$
β' =	$0.45.30,1$	=	$0.44.50,3$
$(a-\alpha')$ =	$318'',9$	$(\alpha''-a)$ =	$425'',1$
$(\beta'-b)$ =	$903,7$	$(\beta''-b)$ =	$863,9$
s =	$958,3$	s' =	$962,8$
ds =	$0,3$	ds' =	$-3,9$

Le due equazioni risultanti dai calcoli superiori sono le seguenti:

$$0'',902 = -d\alpha + 2'',834\, d\beta$$
$$8,835 = d\alpha + 2,032\, d\beta$$

dalle

dalle quali si ottiene $da = -\,5'',5$ e $d\beta = -\,1'',6$; e quindi la longitudine, corretta pel momento dell'immersione $= 213°.\,48'.\,39'',2$, e per l'istante dell'emersione $= 214°.\,6'.\,27'',6$. Distanza dalla congiunzione in gradi $= 0°.\,29'.\,23'',8$. Moto orario in longitudine $= 33'.\,41'',6$; perciò l'istante della congiunzione dato dall'immersione $= 17^h.\,47'.\,1'',6$

dall'emersione $= 17.\,47.\,1,9$
Medio . $= 17.\,47.\,1,75$
Congiunzione di Padova . . $= 17.\,44.\,33,85$
Differenza de' Meridiani . . $=$ $2.\,27,9$.

Calcolo dell'Occultazione di ρ dell'Acquario osservata in Padova li 11 *Settembre* 1810.

Immersione $= 13^h.\,47'.\,30'',5$ tempo medio.
$1.\,9.\,1,2$ tempo sidereo.
$\vartheta = 17°.\,15'.\,18'',0$
$\alpha = 331.\,51.\,35,3$
$\beta = 2.\,55.\,37,3$ Bor.
$a = 331.\,23.\,25,6$
$b = 2.\,23.\,1,3$ Bor.
$g = 35.\,10.\,40$
$h = 34.\,35.\,50$
Log. sen. $\varpi = 8.\,24445$
$\Delta = 16'.\,30'',2$
$P = -\,44.\,44,4$
$P' = 33.\,19,6$
$\Delta' = 16.\,37,1$
$\alpha' = 331.\,6.\,50,9$
$\beta' = 2.\,22.\,17,7$
$(a - \alpha') = 16.\,34,7$
$(\beta' - b) = -\,43,6$
$s = 16.\,34,6$
$ds = 2,5$

Col mezzo di questi valori l'equazione prima diventa

$2'',5 = -0'',9984\,d\alpha - 0'',0438\,d\beta$, in cui fatto $d\beta = 0$ si ottiene $d\alpha = -2'',5$, e quindi la longitudine corretta nel momento dell'immersione $= 331^\circ.\,51'\,32'',8$. Moto orario in longitudine $= 37'.\,0'',8$, e perciò il momento della congiunzione $= 13^h.\,1'.\,55'',5$ tempo medio.

N. B. Ho trascurata l'emersione segnata a $14^h.\,49'.\,58'',4$ perchè sembra poco esatta.

Calcolo della medesima Occultazione osservata in Milano dal Sig. Carlini.

Immersione $= 13^h.\,34'.\,13'',5$ tempo medio.
$0.\,55.\,44,0$ tempo sidereo.
$\vartheta = 13^\circ.\,56'$
$\alpha = 331.\,50.\,2,2$
$\beta = 2.\,55.\,44,3$
$a = 331.\,23.\,25,6$
$b = 2.\,23.\,1,3$
$g = 32.\,42$
$h = 35.\,46$
Log. sen. $\varpi = 8.\,24450$
$\Delta = 16'.\,30'',2$
$P = -43.\,8,2$
$P' = 34.\,16,6$
$\Delta' = 16.\,37,4$
$\alpha' = 331.\,6.\,54,0$
$\beta' = 2.\,21.\,27,7$
$(a-\alpha') = 16.\,31,6$
$(\beta'-b) = -1.\,33,6$
$s = 16.\,34,6$
$ds = 2,8$

Prendendo ora l'equazione $s.\,ds = -(a-\alpha').\cos.^2\beta'.d\alpha + (\beta'-b)\,d\beta$ e fattovi $d\beta = 0$, si ha $d\alpha = -2'',8$, e sarà quindi la longitudine della Luna corretta $= 331^\circ.\,49'.\,59'',4$. Distanza dalla congiunzione in gradi $= 0^\circ.\,26'.\,33'',8$. Moto orario in longitudine $= 37'.0'',8$; e dalla proporzione: $2220'',8 : 3600'' :: 1593'',8 : x$; avremo $x = -43'.3'',6$. Istante dell'immersione $= 13^h.34'.13'',5$.

Congiunzione per Milano $= 12^h.51'.\ 9'',9$ tempo medio
Congiunzione per Padova $= 13.\ 1.55'',5$
Differenza de' Meridiani $= 10.45,6$.

Calcolo dell'Occultazione di λ dei Gemini osservata in Padova 4 *Marzo* 1811.

N. B. In questa come nelle seguenti Occultazioni i luoghi di ☾ sono stati calcolati colle Tavole di M. *Burckhardt*.

Immersione $= 13^h.\ 5'.51'',3$ tempo medio.
$11.53.16,0$ tempo sidereo.
$\vartheta = 178^\circ.19'$
$\alpha = 106.27.\ 0,2$
$\beta = 4.57.15,0$ Aust.
$a = 106.\ 8.54,0$
$b = 5.39.22,5$ Aust.
$g = 156.50$
$h = 40.\ 1$
Log. sen. $\varpi = 8.19815$
$\Delta = 14'.48'',6$
$P = -32.22,6$
$P' = 37.16,9$
$\Delta' = 14.54,7$
$\alpha' = 105.54.37,6$
$\beta' = -5.34.31,9$
$(a-\alpha') = 856'',4$
$(\beta'-b) = -290'',6$

In questa occultazione non tengo conto che dell'immersione essendo l'emersione registrata come incerta. Ricavasi pertanto dai dati superiori $s = 900'',5$, e $ds = -5'',8$, e quindi ne nasce l'equazione $17''\,97 = 2'',919\,da + d\beta$ in cui facendo $d\beta = 0$ si ha $da = 6'',2$. E correggendo la longitudine della ☾ si trova pel momento dell'immersione: Longit. della ☾ $= 3^s . 16^\circ . 27' . 6'', 2$. Moto orario in longitudine $= 29' . 49'', 5$: perciò l'istante della congiunzione per Padova $= 12^h . 29' . 14'', 0$ tempo medio.

Calcolo della stessa Occultazione osservata in Milano.

Immersione $= 12^h . 54' . 18'', 6$ tempo medio.
$11 . 41 . 43 , 0$ tempo sidereo.
$\vartheta = 175^\circ . 25' . 45''$
$\alpha = 106 . 26 . 36 , 2$
$\beta = 4 . 57 . 24 , 4$ A.
$a = 106 . 8 . 54 , 0$
$b = 5 . 39 . 22 , 5$ A.
$g = 154 . 33 . 30$
$h = 38 . 57$
Log. sen. $\varpi = 8 . 19817$
$\Delta = 14' . 48'', 6$
$P = -31 . 50 , 0$
$P' = 36 . 39 , 6$
$\Delta' = 14 . 55 , 1$
$\alpha' = 105 . 54 . 46 , 2$
$\beta' = 5 . 34 . 4 , 0$
$(a - \alpha') = 847'', 8$
$(\beta' - b) = - 318 , 5$
$s = 901 , 8$
$ds = - 6 , 7$

E quindi l'equazione $s . ds = -(a - \alpha') . \cos.^2 \beta' d\alpha + (\beta' - b) d\beta'$, facendo $d\beta = 0$, diventa $(901'',8)(-6'',7) = -847'',8 . \cos.^2 \beta' . d\alpha$ dalla quale si ottiene $d\alpha = 7'', 2$. Istante della congiunzione per Milano. . . . . . $= 12^h . 18' . 27'' . 3$ tempo medio

Congiunzione di Padova $= 12 . 29 . 14 , 0$
Differenza de' Meridiani $= 10 . 46 , 7$.

Calcolo dell' Occultazione di α del Toro osservata in Padova li 29 Novembre 1811.

Immersione $= 18^h.42'.22'',0$ tempo medio.
$11.15.10,8$ tempo sidereo.
$\vartheta = 168^\circ.47'.42'',0$
$\alpha = 67.41.14,4$
$\beta = 4.59.5,5$ Aust.
$a = 67.9.49,3$
$b = 5.28.52,8$ Aust.
$g = 149.26$
$h = 36.37$
Log. sen. $\varpi = 8.22895$
$\Delta = 15'.53'',9$
$P = -46.31,8$
$P' = 35.13,7$
$\Delta' = 15.54,8$
$\alpha' = 66.54.42,6$
$\beta' = 5.34.19,2$
$(a-\alpha') = 906'',7$
$(\beta'-b) = 326,4$
$s = 959,7$
$ds = -4,9$

Facendo ora $d\beta = 0$ nella solita equazione $s.ds = -(a-\alpha').\cos.^2\beta'.d\alpha + (\beta'-b)\,d\beta$ si ottiene $d\alpha = 5'',2$ con che correggendo la longitudine avremo pel momento dell'immersione. Longitudine di ☾ $= 67^\circ.41'.19'',6$. Distanza dalla congiunzione $= 31',30'',3$. Moto orario in longitudine $= 34'.45'',4$; e perciò l'istante della congiunzione $= 17^h.47'.58'',9$ tempo medio.

Calcolo dell' Occultazione di α del Toro osservata in Padova li 23 Gennajo 1812.

Immers. $= 7^h.48'.50'',2$ t. m. Emers. $= 8^h.51'.46'',9$ t. m.
$3.56.42,8$ t. s. . . $= 4.59.49,8$ t. s.
$\vartheta = 59^\circ.10'.42'',8$ . . . . . $= 74^\circ.57'.27'',0$
$\alpha = 66.58.\ 6,6$ . . . . . $= 67.32.58,9$
$\beta = 5.11.19,1$ Aust. . $= 5.11.23,6$
$a = 67.\ 9.47,5$
$b = 5.28.48,9$
$g = 66.41$ . . . . $= 78.36$
$h = 24.13$ . . . . $= 22.21$
log.sen.$\varpi = 8.22187$ . . . . . . $= 8.22173$
$\Delta = 15'.38'',5$ . . . . . $= 15'.38'',2$
$P = 15,8$ . . . . . $= -10.21,0$
$P' = 28.28,9$ . . . . . $= 26.42,0$
$\Delta' = 15.52,6$ . . . $\Delta'' = 15.51,3$
$\alpha' = 66.58.22,4$ . . . $\alpha'' = 67.22.37,9$
$\beta' = 5.39.48,0$ . . . $\beta'' = 5.38.\ 5,6$
$(a-\alpha') = 684'',9$. $(\alpha''-a) = 770'',6$
$(\beta'-b) = 659,0$. $(\beta''-b) = 556,6$
$s = 948,1$ . . . $s' = 947,7$
$ds = 4,5$ . . . $ds' = 3,6$

Dai calcoli superiori si ottengono le due equazioni seguenti; cioè

$$6'',474 = -1'',029\, d\alpha - d\beta$$
$$6,130 = 1,371\, d\alpha - d\beta$$

dalle quali abbiamo $d\alpha = -0'',14$, e $d\beta = -6'',32$. Con questi valori correggendo le longitudini e latitudini lunari, si ha pel momento dell' immersione, longitudine di ☾ $= 66^\circ.58'.6'',5$; latitudine $= 5^\circ.11'.25'',4$ Aust. e per l' istante dell' emersione $\alpha + d\alpha = 67^\circ.32'.58'',8$, e $\beta + d\beta = 5^\circ.11'.29'',9$. Per mezzo poi del moto orario in longitudine $= 33'.14'',4$ ricaviamo l' istante della congiunzione

$$\left.\begin{array}{ll}\text{per Padova} & = 8^h.9'.55'',2\\ \text{dall' emersione} & = 8.9.65,3\end{array}\right\}\ \text{tempo medio.}$$

Calcolo dell' occultazione medesima osservata in Milano dal celebre Sig. Oriani.

Immers. = $7^h.34'.49'',3$ t.m. Emers. = $8^h.35'.15'',7$ t.m.
$3.42.41,4$ t.s. . . = $4.43.17,7$ t.s.
$\vartheta = 55^\circ.40'.21''$ . . . . = $70^\circ.49'.25'',5$
$\alpha = 66.56.18,6$ . . . . . = $67.29.47,7$
$\beta = 5.11.19,0$ Aust. . . = $5.11.23,5$
$a = 67.\ 9.47,3$
$b = 5.28.48,9$ Aust.
$g = 64.\ 4$ . . . . = 75.29
$h = 24.52$ . . . . = 22.47
log.sen.ϖ = 8.22195 . . . . . . = 8.22178
$\Delta = 15'.38'',5$ . . . . . = $15'.38'',2$
$P = 2.39,3$ . . . . . = $-\ 7.28,6$
$P' = 29.\ 1,9$ . . . . . = $27.\ 9,6$
$\Delta' = 15.51,6$ . . . $\Delta'' = 15.52,3$
$\alpha' = 66.58.57,9$ . . . $\alpha'' = 67.22.17,8$
$\beta' = -5.40.20,9$ . . . $\beta'' = -5.38.32,8$
$(a-\alpha') = 649'',4$. $(\alpha''-a) = 750'',5$
$(\beta'-b) = -\ 692,0$. $(\beta''-b) = -\ 583,9$
$s = 946,9$ . . . $s' = 948,1$
$ds = 4,7$ . . . $ds' = 4,2$

Le due equazioni per ottenere il $d\alpha$ ed il $d\beta$ sono le seguenti:

$$6'',921 = -\,d\alpha - 1'',076\,d\beta$$
$$5'',357 = d\alpha - 0,786\,d\beta$$

dalle quali $d\alpha = +\,0'',2$, e $d\beta = -\,6'',6$ e quindi la longitudine corretta pel momento dell' immersione $= 66^\circ.56'.18'',8$, e per l' emersione $= 67^\circ.29'.47'',9$. Moto orario in longitudine $= 33'.14'',4$. Distanza dalla congiunzione in tempo $= 0^h.24'.19'',9$ da aggiungersi all' immersione, e $0^h.36'.6'',0$ da togliersi all' emersione, e perciò l' istante della congiunzione per Milano $= 7^h.59'.\ 9'',3$ t.m.

Congiunzione di Padova $= 8.\ 9.55,2$
Differenza de' Meridiani $= 10.45,9$.

Calcolo dell' Occultazione di d *del Sagittario osservata in Padova li* 9 *Febbrajo* 1812.

Immersione = $18^h.\ 9'.\ 56'',\ 7$ tempo medio.
$15\ .\ 26\ .\ 32\ ,\ 77$ tempo sidereo.
$\vartheta = 231^\circ.\ 38'.\ 12'',\ 0$
$\alpha = 284\ .\ 59\ .\ 23\ ,\ 7$
$\beta = 4\ .\ 13\ .\ 18\ ,\ 7$ Bor.
$a = 285\ .\ 43\ .\ 11\ ,\ 1$
$b = 3\ .\ 16\ .\ 56$ Bor.
$g = 307\ .\ 9$
$h = 60\ .\ 34$
Log. sen. $\varpi = 8\ .\ 23321$
$\Delta = 16'.\ 3'',\ 3$
$P = 28\ .\ 22\ ,\ 8$
$P' = 50\ .\ 47\ ,\ 4$
$\Delta' = 16\ .\ 6\ ,\ 2$
$\alpha' = 285\ .\ 27\ .\ 46\ ,\ 7$
$\beta' = 3\ .\ 22\ .\ 31\ ,\ 3$
$(a - \alpha') = 924'',\ 6$
$(\beta' - b) = 335\ ,\ 3$
$s = 981\ ,\ 9$
$ds = -\ 15\ ,\ 7$

Per mezzo dei calcoli superiori, facendo $d\beta = 0$, nell'equazione prima si ottiene $d\alpha = 16'',7$. Differenza di longitudine tra la Luna e la Stella $= 0^\circ.\ 43'.\ 30'',\ 7$. Moto orario in longitudine $35'.\ 7'',\ 54$. Istante della congiunzione $= 19^h.\ 24'.\ 16'',\ 2$ tempo medio.

Calcolo dell' Occultazione di 87 μ *della Balena osservata in Padova li* 30 *Luglio* 1812.

Immers. = $15^h.16'.42'',5$ t.m. Emers. = $16^h.27'.58''.7$ t.m.
$23\ .50\ .57\ ,3$ t.sid. . . = $1\ .\ 2\ .25\ ,3$ t. s.
$\vartheta = 357^\circ.44'.20'',0$ . . . . . = $15^\circ.36'.15'',0$

$\alpha = 38.47.58,7 \;\ldots\ldots = 39.30.1,2$

$\beta = 4.55.31,3$ Aust. $\ldots = 4.56.50,0$

$a = 39.18.18,6$

$b = 5.34.35,6$

$g = 20.3.30 \;\ldots\ldots = 33.55.30$

$h = 41.28 \;\ldots\ldots = 35.8$

$\log.\mathrm{sen}.\varpi = 8.23456 \;\ldots\ldots = 8.23431$

$\Delta = 16'.6'',3 \;\ldots\ldots = 16'.5'',7$

$P' = 42.56,6 \;\ldots\ldots = 38.23,4$

$P = 14.35,5 \;\ldots\ldots = 4.46,1$

$\Delta' = 16.16,9 \;\ldots\; \Delta'' = 16.18,2$

$\alpha' = 39.2.34,2 \;\ldots\; \alpha'' = 39.34.47,3$

$\beta' = 5.38.27,9 \;\ldots\; \beta'' = 5.35.13,4$

$(a-\alpha') = 944'',4 \;.\; (\alpha''-a) = 988'',7$

$(\beta'-b) = 232,3 \;.\; (\beta''-b) = 37,8$

$s = 968,2 \;\ldots\; s' = 984,7$

$ds = 8,7 \;\ldots\; ds' = -6,5$

Sostituiti questi valori nelle due equazioni differenziali abbiamo

$$36'',26 = -4'',03\,d\alpha + d\beta$$

$$-169,32 = 25,91\,d\alpha + d\beta$$

dalle quali si ricava $d\alpha = -6'',9$ e $d\beta = 8'',5$. Correggendo ora con questi valori le longitudini e latitudini lunari, avremo per l'immersione: longitudine di ☾ $= 38°.47'.51'',8$: latitudine $4°, 55'.39'',8$ Australe. Similmente per l'emersione otterremo la longitudine di ☾ $= 39°.29'.54'',3$; la latitudine $= 4°.56'.58'',5$. Distanza dalla congiunzione $= 30'.26''.8$. Moto orario in Longitudine $35'.23'',4$; e quindi l'istante della congiunzione dall'immersione $= 16^h.8'.19'',6$

dall'emersione $= 16.8.19,2$

Medio $= 16.8.19,4$ t. med.

Calcolo dell'Occultazione di α del Toro osservata in Padova li 22 Ottobre 1812.

Immers. $= 12^h.26'.34'',3$ t.m. Emers. $= 13^h.39'.24'',8$ t.m.
$2.31.31,6$ t. s. . . $= 3.44.34,2$ t. s.
$\vartheta = 37^\circ.52'.54'',0$ . . . . . $= 56^\circ.\ 8'.33''$
$\alpha = 66.39.24,1$ . . . . . $= 67.24.13,3$
$\beta = 4.59.34,3$ Aust. . . $= 4.53.52,4$
$a = 67.10.26,0$
$b = -5.28.48,6$
$g = 50.42$ . . . . $= 64.25$
$h = 28.36$ . . . . $= 24.43$
$\log.\text{sen}.\varpi = 8.24354$ . . . . . . $= 8.24337$
$\Delta = 16'.26'',7$ . . . . . $= 16'.26'',1$
$P = 14.48.1$ . . . . . $= 2.54,1$
$P' = 33.33,5$ . . . . . $= 30.12,2$
$\Delta' = 16.40,5$ . . . $\Delta'' = 16.41,0$
$\alpha' = 66.54.12,2$ . . . $\alpha'' = 67.27.\ 7,4$
$\beta' = -5.33.\ 7,8$ . . . $\beta'' = -5.29.\ 4,6$
$(a-\alpha') = 973,8$. $(\alpha''-a) = 1001,4$
$(\beta'-b) = 259,2$. $(\beta''-b) = 16,0$
$s = 1003,6$ . . . $s' = 997,1$
$ds = -3,1$ . . . $ds' = 3,9$

Le due equazioni presenti

$$12'',0 = 3'',722\,d\alpha - d\beta$$
$$243,0 = 62,02\,d\alpha + d\beta$$

ci danno $d\alpha = 3'',9$ e $d\beta = 1'',8$. Con questi valori correggendo le longitudini e le latitudini lunari, avremo $\alpha + d\alpha = 66^\circ.39'.28$ e $\beta + d\beta = 4.59.36,1$ A. Le corrispondenti pel momento dell'emersione saranno $\alpha + d\alpha = 67.24.17,2$ e $\beta + d\beta = 4.58.54,2$ Aust. Distanza dalla congiunzione $= 38'.58''$. Moto orario in longitudine $= 36'.55'',3$; e quindi l'istante della congiunzione

dall'immersione $= 13^h.16'.53'',7$
dall'emersione $= 13.16.54,0$

Medio $= 13.16.53,85$ tempo med.

Calcolo della stessa Occultazione osservata in Milano dal ch. Sig. Oriani.

Immers. =	$12^h.12'.50'',3$ t.m.	Emers. =	$13^h.24'.18'',8$ t.m.
	$2.17.47,3$ t.s.	=	$3.29.27,5$ t.s.
$\vartheta =$	$34^\circ.26'.48''$	=	$52.21.52,5$
$\alpha =$	$66.37.34,6$	=	$67.21.33,3$
$\beta =$	$-4.59.36$	=	$-4.58.54,9$
$a =$	$67.10.26$		
$b =$	$-4.59.34,3$		
$g =$	48.10		
$h =$	29.34		
log.sen.$\varpi =$	8.24366	=	8.24342
$\Delta =$	$16'.26'',7$	=	$16'.26'',2$
P =	$16.54,2$	=	$5.35,1$
P' =	$34.21,6$	=	$30.54,5$
$\Delta' =$	$16.40,5$ . . .	$\Delta'' =$	$16.41,0$
$\alpha' =$	$66.54.28,8$ . . .	$\alpha'' =$	$67.27.8,4$
$\beta' =$	$-5.33.57,6$ . . .	$\beta'' =$	$-5.29.49,4$
$(a-\alpha') =$	$957'',2$.	$(\alpha''-a) =$	$1002'',4$
$(\beta'-b) =$	$-309,0$.	$(\beta''-b) =$	$-60,8$
$s =$	$1001,7$ . . .	$s' =$	$999,9$
$ds =$	$-1'',2$ . . .	$ds' =$	$1'',1$

Le due equazioni che somministrano il $d\alpha$ e il $d\beta$ sono le seguenti:

$$3'',89 = 3'',07\,d\alpha + d\beta$$
$$18,09 = 16,34\,d\alpha - d\beta$$

dalle quali abbiamo $d\alpha = 1'',1$, e $d\beta = 0'',4$, e quindi la longitudine e latitudine corrette al momento dell'immersione, come segue. Longitudine di ☾ $= 66^\circ.37'.35'',7$: latitudine $= -4^\circ.59'.36'',4$, e per l'istante dell'emersione: longitudine di ☾ $= 67^\circ.21'.34'',4$: latitudine $= -4^\circ.58'.55'',3$. Distanza dalla congiunzione in gradi $= 0^h.32'.50'',3$. Moto orario in longitudine $= 36'.55'',3$, e perciò il momento della congiunzione ricavato dall' immersione $= 13^h.6'.12'',2$

dall' emersione $= 13.6.12,6$

Medio $= 13.6.12,4$ t. m.

N. B. Non volendo nell' osservazione di Padova tener conto che dell' immersione, che per errore si notò $12^h.26'.34'',3$ (giacchè l' emersione è registrata come incerta essendosi un poco annuvolato il cielo) si ha $s = 1003'',1$, e $ds = -2'',6$; e quindi la prima equazione diventa $10'',01 = 3'',72\, d\alpha + d\beta$ e facendo $d\beta = 0$, si ha $d\alpha = 2'',6$, e la longitudine della ☾ corretta $= 66^\circ.39'.26'',7$. Distanza dalla congiunzione in gradi $= 30'.59'',3$. Moto orario $= 36'.55'',3$.

Istante della congiunzione per Padova $= 13^h.16'.56'',3$

Congiunzione di Milano $= 13.6.12,4$

Differenza de' Meridiani $= 10.43,9$.

(Osservazione di molta fiducia).

Calcolo dell' Occultazione di 27 v del Leone osservata in Padova li 18 Gennajo 1813.

Immers. =	$7^h.51'.6'',1$ t. m.	Emers. =	$8^h.50'.14'',3$ t. m.
	$3.42.15,0$ t. s.	=	$4.41.33,0$ t. s.
$\vartheta =$	$55^\circ.33'.45'',0$	=	$70.23.15,0$
$\alpha =$	$143.38.1,7$	=	$144.10.13,4$
$\beta =$	$0.21.29,8$ Bor.	=	$0.24.26,7$ Bor.
$a =$	$144.43.42,4$		
$b =$	$0.2.31,5$		
$g =$	63.58	=	75.8
$h =$	24.49	=	$22.45.20$
log.sen.$\varpi =$	8.22034	=	8.22009
$\Delta =$	$15'.35'',1$	=	$15'.34'',6$
$P =$	$51.7,3$	=	$49.24,2$
$P' =$	$23.58,6$	=	$22.4,2$
$\Delta' =$	$15.37,9$	$\Delta'' =$	$15.40,2$
$\alpha' =$	$144.29.9,0$	$\alpha'' =$	$144.59.37,6$
$\beta' =$	$-0.2.28,8$	$\beta'' =$	$0.2.22,5$

$(a-\alpha') = 873'',4 \quad . \quad (\alpha''-a) = 955,2$

$(\beta'-b) = -\ 303,3 \quad . \quad (\beta''-b) = -\ 9,0$

$s = 923,7 \quad . \ . \ . \quad s' = 954,9$

$ds = 14,2 \quad . \ . \ . \quad ds' = -\ 14,7$

Avremo quindi le due seguenti equazioni

$$-\ 43'',68 = 2'',909\, d\alpha + d\beta$$

$$-156,\ 0 = 10,\ 61\, d\alpha - d\beta$$

per conoscere $d\alpha$ e $d\beta$, le quali risolute danno $d\alpha = -14'',0$ e $d\beta = 7'',2$. Correggendo con questi valori i luoghi di ☾ si avrà pel momento dell'immersione la longitudine della ☾ $= 143^\circ.37'.47'',7$, e la latitudine $= 0^\circ.21'.37'',0$ Bor. E per l'emersione: longitudine di ☾ $= 144^\circ.9'.59'',4$. Latitudine $= 0^\circ.24'.33'',9$. Distanza dalla congiunzione $= 1^\circ.5',54'',7$. Istante della congiunzione dall'immersione $= 9^h.52'.8'',4$

dall'emersione $= 9.52.9,1$

Medio $= 9.52.8,75$ t.m.

Calcolo dell' Occultazione di μ della Balena osservata in Padova 1 Gennajo 1814.

Immersione $= 10^h.17'.1'',8$ t.m. Emers. $= 11^h.25'.8'',1 \pm$ t.m.

$5.0.35,9$ t.s.

$\vartheta = 75.8.59,0$

$\alpha = 39.38.59,2$

$\beta = 5.12.15,3$ Australe.

$a = 39.19.34,7$

$b = -5.34.6,9$

$g = 78.44.30$

$h = 22.19.40$

Log. sen. $\varpi = 8.23834$

$\Delta = 16'.14'',7$

$P = -\ 38.17,1$

$P' = 26.40,0$

$\Delta' = 16.26,4$

$\alpha' = 39.3.42,1$

$$\beta' = -5\,.\,38\,.\,55\,,3$$
$$(a - \alpha') = 952'',6$$
$$(\beta' - b) = -258\,,4$$
$$s = 982\,,4$$
$$ds = 4\,,0$$

Non ho tenuto conto dell'emersione, perchè non è molto precisa e d'altronde l'errore in latitudine diventava troppo forte (di 16" circa). Feci pertanto $d\beta = 0$ nella prima equazione ed ebbi $d\alpha = -4'',2$ (errore probabile delle Tavole) col quale corretta la longitudine della ☾, si ha nell'istante dell'immersione: longitudine $= 39^\circ.38'.55'',0$. Distanza dalla congiunzione in gradi $= 0^\circ.19'.20'',3$: in tempo $= -32'.12'',6$; perciò l'istante della congiunzione $= -9^h.44'.49'',2$ t. m.

Calcolo dell' Occultazione di γ della Libra osservata in Padova 11 *Febbrajo* 1814.

Immers. =	$15^h.25'.16'',7$ t. m.	Emers. =	$16^h.29'.45''.1$ t. m.
	$12\,.51\,.20\,,1$ t. sid.	=	$13\,.55\,.59\,,1$ t. s.
$\vartheta =$	$192^\circ.50'.\ 0''$	=	$209^\circ.\ 0'.\ 0''$
$\alpha =$	$231\,.44.\ 7\,,8$	=	$232\,.16\,.23\,,5$
$\beta =$	$4\,.55\,.23\,,3$ Bor.	=	$4\,.54\,.19\,,9$
$a =$	$232\,.32.\ 1\,,7$		
$b =$	$4\,.24\,.24\,,5$		
$g =$	$168\,.33,\ 3$	=	$182^\circ.51'.\ 0''$
$h =$	$45\,.30,\ 7$	=	$51\,.55.\ 0$
log.sen.$\varpi =$	$8\,.19970$	=	$8\,.19957$
$\Delta =$	$14'.51'',6$	=	$14'.51'',5$
$P =$	$34\,.21\,,0$	=	$25\,.45\,,3$
$P' =$	$37\,.27\,,3$	=	$41.\ 7\,,1$
$\Delta' =$	$14\,.56\,,9$	$\Delta'' =$	$14\,.57\,,7$
$\alpha' =$	$232\,.18\,.28\,,8$	$\alpha'' =$	$232\,.42.\ 8\,,8$
$\beta' =$	$4\,.17\,.56\,,1$	$\beta'' =$	$4\,.13\,.12\,,8$
$(a - \alpha') =$	$812\,,9$	$(\alpha'' - a) =$	$607\,,1$
$(\beta' - b) =$	$-388\,,4$	$(\beta'' - b) =$	$-671\,,7$
$s =$	$898\,,9$	$s' =$	$904\,,2$
$ds =$	$-2\,,0$	$ds' =$	$-6\,,5$

Dalle due equazioni seguenti:

$$4'',629 = 2'',081\, d\alpha + d\beta$$
$$-8,750 = 0,899\, d\alpha - d\beta$$

si ottiene $d\alpha = -1'',4$, e $d\beta = 7'',5$, i quali applicati alle longitudini e latitudini Lunari danno la longitudine di ☾ corretta pel momento dell'immersione $= 231°.44'.6'',4$; la latitudine $= 4.55'.30'',9$ Bor. e per l'emersione $= 232°.16'.22'',1$. Latitudine $= 4°.54'.27'',4$; quindi distanza dalla congiunzione in gradi col mezzo dell'immersione $= 0°.47'.55'',3$, e coll'emersione $= 0°.15'.39'',6$. Moto orario in longitudine $= 30'.1'',4$. Distanza dalla congiunzione in tempo d'aggiungersi all'immersione $= 1^h.35'.46'',1$. Distanza d'aggiungersi all'emersione $= 0^h.31'.17'',7$; perciò il momento della congiunzione dato dall'immersione $= 17^h.1'.2'',8$ ⎫ t. m.
dall'emersione $= 17.1.2,8$ ⎭

Calcolo dell'Occultazione di 95 ψ 3 dell'Acquario osservata in Padova 7 Luglio 1814.

Immers. =	$13^h.\ 1'.54'',6$ t.m.	Emers. =	$13^h.15'.48'',3$ t.m.
	$20.\ 3.11,6$ t.s.	. . =	$20.17.\ 7,6$ t.s.
$\vartheta =$	$300°.47'.54'',0$	=	$304°.16'.54'',0$
$\alpha =$	$344.\ 0.18,9$	=	$344.\ 7.32,3$
$\beta =$	$4.10.\ 8,2$ Aust.	. =	$4.10.32,7$
$a =$	$344.12.23,3$		
$b =$	$4.46.23,4$ Aust.		
$g =$	322.56	=	$327°.38'.40''$
$h =$	$63.\ 7.30$	=	$61.59.\ 0$
log.sen.$\varpi =$	8.20731	=	8.20736
$\Delta =$	$15.\ 7,5$	=	$15.\ 7,6$
$P =$	$8.36,8$	=	$6.58,9$
$P' =$	$51.10,9$	=	$50.47,6$
$\Delta' =$	$15.13,0$ . . .	$\Delta'' =$	$15.13,1$
$\alpha' =$	$344.\ 8.55,7$ . . .	$\alpha'' =$	$344.14.31,2$
$\beta' =$	$-5.\ 1.19,1$ . . .	$\beta'' =$	$-5.\ 1.20,3$

$(a - \alpha') = 207'',6$. $(\alpha'' - a) = 127'',9$
$(\beta' - b) = -895,7$. $(\beta'' - b) = -896,9$
$s = 919,2$ . . . $s' = 905,6$
$ds = -6,2$ . . . $ds' = 7,5$

Col mezzo delle due solite equazioni si ricava l'errore delle Tavole in latitudine $= -1'',3$. Tralascio di dedurre la congiunzione, giacchè l'errore in longitudine diventa troppo forte, e perciò improbabile. Si noti bene che la Stella andò per molto tempo radendo il lembo della Luna prima di occultarsi.

Calcolo dell'Occultazione di 32.ν' del Sagittario osservata in Padova li 29 Luglio 1814.

Immersione $= 11^h.\ 24'.\ 23'',2$ tempo medio.
$19.\ 52.\ 8,5$ tempo sidereo.
$\vartheta = 198^\circ.\ 2'.\ 7'',5$
$\alpha = 279.\ 57.\ 52,0$
$\beta = 1.\ 7.\ 16,9$ Bor.
$a = 279.\ 52.\ 58,7$
$b = 0.\ 8.\ 6,5$ Bor.
$g = 319.\ 0$
$h = 63.\ 58.\ 30$
Log. sen. $\varpi = 8.19527$
$\Delta = 16'.\ 22'',8$
$P = -14.\ 58,5$
$P' = 48.\ 20,0$
$\Delta' = 16.\ 27,8$
$\alpha' = 279.\ 42.\ 53,5$
$\beta' = 0.\ 18.\ 56,9$
$(a - \alpha') = 605'',2$
$(\beta' - b) = 650,4$
$s = 888,4$
$ds = -0,6$

Dalla prima equazione $s.ds = -(a-\alpha').\cos.^2\beta'.d\alpha + (\beta'-b)d\beta$

dopo

dopo di aver fatto $d\beta = 0$, si ottiene $da = 0'', 86$, e quindi la longitudine della ☾ corretta pel momento dell'immersione $= 279^\circ.57'.52'',9$. Distanza dalla congiunzione in gradi $= -0^\circ.4'.54'',2$. Moto orario in longitudine $= 29'.31''$. Distanza dalla congiunzione in tempo $= -0^h.9'.58'',0$. Tempo dell'immersione $= 11^h.24'.23'',2$. Istante della congiunzione $= 11^h.14'.25'',2$ tempo medio al Meridiano di Padova.

Calcolo dell'Occultazione di 78. ξ 2 della Balena osservata in Padova li 7 Agosto 1814.

Immersione $= 16^h.30'.40'',7$ tempo medio.
$1.34.45,2$ tempo sidereo.
$\vartheta = 23^\circ.41'.18''$
$\alpha = 34.43.54,2$
$\beta = 5.7.17,6$ Australe.
$a = 34.52.32,1$
$b = 5.52.11,4$ Australe.
$g = 40.2.30$
$h = 32.34$
Log. sen. $\varpi = 8.22451$
$\Delta = 15'.44'',2$
$P = -4.34,6$
$P' = 35.37,9$
$\Delta' = 15.56,5$
$\alpha' = 34.39.19,6$
$\beta' = -5.42.55,5$
$(a - \alpha') = 792'',5$
$(\beta' - b) = 555,9$
$s = 964,8$
$ds = -8,3$

Col mezzo de' superiori risultamenti, fatto $d\beta = 0$, nella prima equazione, si trova $d\alpha = 10'',2$. Longitudine della ☾ corretta nel momento dell'immersione $= 34^\circ.44'.4'',4$. Distanza dalla congiunzione in gradi $= 0°.8'.27'',7$. Moto orario in longitudine $= 33'.52'',6$. Distanza dalla congiunzione in tempo $= 0^h.14'.59'',2$. Istante della congiunzione $= 16^h.45'.39'',9$ tempo medio.

Calcolo dell' Occultazione di 58 δ dell' Ofiuco osservata in Padova li 24 Agosto 1814.

Immers. =	$8^h.52'.40'',5$ t.m.	Emers. =	$10^h.\ 8'.38'',1$ t.m.
	19 . 2 .31 ,3 t.s.	=	20 .18 .41 ,3 t.s.
ϑ =	285°.37'.50''	=	304 .40 .20
α =	263 .32 .35 ,3	=	264 .10 . 2 ,2
β =	2 .26 .57 ,2 Bor.	=	2 .23 .57 ,9
a =	263 .33 .51 ,9		
b =	1 .43 .43 ,5 Bor.		
g =	299 .11 .20	=	328°. 9'.30''
h =	67 . 5 .20	=	61 .51 . 0
log.sen.ϖ =	8 .19710	=	8 .19708
Δ =	14'.46'',4	=	14'.46'',4
P =	− 12 .11 ,2	=	− 23 . 2 ,6
P' =	49 .11 ,1	=	47 .23 ,9
Δ' =	14 .51 ,7	Δ'' =	14 .49 ,9
α' =	263 .20 .24 ,1	α'' =	263 .46 .59 ,6
β' =	1 .37 .46 ,1	β'' =	1 .36 .34 ,0
$(a-\alpha')$ =	807'',8	$(\alpha''-a)$ =	787'',7
$(\beta'-b)$ =	− 357 ,4	$(\beta''-b)$ =	− 429 ,5
s =	883 ,0	s' =	896 ,9
ds =	8 ,7	ds' =	− 7 ,0

Le due equazioni per ricavare il valore di $d\alpha$ e di $d\beta$ sono le seguenti:

$$21'',49 = -2'',27\ d\alpha - d\beta$$
$$-14,62 = 1,83\ d\alpha - d\beta$$

le quali risolute danno $d\alpha = -8'',8$ e $d\beta = -1'',5$; e perciò la longitudine corretta pel tempo dell' immersione $= 263°.32'.26'',5$. Latitudine $= 2°.26'.55'',7$ Bor. Similmente per

l' emersione: longitudine di ☾ corretta = 264° . 9' . 53", 4. Latitudine = 2° . 23' . 56", 4. Moto orario in longitudine = 29' . 34" . 8. Distanza dalla congiunzione in tempo col mezzo dell' immersione = 0^h. 2' . 53", 2. Distanza col mezzo dell' emersione = 1^h. 13' . 4", 3, e quindi l' istante della congiunzione ottenuto col mezzo dell' immersione = 8^h.55'.33", 7
coll' emersione = 8 .55 .33 , 8
Medio = 8 .55 .33 , 75 t. m.

Calcolo dell' Occultazione di ψ 3 dell' Acquario osservata in Padova li 27 *Settembre* 1814.

Immers. = 8^h. 27' . 54", 6 t. m. Emers. = 9^h.30'.52",2 ± t. m.
20 . 51 . 43 , 8 t. s.
α = 343°. 58'. 13", 5
β = 4 . 6 . 33 Austr.
a = 344 . 12 . 42 , 0
b = 4 . 46 . 25 , 2 Austr.
g = 338 . 19 . 21
h = 58 . 54 . 46
log.sen.ϖ = 8 . 21119
Δ = 15' . 15", 6
P = 2 . 52 , 4
P' = 50 . 9 , 0
Δ' = 15 . 22 , 0
α' = 344 . 1 . 5 , 9
β' = − 4 . 56 . 42 , 7
$(a - \alpha')$ = 696 , 1
$(\beta' - b)$ = − 617 , 5
s = 928 , 6
ds = − 6 , 6

L' emersione è incerta. Dalla prima equazione abbiamo da = 8", 9; e perciò $\alpha + da$ = 343° . 58' . 22", 4. Distanza dalla congiunzione = 0° . 14' . 19" . 6. Moto orario in longitudine = 31' . 55", 5. Distanza dalla congiunzione in tempo

$= 0^h . 26' . 55'', 5$; e quindi l'istante della congiunzione $= 8^h . 54' . 50'', 1$ tempo medio.

Il mio scopo principale, come in principio accennai, era quello di stabilire con qualche esattezza la differenza de' Meridiani tra l'Osservatorio di Parigi e quello di Padova, ma siccome pochi sono i confronti de' quali possa servirmi con tutta fiducia, così mi contenterò semplicemente di porli qui sotto senza voler spacciare come precisa la longitudine che ne deduce. Il ch. Sig. *Cagnoli* avea già stabilita la differenza de' Meridiani fra Parigi, e Padova a $- 0^h . 38' . 10''$: alla qual determinazione quasi ognun degli Astronomi si è dopo attenuto senza istituire altri calcoli ed altri confronti, ma io comincio ad entrare in qualche sospetto che detta differenza abbia ad essere alquanto minore, giacchè tale assumendola, primieramente gli errori delle Tavole sarebbero più discreti e plausibili, ed in secondo luogo sembra che la dimostrino le differenze di longitudine tra il Meridiano di Padova e quelli dei luoghi seguenti.

Differenze in Longitudine tra l'Osservatorio di Milano, e quello di Padova dedotte dalle Occultazioni di

δ dei Pesci, 10 Agosto 1808 . . . $= - 10' . 42'', 9$
ρ dell'Acquario, 11 Settembre 1810 . $= - 10 . 45 , 6$
λ dei Gemini, 4 Marzo 1811 . . . $= - 10 . 46 , 7$
α del Toro, 23 Gennajo 1812 . . . $= - 10 . 45 , 9$
α del Toro, 22 Ottobre 1812 . . . $= - 10 . 43 , 9$
tra Lilienthal e Padova con ϰ dell' Acquario 22 Luglio 1807 . . . . $= - 0^h . 11' . 47'', 3$
tra Dresda e Padova con la stessa occultazione . . . . $= + 0 . 7 . 22 , 3$
tra Seeberg e Padova con μ 1 del Sagittario 6 Luglio 1807 . . . . $= - 0 . 4 . 38 , 0$
tra Bologna e Padova con la stessa occultazione . . . . $= - 0 . 2 . 5 , 2$

tra Parigi e Padova . . . . = −0.38.10,9
tra Roma e Padova con λ della Vergine 27 Gennajo 1810 . . . . = +0. 2.27,8
tra Viviers e Padova con Maja 7 Febbrajo 1805 . . . . = −0.28.44,1
con Alcione . . . = −0.28.51,0
tra Marsiglia e Padova con Alcione 7 Febbrajo 1805 . . . . = −0.26. 6,4
con Merope . . . = −0.25.57,2

Di queste ho rigettato le tre seguenti; cioè κ dell'Acquario per Lilienthal; Alcione per Viviers e Marsiglia, poichè mi davano delle determinazioni molto lontane (a mio credere), e fra loro discordi: cioè $-0^h.38'.1'',3$. La seconda: $-0^h.38'.14'',4$. La terza: $-0^h.38'.15'',3$. Le altre ritenute in numero di 12 (supponendo bene determinata la posizione de' luoghi sopracitati rapporto al Meridiano di Parigi) danno per la differenza de' Meridiani fra Parigi e Padova come segue . . . . = $-0^h.38'.\ 7'',9$
38.10,6
38.11,7
38.10,9
38. 8,9
38.10,9
38.13,0
38. 8,2
38. 7,3
38. 7,2
38. 8,1
38. 5,2

Medio di tutte = $-0^h.38'.\ 9'',1$

Quanto poi alla determinazione degli altri Astronomi ho trovato nel Giornale Astronomico del ch. Sig. *Barone di Zach* Vol. I, II, e III, che il rinomato Astronomo Sig. *Triesnecker* con tre ecclissi di Sole e 9 occultazioni di Stelle ha trovato per la differenza dei Meridiani tra Padova e Parigi

$= - 0^h. 38'. 19'', 0$
38 . 9 , 4
38 . 9 , 0
37 . 58 , 5
38 . 10 , 7
38 . 12 , 6
38 . 15 , 2
38 . 9 , 0
38 . 10 , 3
38 . 10 , 6
38 . 8 , 9
38 . 10 , 0 .

Di queste ne ho rigettato tre, come più lontane di quelle ommesse da me; cioè . — 0 . 38 , 19 , 0
37 . 58 , 5
38 . 15 , 2 .

Il soprammentovato Signor *Barone di Zach* parimente (Vol. XXII dello stesso Giornale) con due occultazioni ha trovato . . $- 0^h. 38'. 5'', 4$
38 . 12 , 6 .

Il Professor *Wurm* (Vol. XXVI) con due ecclissi Solari ed una occultazione di Stella ha dedotto la differenza
= — 0 . 38 . 16 , 2
38 . 4 , 2
38 . 11 , 8 .

Di queste ho rigettato la prima .

Finalmente il ch. Signor *Cagnoli* (Vol. V della Società Italiana) col mezzo di quattro occultazioni fisse trovò con felicissimo accordo

$- 0^h. 38'. 10'', 0$
38 . 10 , 0
38 . 10 , 0
38 . 10 , 0 .

Riunendo pertanto tutte queste determinazioni alle mie, e ricavandone il medio, si ottiene per la differenza de' Meridiani tra Padova e Parigi $-0^h.38'.9'',4$. E dal medio delle mie solamente, come si vede qui sopra $-0^h.38'.9'',1$.

Da questi due medj, che bastantemente si accordan fra loro sembrerebbe che la differenza de' Meridiani fra Parigi e Padova si potesse stabilire con qualche fondamento a $-0^h.38'.9''$, ch'è più piccola di un secondo di quella ricavata dal Sig. *Cagnoli* a cui sempre si attennero i Signori *Toaldo* e *Chiminello*. Nuove osservazioni e nuovi confronti, come spero di fare, ci guideranno ad un grado di maggior precisione.

DESCRIZIONE DI UN NUOVO MICROMETRO

MEMORIA

Del Signor Gio. Battista Amici.

Presentata li 13 Dicembre 1814 dal Cav. Ruffini
e approvata dal Cav. Cesaris.

Il perfezionamento dato in questi ultimi tempi al Micrometro a fili lo ha reso uno dei più pregiabili istrumenti, essendo molti i vantaggi che da questo ne ritraggono i coltivatori delle Scienze Naturali: allorchè però se ne vuole far uso nella misura dei diametri di Corpi Celesti, o delle loro rispettive distanze, conviene limitarsi a determinare quelle soltanto che sono perpendicolari al loro moto apparente, non potendosi le altre distanze, o diametri obbliqui assegnare con sufficiente accuratezza. A questo difetto suppliscono il micrometro a lampada di *Herschel*, e que' micrometri che raddoppiano le immagini, come il prismatico, l'obbiettivo del *Dollond*, i due inventati da *Ramsden*: ma se si eccettui il primo, gli altri o non sono assolutamente applicabili ai grandi Telescopj di forma Nevtoniana, (i quali mostrano gli oggetti, come l'esperienza ha provato, meglio di quelli di tutt'altra costruzione) o non possono applicarvisi senza gravi inconvenienti e svantaggi; e quantunque il micrometro a lampada sia stato utilmente a tal genere di riflettori addattato; chiunque però avrà tentato di farne uso debbe avere riconosciuto la necessità di una lunga e penosa pratica, e il frequente bisogno di ben molte cautele onde non cadere in gravissimi errori.

Ed io sono d'avviso, che se col mezzo di questo istrumento il celebre *Herschel* è pervenuto a misurare grandezze sì piccole da essere sfuggite alla diligenza degli altri osservatori, ciò attribuir si debba alla forza grande de' suoi Telescopj, ed alla abitudine e sagacità somma di questo grand' uomo nell' arte di osservare, piuttosto che alla perfezione del suo micrometro.

Per la qual cosa ho più volte meco stesso pensato che recar potrebbe un rilevante servigio agli osservatori, ed alle Scienze la costruzione di un nuovo ordigno, il quale essendo applicabile a canocchiali di massima apertura fosse al tempo stesso di facile e pronto uso, e capace di misurare angoli picciolissimi con un grado di precisione superiore a quella degli strumenti sin qui conosciuti. Anzi occupandomi di questo mio pensiere siccome di oggetto a parer mio importantissimo, son giunto ad immaginare e costruire un nuovo micrometro, il quale se pur non prendo abbaglio, sembrami soddisfare più d' ogni altro all' indicato scopo. Ed è di questo mio tentativo, che mi propongo qui di dare contezza, nella lusinga che possa interessare la curiosità di que' Dotti i quali avendo mestieri di maneggiare frequentemente siffatti arnesi, sanno abbastanza quanto importi l' ottenere in essi la maggior possibile perfezione, perchè vogliano saper grado de' suoi tentativi a chiunque si adopra per procurarla.

Ma siccome dall' un canto questo mio lavoro è appoggiato al principio della lente bipartita, sul quale è pur regolata la costruzione del micrometro obbiettivo, e dall' altro canto quest' ultimo è stato da alcuni giudicato difettoso, così comincierò dal premettere alcune considerazioni sulle diverse imperfezioni al medesimo attribuite.

Il Sig. *Maskeline* nella sua relazione riguardante un istrumento per misurare i piccoli angoli letta alla Reale Società di Londra 18 Dicembre 1777 si avvisò di aver rinvenuta la cagion vera di un principale difetto de' micrometri obbiettivi, e furono per lui sì certe, e sì convincenti le ragioni sue, che credè indispensabile partito quello di rivolgere le sue ricerche ad un metodo diverso di principj, e di costruzione.

Si prefisse egli pertanto di produrre due distinte immagini dello stesso oggetto, ma in maniera che gli assi dei coni luminosi partissero dal medesimo punto, o da punti sommamente vicini; e su questo principio regolò egli l'invenzione del suo micrometro prismatico (*a*).

Sul punto di dovere io scegliere un micrometro per corredarne i miei Telescopj, l'autorità di un sì dotto ed illustre Astronomo non potea non rendere esitante la mia determinazione per un sistema di mezzi fra' quali ha luogo la lente divisa. Imperocchè, sebbene nel micrometro da me immaginato la lente bipartita non sia applicata come nel micrometro obbiettivo, nullameno non avrei per questo evitata una imperfezione, la quale, sarebbe stata per ogni combinazione inevitabile qualora le cagioni della medesima fossero le indicate dal prelodato Autore.

Un attento esame però della Teoria del medesimo mi mostrò le ragioni sue non assistite da sufficiente evidenza, anzi parvemi, e comunque pure la venerazione dovuta ad un tanto rispettabile Autore mi ponesse in dubbio di travvedere, mi convinsi che la imperfezione dei micrometri obbiettivi a tutt'altra causa attribuire si debba, che alla immaginata da lui; e così mi rassicurai che da questa non dovesse derivarmene argomento per abbandonare la concepita idea.

A dimostrare la quale asserzione mia, ed all'oggetto di fare conoscere sopra qual fondamento io abbia appoggiate le mie deduzioni, esporrò prima le considerazioni del Sig. *Maskeline*, come le ho tratte dalle transazioni filosofiche.

„ Ma per quanto indubitatamente (così si esprime) sia apprezzabile il Micrometro obbiettivo, vi si sono trovati alcuni difetti dovuti alle alterazioni del fuoco dell'occhio, per

---

(*a*) Anche il Padre *Boscovich* immaginò circa nella medesima epoca un Micrometro di questa specie, e così ancora fu fatto da *M.r Rochon*; ma quest'ultimo si è particolarmente distinto coll'ingegnosissima idea di adoprare la doppia rifrazione del cristallo di Rocca, ed ha formato un istromento assai superiore, e molto più utile degli altri.

le quali, in tempi diversi, il medesimo angolo può essere rappresentato sotto varie grandezze. Per esempio, trattandosi del Diametro del Sole, allorchè gli assi dei coni di luce che partendo dai lembi opposti del Sole, ed attraversando le due semilenti si vanno a segare al fuoco del Telescopio, il contatto apparente de' medesimi lembi non può essere rimarcato, a menochè la conformazione dell'occhio non sia tale che gli oggetti situati al punto d'intersezione possano essere distintamente veduti. Ma se l'occhio sia disposto a vedere distintamente quegli oggetti, che sono più prossimi all'obbiettivo di quello che lo sia l'intersezione, i due lembi compariranno separati per un intervallo eguale alla distanza degli assi dei coni luminosi in quel medesimo luogo; e se poi l'occhio sia conformato in maniera da vedere distintamente gli oggetti ad una più grande distanza dalla lente obbiettiva che il punto d'intersezione, si vedranno i lembi soprapporsi per lo spazio eguale allo scostamento degli assi in quello stesso sito.

Per rendere ciò più sensibile, O, V (*Fig.* 1) rappresentino i centri delle due semilenti del micrometro obbiettivo separate per la distanza OV che sottende al punto A l'angolo OAV eguale al diametro del Sole il quale punto A è il fuoco comune dei due pennelli di luce che hanno OA e VA per assi, cioè quelli che procedono da parti opposte del Sole, e passano per le diverse semilenti; e sia D l'oculare. Egli è evidente che se l'oculare è posto in modo da scoprire distintamente gli oggetti situati al punto A, i raggi OA, VA, come pure tutti gli altri appartenenti a quei penelli saranno raccolti in un punto sopra la retina dell'occhio; e perciò li due opposti lembi delle due immagini del Sole sembreranno coincidere, e le due immagini solari toccarsi esternamente. Ma se lo stato dell'occhio si altererà, l'oculare rimanendo a suo posto, l'occhio non sarà più disposto a vedere distintamente la immagine formata al punto A, ma piuttosto a vedere un oggetto situato in EF più vicino, o più lontano dall'obbiettivo, onde si formerà sulla retina una immagine esattamente simile alla immagine un poco confusa formata dai raggi sopra un piano perpendicolare al loro corso in EF. In conseguenza, siccome i due coni dei raggi solari BOA CVA formati dalle due semilenti, sono separati o si attraversano a questo punto dell'asse per la distanza EF, le due immagini non sembreranno toccarsi esternamente, ma appariranno separate o soprapposte per l'intervallo EF. Perciò l'errore introdotto nella misura del diametro del Sole sarà l'angolo ERF sotteso da EF ad R punto di mezzo tra O, e V, il quale sta all'angolo EAF ossia OAV " diametro apparente „ dal Sole come AE ad ER od anche ad AR atteso la pic- „ colezza di AE rispetto ad AR „.

Nel surriferito ragionamento del Sig. *Maskeline* si rileva ch'egli ha supposto nel Telescopio l'oculare immobile, e non vi ha dubbio che per le alterazioni dell'occhio l'osservatore potrà in diversi tempi vedere gli oggetti distinti, o più vicini, o più lontani dell'intersezione degli assi dei coni di luce, che procedono da parti opposte dell'oggetto; ma è altresì vero che il fuoco dell'obbiettivo restando il medesimo, l'osservatore sofferto che abbia un cangiamento di vista, non vedrà più che confusamente l'immagine in quel luogo, in cui da prima gli si mostrava distinta. Per la qual cosa in questo nuovo stato non dovrà giudicare della grandezza dell'angolo, se prima col rimover l'oculare non si sarà procurata la visione perfetta. In questa ipotesi è evidente che vedrà le immagini, come se niun cambiamento fosse accaduto all'occhio; e che perciò niuna differenza troverà nella grandezza dell'angolo. Egli è poi agevole il persuadersi che quand'anche l'oculare restasse fisso, e si supponessero alterazioni nel fuoco dell'occhio, non per questo si vedrebbero le immagini in EF separate per quello spazio; poichè i raggi che terminano i diametri delle immagini in EF non sono come si vorrebbero terminati dagli assi VA, OA, ma bensì lo sono dai raggi che appartengono ai medesimi assi, e che vengono rifratti all'estremità delle semilenti come sarebbe MA, NA i quali si accavalciano in EF; onde tanto in EF, quanto in FE, qualunque siasi il cambiamento di vista, le immagini confuse debbono sempre mostrarsi incrocicchiate.

Un facile esperimento basta per confermare l'esposto. Con un Telescopio armato di micrometro obbiettivo si guardi un qualche oggetto; per es. Giove. Accomodato l'oculare per la vision distinta, si separino le semilenti finchè i lembi opposti delle due immagini del pianeta si tocchino; quindi si accosti, o si allontani alcun poco l'oculare dall'obbiettivo, locchè equivale ad un accorciamento, o ad allungamento di vista prodotto da alterazioni dell'occhio; ed in ambedue le posizioni si vedranno sempre le deformi immagini di Giove accavalciarsi, e se per maggior spazio si avvanzi, o si ritiri l'oculare, si perderanno affatto le immagini, rimanendo soltanto una luce dispersa in una forma e posizione eguale od inversa delle due semilenti che costituiscono il micrometro.

Non è così nell'Eliometro del Sig. *Bougner*; ma allorchè si tratta di misurare angoli un poco grandi, il cambiamento di vista, e di distanza dell'oculare può alterare qualche poco la loro grandezza. La ragione è fondata in ciò, che per la vision distinta di un oggetto non fa d'uopo che tutti i raggi emanati da un punto del medesimo coincidano esattamente in un punto della retina; per la qual cosa se O, O' sono gli obbiettivi di quell'istromento convenientemente separati per far coincidere nel loro fuoco F le immagini di due oggetti S, S'; l'occhio situato dietro l'oculare AB potrà nel medesimo tempo vedere perfettamente gli oggetti toccantisi in F o divisi in f o finalmente soprapposti in f' essendo gli angoli formati dai raggi che partono dalle estremità degli obbiettivi minori dell'angolo SFS', per cui può accadere che dallo smuovere l'oculare per lo spazio f, f', o da un cambiamento del fuoco dell'occhio, che a ciò equivalga, i primi non cagionino aberrazione sensibile, mentre per quello stesso movimento la separazione dei due assi SF, S'F si rende manifesta. Di qui si vede che quanto è più grande l'apertura degli obbiettivi la precisione delle misure deve essere maggiore.

Un' altra imperfezione del micrometro obbiettivo applicato ai cannocchiali si è ritenuto esser quella proveniente dalla parallassi ottica, per cui se le due immagini di diversi oggetti si toccano in mezzo al campo del Telescopio, queste allorchè saranno vedute ai bordi si separeranno.

Questo difetto però è di poco momento, essendo assolutamente nullo nel centro del campo, ed insensibile nelle vicinanze del medesimo, ove si giudica sempre del contatto delle immagini, perchè ivi sono più distinte. Ed è poi per questo riguardo senza dubbio meno imperfetto del micrometro a fili in cui la coincidenza de' medesimi co' diversi punti della immagine si fa ad una maggior distanza dal centro.

Finalmente gli errori che si sono commessi col micrometro obbiettivo nella misura dei piccoli angoli si sono da alcuni fatti derivare dalla dilatazione prodotta per la diversa temperatura nel tubo del Telescopio al quale è applicato: ma è facile il conoscere che questo preteso diffetto non ha più fondamento di quello enunciato dal Sig. *Maskeline*, poichè l'allungamento o accorciamento del tubo non facendo che rendere diversa la distanza fra il grande specchio e lo specchietto del telescopio equivale come è manifesto ad un cambiamento di vista o diversa posizione dell' oculare, laonde per quello che abbiam veduto ciò non può per conto alcuno alterare la misura dell' angolo.

Le tre principali surriferite circostanze adunque dalle quali si è creduto dipendere la diversità di valori ottenuti nel misurare in vari tempi un medesimo angolo, non possono per le fatte osservazioni, essere le vere origini di tali errori. Noi dobbiamo per conseguenza derivarli da altre cause, le quali per le osservazioni che ho fatte credo che siano le seguenti.

L' apertura della lente divisa è comunemente grande in proporzione della sua lunghezza focale, e ciò perchè nella misura dei grandi diametri per esempio del Sole, e della Luna, non venga otturata molta parte della bocca del Telescopio ove la detta lente è applicata, e tolta così troppa luce allo specchio. Ora questa troppo ampia apertura cagiona una considerabile aberrazione, per la quale le immagini sono indistinte specialmente nella circostanza delle maggiori separazioni delle semilenti; se a ciò si aggiunge la difficoltà di rimettere le semilenti nella medesima situazione, che avevano prima di tagliarle, sarà questa un'altra circostanza che concorrerà ad aumentare ognor più l'indistinzione delle immagini vedute nel Telescopio. Ma questa indistinzione di contorno porta di necessaria conseguenza che non si possa accertar bene il contatto dei lembi delle immagini. Dunque non è da maravigliarsi se accada sovente di ottenere con siffatto strumento dei valori diversi per un angolo medesimo.

Ho veduto de' micrometri obbiettivi fabbricati dai celebri *Dollond*, e *Short*, che applicati ai rispettivi telescopi rendevano gli oggetti manifestamente confusi, mentre i semplici Telescopi lavorati colla maggior perfezione li mostravano eccellentemente.

Un'altra causa estrinseca contribuisce all'incertezza delle misure, e deriva questa dallo stato dell'atmosfera. Per vedere come ciò avvenga, si rifletta, che i raggi emanati da un punto di un oggetto attraversando l'aria ricevono una quantità di storcimenti dai vapori che incontrano, li quali cambiano la loro primitiva direzione, ed avvegna che la deviazione sia infinitamente piccola, allorquando l'atmosfera è placida e chiara, ella è però assai sensibile in uno stato di aria agitata, o pregna di esalazioni, per cui l'unione di quei raggi raccolti dall'obbiettivo del cannocchiale facendosi in un piccolo spazio, le immagini di due punti vicinissimi dell'oggetto si soprappongono, e ne nasce quindi l'indistinzione. Ora se si considera che le semilenti convenientemente separate per misurare il diametro di un oggetto sono basi di due semiconi di raggi che provengono dai due punti estremi del diametro dell' oggetto, e che questi semiconi di raggi nel loro transito attraverso l'aria possono esser piegati in differenti maniere, si vede chiaramente che le immagini confuse di que' due punti prodotte dalle semilenti potranno essere alternativamente portate al contatto, od alla separazione, o soprapposizione, e cagionar quindi errore nella grandezza dell' angolo.

Tutto ciò viene confermato dalla esperienza, ed ho sempre trovato, allorchè lo stato dell' aria era favorevole, le due immagini immobili; mentre al contrario in circostanze diverse, costantemente le ho vedute in continuo tremore, per cui, ora sembravano toccarsi, ora accavalciarsi, ed altre volte staccarsi, e per quanta attenzione mettessi nell' assegnare il contatto, pure alle volte l' errore nella misura dell' angolo ammontava a più secondi. Ma fortunatamente questo difetto dovuto ad una causa fisica indipendente dall' istrumento, e che può aver condotto in errore alcuni osservatori, viene appunto distrutto nel tempo stesso che l' aspetto dell' oggetto è il più propizio per essere contemplato.

Le maggiori imperfezioni adunque del Micrometro obbiettivo si riducono a mio credere a due soltanto; primo cioè, quella dell' impossibilità, o almeno estrema difficoltà di costruire delle lenti da poter applicare ad ampi Telescopi catadiottrici; e secondariamente, l' altra dell' aberrazione prodotta dalle lenti medesime, la quale rendendo indeterminati i contorni delle immagini turba perciò la precisione della misura degli angoli; ma col trasportare semplicemente come ho immaginato il Micrometro Dollondiano tra l' obbiettivo, e l' oculare di un Telescopio si toglie affatto la prima imperfezione; e si diminuisce di tanto il secondo diffetto da renderlo insensibile; e nel medesimo tempo ci si offre il vantaggio di una più ampia scala unitamente ad altri comodi, e speditezza dell' osservazione.

In effetto, sia MN una lente obbiettiva di un cannocchiale del fuoco OF, e sia B'A' l' immagine di un oggetto AB che

che si vuol misurare. Se in M'N' tra l'obbiettivo, ed il suo fuoco si ponga un'altra lente convessa, questa rinfrangendo di nuovo i raggi formerà in F' una nuova immagine dell'istesso oggetto AB la quale sarà perfettamente simile alla B'A' non differendo in altro che nella grandezza. Supponiamo adesso la lente M'N' divisa in due parti alla maniéra de' Micrometri obbiettivi. È certo che si potranno scostare li due segmenti in modo, che le estremità delle due immagini di AB, che ne provengono coincidono in F': ciò posto egli è d' uopo osservare che il punto A manda alla lente MN un cono di raggi luminosi i quali essendo dalla medesima rifratti si dirigono tutti verso A' per formarvi l' immagine del punto A; ma venendo questi raccolti prima dalle semilenti, si piegano in modo da produrre due immagini del medesimo punto A, una delle quali, e precisamente quella proveniente dalla semilente M'C, si suppone essere in F'. Di tutti que' raggi, che incontrano la semilente M'C quello soltanto che passa pel centro soffre rifrazione. Questo stesso raggio adunque anderebbe in A' ove è diretto in virtù dell'obbiettivo. Riflettendo pertanto che questo medesimo raggio avanti di giungere in A' deve unirsi nel punto F' cogli altri tutti rifratti dalla semilente M'C per farvi l'immagine di A, si vede chiaramente che conducendo per A'F' una retta, questa prolungata passerà pel centro C della semilente, e così tirando la B'F' ella indicherà la direzione del centro C' dell'altra semilente. Da tutto ciò ne segue, che sarà la metà della distanza dei centri delle semilenti alla tangente della metà dell'angolo sotteso dall'oggetto al centro dell'obbiettivo, come O'F' a F'F, essendo il raggio uguale alla distanza focale dell'obbiettivo MN; laonde il valor dell'angolo che si vuol misurare verrà determinato dall'apertura delle semilenti, la quale per un dato angolo può essere aumentata a piacimento, dipendendo questa dalla lunghezza focale dell'obbiettivo, e della lente che serve per Micrometro, come pure dalla diversa distanza di quest'ultima dall'obbiettivo medesimo.

L'estensione della scala però non deve farsi troppo grande, e ciò perchè la misura degli angoli non sia ridotta a troppo stretti confini, ma basta limitarla a tale ampiezza, che gli errori dipendenti dalla medesima siano al disotto di quelle più piccole distanze delle quali si può portar giudizio colla forza del Telescopio.

L'accostamento del micrometro al fuoco del cannocchiale deve anche esso essere limitato; poichè per il troppo grande restringimento del cono di luce, che spetta a ciascun punto dell'oggetto, la laminetta di metallo che attraversa le semilenti intercetterebbe la maggior parte de' raggi che vanno a formare le immagini.

Questa situazione poi del Micrometro fa che gli errori provenienti dalla aberrazione delle lenti, e dalla difficoltà della loro giusta rettificazione siano infinitamente diminuiti tanto per la ristrettezza del cono di luce che riceve, quanto per il suo accostamento al fuoco dell'obbiettivo.

Non picciol vantaggio è poi quello di ottenere le immagini egualmente luminose nella misura dei diversi angoli, locchè non si ha con l'altro Micrometro, a meno che l'apertura delle semilenti non sia molto più grande dell'obbiettivo del cannocchiale.

Finalmente l'applicazione del medesimo a qualunque sorta di Telescopj catadiottrici, o diottrici non ha alcuna difficoltà, ed è con uno di questi istromenti che io ho corredato un Riflettore da me costruito di forma Newtoniana avente otto piedi di fuoco con undici pollici di apertura.

Il Micrometro è attaccato alla parte esterna del cursore che porta il piccolo specchio piano, ove è pur fissato un cerchio graduato per conoscere la posizione del medesimo Micrometro nel suo moto rotatorio. L'oculare conserva sempre una egual distanza dalle semilenti, la quale è circa sette pollici, e la visione distinta nel Telescopio si ottiene col solito movimento del cursore a cui è applicato tutto il macchinismo.

Al fuoco dell'oculare vi sono due sottilissimi fili che s'intersecano ad angoli retti, mentre uno sta paralello alla divisione della lente del Micrometro; e ciò per misurare la differenza di ascensione retta e declinazione di due oggetti nel cielo, quando queste distanze non superino l'estension totale della scala, la quale è di due minuti e 25", ed ogni minuto primo corrisponde ad una separazione di quattordici linee dei centri delle semilenti, cosicchè l'apertura $\frac{14}{60}$ di linea equivale ad un minuto secondo.

Questa scala che ho determinato col calcolo dietro la cognizione dei fuochi dello specchio obbiettivo e della lente divisa, come pure della distanza di questa al fuoco del primo l'ho anche verificata coll'esperimento mediante il solito mezzo di trasportare ad una conveniente distanza un oggetto di cognita grandezza perchè sottenda al centro dello specchio un dato angolo.

Le semilenti possono ambedue muoversi tanto a dritta che a sinistra, e le divisioni sono al di qua, come al di là dello zero, locchè è un grande vantaggio per determinare colla massima esattezza il contatto, come pure la perfetta coincidenza delle due immagini.

L'indistinzione del Telescopio cagionata dalla aggiunta del Micrometro è insensibile, ed anche con esso alla distanza di 890 piedi parigini con un ingrandimento di 1152 si possono leggere dei caratteri, e de' numeri, la di cui altezza è nove punti del medesimo piede di Parigi.

La divisione dell'anello di Saturno, la banda oscura che ne attraversa il disco, come pure li cinque satelliti più esterni restano visibili, quand'anche le semilenti siano separate alla maggior distanza, meglio che in un buon Telescopio Newtoniano di otto piedi di lunghezza, e pollici 6 $\frac{1}{2}$ di apertura senza micrometro.

La sera degli 8 Ottobre alle ore 7 osservando Saturno presi le misure del diametro maggiore dell'anello, e del globo, e trovai che il rapporto di questo a quello sta come 88 : 37, e che l'angolo sotteso dal diametro maggiore dell'anello era

38",06. Il Signor *Barone Zach* (*a*) lo trovò di soli 35",0395 ma altri osservatori lo trovarono maggiore: *Pound* 42"; *Rochon* 40", 6; *Herschel* 46", 682, ed io non ho motivo di credermi lontano dalla vera nemmeno di un minuto secondo, sebbene rilevata da un'unica osservazione, poichè negli esperimenti che io aveva già fatti anche in terra, la differenza di un minuto secondo si è sempre resa a colpo d'occhio manifesta; ed avendo posto ad una distanza di mille piedi, esattamente perpendicolare all'asse del Telescopio un rettangolo il di cui lato maggiore cresceva di $\frac{1}{60}$ dall'altro, mentre il minore sottendeva al centro dello specchio obbiettivo un angolo di un minuto primo, ho sempre trovato, girando il Micrometro dopo aver separate le lenti in modo che le immagini del rettangolo nel senso minore fossero portate al contatto, che le altre immagini nella direzione più lunga si accavalcian di molto.

Io non parlerò qui di tutti i diversi usi de' Micrometri, e de' vantaggi che da essi ritraggono l'Astronomia, la Geodesia, la Nautica, e la Storia naturale perchè troppo cogniti; ma farò bensì riflettere che questo mio istrumento si presta comodamente alla misura della distanza degli oggetti terrestri, cognita la loro grandezza assoluta; poichè non è necessaria che l'applicazione di un *Vernier*, o *Nonnio* al cursore che porta la macchina per marcare le variazioni del fuoco del Telescopio, e di costruire una Tavola che mostri i cambiamenti della scala che da ciò ne derivano.

Ho avvertito che l'oculare del mio istromento porta al suo fuoco due fili che s'incrocicchiano ad angoli retti, e situati in modo che uno di essi riesce paralello al taglio della lente del Micrometro per determinare la differenza di ascensione retta, e declinazione di due oggetti celesti.

È noto come debba operarsi per ottenere il medesimo in-

(*a*) Secondo supplimento alle Effemeridi Astronomiche del Sig. *Bode*.

tento col Micrometro del *Dollond*; ma siccome il metodo da usarsi col mio è alquanto differente a causa dei fili dell'oculare, i quali conservando sempre la medesima posizione riguardo alle semilenti hanno con esse di comune il movimento circolare, così credo che non dispiacerà che io qui mostri questo metodo facile che ci può far conoscere se le piccole stelle hanno intorno ad altre vicinissime maggiori alcun movimento, nella quale delicatissima ricerca si è molto esercitato il celebre *Herschel*.

Siano dunque A, B (*Fig.* 4) due stelle delle quali si voglia sapere la differenza di ascensione retta, e di declinazione. Il circolo MXNY rappresenti il campo del cannocchiale, ed XY, MN i due fili che si segano ad angoli retti, mentre MN è costantemente parallello alla linea che congiugne i centri delle semilenti. Si faccia ruotare il Micrometro finchè una stella per esempio la B scorra col suo moto diurno lungo il filo MN, e quindi si separino le semilenti, fintanto che la seconda immagine *a* della stella A passi il filo orario XY nel medesimo istante che vi passa la B. La distanza de' centri delle semilenti indicherà in questo caso la differenza di ascension retta delle stelle. La ragione ne è evidente. Ciò fatto si giri circolarmente il Micrometro sinchè le due immagini B, *b* della stella B, che scorrevano lungo MN lo attraversino pel loro moto diurno nel medesimo momento. In tal circostanza il Micrometro avrà girato 90°. Perciò la separazione delle semilenti, che da prima si faceva nel senso dell'equatore, si farà ora nella direzione del circolo orario il quale sarà rappresentato da MN. Si avrà dunque la differenza di declinazione se si scostino le semilenti per modo che la immagine più settentrionale della stella più meridionale tocchi, e scorra lungo il filo parallelo all'equatore nel medesimo tempo che è scorso dall'immagine più meridionale della stella più settentrionale.

I fili che servono per l'oggetto suindicato sono anche di un ottimo uso e rimedio per evitare gli errori che possono con questo istrumento commettersi per ragione delle diversità di viste. Infatti un cambiamento di vista fa che attraverso l'oculare non si vedano le immagini distinte in quel luogo, che da prima si scorgevano tali, onde restando l'oculare stesso costantemente ad una egual distanza dal micrometro, per procurarsi la visione distinta converrebbe muovere il cursore che porta il micrometro medesimo insieme al piccolo specchio piano; per un tale movimento l'immagine dell'oggetto cambierebbe di distanza rapporto alla lente bipartita, e così alterandosi questa distanza che è uno degli elementi che determinano l'ampiezza della scala si commetterebbe errore nella misura dell'angolo. Si evita questo inconveniente col mezzo dei sopraddetti fili i quali si conservano sempre egualmente distanti dalle semilenti, e l'oculare avendo un piccolo movimento parziale lungo il tubo permette che i fili possano essere attraverso il medesimo veduti distintamente accostandolo, o allontanandolo secondo le diverse viste. Corretto così col parziale movimento dell'oculare il cambiamento del fuoco dell'occhio, la grandezza dell'angolo non può più per questa ragione venire alterata.

L'uso del micrometro che ho descritto è limitato soltanto alla valutazione di picciolissimi angoli, e quantunque ciò bastasse per riconoscerne la utilità, poichè hanno in tali misure fondamento molte bellissime, ed interessanti ricerche; non ostante ho cercato di renderlo servibile, e sempre colla medesima esattezza, alla misura di angoli maggiori, come sarebbero i diametri del Sole, e della Luna.

A tale effetto bastano due prismi acromatici uguali la di cui rifrazione posti nel Telescopio vicini alle lenti del Micrometro, sia di sedici minuti, e trenta secondi circa. Uniti questi per le basi triangolari in modo che i loro angoli refringenti sieno opposti, e situati in prossimità delle semilenti in tal maniera, che il piano, per cui sono uniti prolungato passi pel taglio delle medesime lenti, la rifrazione totale di ambidue sarà circa minuti 31 la quale potrà essere

Fig. 2.

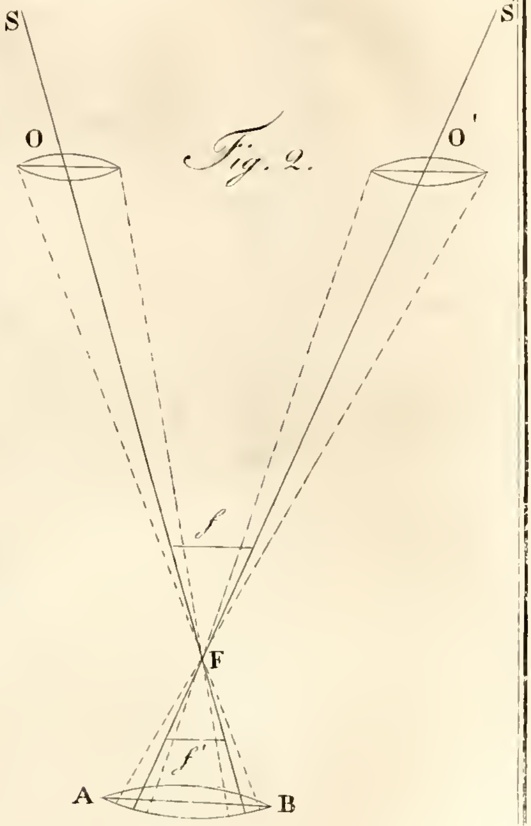


Fig. 4.

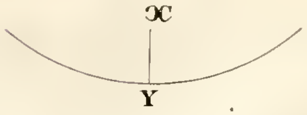


Fig. 1.

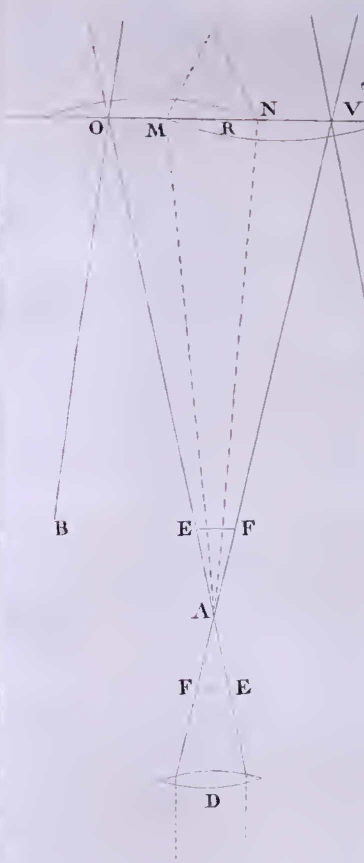

N
V
O
M
R
B
E
F
C
A
F
E
D

Fig. 2.

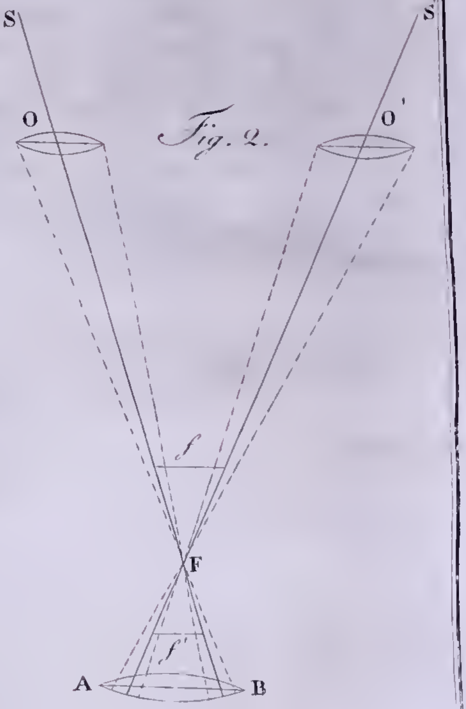


Fig. 3.

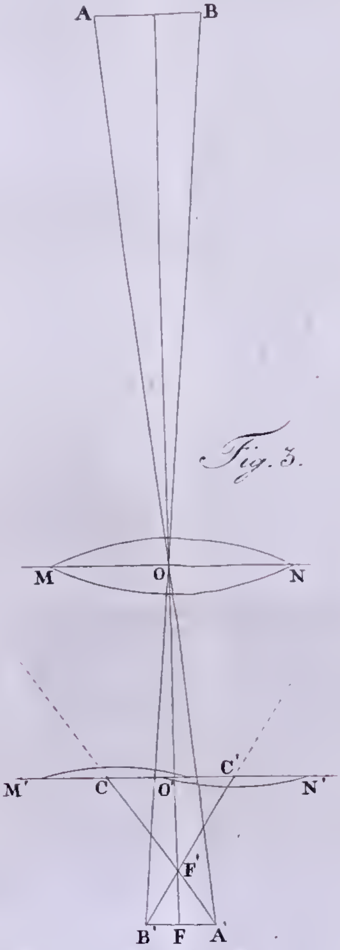
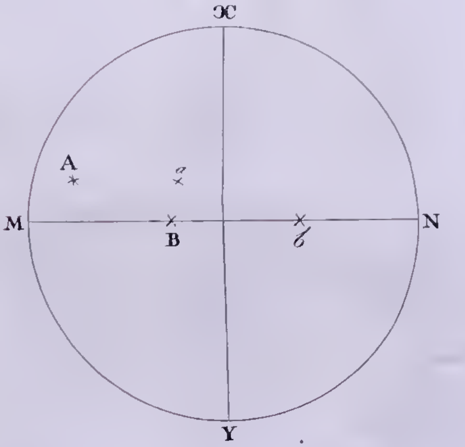

A
B
M
O
N
C'
M'
C
O'
N'
F'
B'
F
A'

Fig. 4.



assegnata molto esattamente colla esperienza. Ora la grandezza delle semilenti può farsi tale che la rifrazione giunga a tre minuti e più senza che ne provenga alcuna aberrazione sensibile; e siccome debbono essere le semilenti montate in modo da separarsi tanto da una parte come dall' altra dello zero della scala, locchè si è di sopra avvertito, così le rifrazioni di queste si faranno, o nel senso di quelle dei prismi, od in senso opposto, e si potranno perciò valutare gli angoli dai 28′ alli 34′, nei quali limiti sono compresi li diametri del Sole, e della Luna.

Ciò che si è detto riguardo alla misura degli angoli sottesi dai diametri del Sole, e della Luna si estende anche ad altri diversi angoli di limitata grandezza sostituendovi altre coppie di prismi acromatici di conveniente rifrazione.

TEORIA DEL NUOVO PIANETA VESTA RICAVATA DALLE OPPOSIZIONI DEGLI ANNI 1808 — 10 — 11 — 12 — 14, CON LE TAVOLE PER CALCOLARE AD OGNI ISTANTE LA SUA POSIZIONE GEOCENTRICA

MEMORIA

Del Signor Giovanni Santini.

Ricevuta li 24 Dicembre 1814.

Dopo la scoperta di questo Pianeta si sono con tutta cura osservate dai più rinomati Astronomi d'Europa le sue opposizioni col Sole, e sonosi pubblicati in diverse Effemeridi, giornali, ed atti d'Accademie i risultati di queste importanti osservazioni. Il celebre Dott. *Gauss* e colle opposizioni osservate, e col mezzo di altre osservazioni, corresse successivamente gli elementi ellittici di questo Pianeta, e determinò così diverse Elissi, le quali rappresentano con molta regolarità le osservazioni di Vesta fatte in diversi punti della sua trajettoria.

Nello scorso Gennajo del corrente anno (1814) intrapresi a calcolare le opposizioni degli anni 1811, 1812 da me osservate in questa Imperiale Regia Specola, servendomi per tale oggetto degli elementi ellittici che trovansi riferiti nel *Vol. XXIV, pag.* 102 del riputato Giornale intitolato *Monatliche correspondenz* etc., e che riferiremo qui per comodo dei nostri lettori.

Epoca 1811 24 Ottobre 0^h in Gottinga. = 25°. 4'. 31''
Moto diurno tropico . . . . . . = 977'',69
Longitudine del Perielio . . . . . = 249 . 19 . 6
Longitudine del Nodo . . . . . . = 103 . 9 . 39
Inclinazione dell'Orbita . . . . . . = 7 . 8 . 22
Eccentricità = sen. 5° . 6'. 0'' . . . = 0 , 088894
Log. semiasse maggiore . . . . . = 0 , 373240.

Questi elementi, rappresentando con sufficiente esattezza le osservazioni fatte intorno all' opposizione dell' anno 1811, si allontanano già sensibilmente dalle osservazioni dell' anno 1812, e perciò ho tentato di determinare un' elissi che soddisfacesse alle quattro osservate opposizioni. Avendo in seguito confrontato i luoghi calcolati in questa ellisse con gli osservati nell' anno 1807, e con l' opposizione del 1814 accaduta in Febbrajo, mi accorsi facilmente, che non era possibile rappresentare queste posizioni senza tenere conto delle perturbazioni prodotte dagli altri pianeti, massime da Giove, le quali per la sua vicinanza, e per la sua forte massa si rendono molto sensibili, ed a tale oggetto calcolai dietro la teoria del celebre *La Place* le disuguaglianze di Vesta, prodotte dall' azione di Giove, e di Marte dipendentemente dalle prime potenze dell' eccentricità. Introducendò nel calcolo queste disuguaglianze ho determinato una nuova ellisse, la quale rappresenta con sufficiente esattezza le posizioni fin ora osservate.

Mi propongo di render conto di questo mio tenue lavoro Astronomico in questa Memoria, che dividerò in due articoli, investigando nel primo l' orbita ellittica, che soddisfà alle opposizioni degl' anni 1808, 1810, 1811, 1812, e nel secondo le perturbazioni dipendenti dall' azione di Giove, e di Marte (non avendo riguardo che alle prime potenze delle eccentricità, ed inclinazioni) unitamente alle variazioni secolari degli elementi ellittici, ed alla ulteriore correzione dei medesimi, avuto riguardo alle perturbazioni. Per ultimo ridurremo le perturbazioni in alcune tavole molto comode, dando le opportune formole per il calcolo dei luoghi geocentrici di Vesta.

ARTICOLO I.

Osservazioni intorno alle opposizioni degli anni 1811, 1812; *Elementi ellittici, che rappresentano le prime quattro opposizioni di Vesta. Osservazioni di Vesta intorno all'opposizione dell'anno* 1814.

I. Osservazioni originali fatte al quadrante Murale di *Ramsden* nel 1811 ponendo in uso il pendolo di *Grant* regolato sul tempo sidereo.

1811	Gior.	Nomi	Tempo del Pendolo	Distanza al Zenit	Bar. in poll. lin.	Term. di Reaumur
Maggio	4	Vesta	$16^h.32'.17'',5$	$57°.55'.30''$	28 . 2	10 , 0
	5	11 Scorpione Vesta	15 . 57 . 5 ,05 16 . 31 . 32 ,68	57 . 36 . 5 57 . 54 . 40	28 . 1	13 , 0
	8	11 Scorpione Vesta	15 . 56 . 55 ,66 16 . 29 . 12 ,32	57 . 36 . 3 57 . 52 . 42	28 . 2	15 , 0
	16	11 Scorpione Vesta	15 . 56 . 40 ,44 16 . 22 . 7 ,66	57 . 36 . 2 57 . 50 . 5	28 . 0	15 , 0
	17	11 Scorpione Vesta	15 . 56 . 38 ,16 16 . 21 . 9 ,66	57 . 36 . 4 57 . 50 . 6	28 . 1	14 , 0
	23	11 Scorpione Vesta	15 . 56 . 26 ,28 16 . 15 . 6 ,64	57 . 36 . 10 57 . 51 . 58	. . .	. . .
	24	11 Scorpione Vesta	15 . 56 . 24 ,12 16 . 14 . 4 ,72	57 . 36 . 3 57 . 52 . 31	. . .	. . .
	25	11 Scorpione Vesta	15 . 56 . 22 , 6 16 . 13 . 2 ,50	. . . . 57 . 53 . 14	28 . 2	16 , 0

Ho calcolato la posizione apparente della stella di confronto, desumendone la posizione media dal catalogo di *Piazzi*, ed applicandovi le opportune correzioni per l'aberrazione, e nutazione, che calcolai colle tavole del Sig. *Gauss*. Ho ottenuto in tal guisa per il giorno 4, e 25 di Maggio le seguenti posizioni apparenti.

	4 Maggio		25 Maggio
11 Scorpione AR app.	$= 15^h.57'.9'',27$	.	$15^h.57'.9'',46$
decl. aust. app.	$= 12°.13'.37'',3$	.	$12°.13'.36'',1$

Col mezzo di queste posizioni apparenti ho dedotto le seguenti AR, e declinazioni di Vesta, rapporto alle quali osservo, che non ho tenuto conto della correzione al catalogo prescritta dal celebre autore nel suo VI libro della Specola Palermitana, e che rapporto alle declinazioni ho calcolato l'errore del principio di numerazione dello stromento per tutte le sere, e di questi errori ho preso il medio, del quale mi sono servito per correggere le distanze al zenit di Vesta osservate. Con queste avvertenze si trovano i seguenti risultati

1811	Gior.	Tempo Medio	AR app. di Vesta	Decl. Austr. app.	Aber. Nut. in A. R.	Aber. nut. par. in declin.
Magg.	4	13^h. 44′. 18″, 1	248°. 4′. 37″, 5	− 12°. 33′. 3″, 5	− 5″, 3	+ 3″, 4
	5	13 . 39 . 40 , 7	247 . 54 . 14 , 8	12 . 32 . 13 , 4		
	8	13 . 25 . 42 , 3	247 . 21 . 28 , 6	12 . 30 . 15 , 4		
	16	12 . 47 . 26 , 9	245 . 39 . 8 , 3	12 . 27 . 38 , 2		
	17	12 . 42 . 35 , 3	245 . 25 . 12 , 6	12 . 27 . 39 , 2		
	23	12 . 13 . 9 , 8	243 . 57 . 26 , 7	12 . 29 . 31 , 2		
	24	12 . 8 . 14 , 3	243 . 42 . 30 , 6	12 . 30 . 4 , 3		
	25	12 . 3 . 18 , 0	243 . 27 . 20 , 4	− 12 . 30 . 47 , 4	− 7 , 0	+ 2 , 7

Mediante i sopradescritti elementi ellittici ho calcolato le Ascensioni rette, e declinazioni di Vesta per il momento di ogn'una delle precedenti osservazioni, ed ho ridotte le posizioni osservate all'equinozio medio, applicandovi l'aberrazione e la nutazione, e la paralasse per renderle comparabili alle calcolate; ho ottenuto così i resultati qui annessi.

	Giorni	AR calcolate dall' Equin. Medio	Errori	Declinazioni calcolate	Errori
Maggio	4	248°. 4'. 18", 8	+ 13", 4	− 12°. 33'. 39", 4	+ 38", 9
	5	247 . 54 . 8 , 0	+ 1 , 5	12 . 32 . 53 , 0	+ 42 , 6
	8	247 . 21 . 17 , 0	+ 6 , 0	12 . 30 . 52 , 5	+ 40 , 1
	16	245 . 38 . 52 , 3	+ 9 , 9	12 . 28 . 14 , 6	+ 39 , 4
	17	245 . 24 . 50 , 4	+ 16 , 0	12 . 28 . 14 , 0	+ 37 , 8
	23	243 . 57 . 3 , 0	+ 17 , 0	12 . 30 . 1 , 8	+ 33 , 6
	24	243 . 42 . 1 , 8	+ 21 , 9	12 . 30 . 39 , 2	+ 37 , 9
	25	243 . 26 . 56 , 8	+ 17 , 4	12 . 31 . 22 , 3	+ 37 , 9
		Medio	+ 16", 4		+ 37", 3

Nel prendere il medio ho escluso le prime tre osservazioni perchè troppo remote dall' opposizione, e discordano un poco dalle altre riguardo all' AR.

Applicando ora ai sopra descritti medj l' errore del catalogo, che inerendo ai precetti del Sig. *Piazzi* è = + 5", 0 in AR, 1", 5 in declinazione, avremo

err. in AR = da = + 21", 4 }; quindi risulta err. in long. = + 14", 2
in decl. = $d\delta$ = + 35 , 8 } err. in latit. = + 39 , 0

ove i segni devono interpretarsi in modo, che la quantità calcolata debba sempre algebraicamente sommarsi col suo errore per ottenere la corrispondente quantità osservata.

Correggendo in tal guisa le longitudini, e latitudini geocentriche calcolate per i giorni 24, e 25 Maggio, e facendo uso delle tavole solari del Sig. *Carlini*, trovo i seguenti risultati

Maggio	Gior.	Tempo Medio	Long. di ⚶ dall' Equin. Med.	Long. di ♁ dall' Equin. Med.	Lat. Bor. ⚶
	24	12^h. 8′. 14″,3	244°. 3′. 39″,0	242°. 49′. 22″,6	8°. 37′. 28″,3
	25	12 . 3 . 18 ,0	243 . 49 . 7 ,3	243 . 46 . 46 ,7	8 . 34 . 7 ,2
Differenze		23 . 55 . 3 ,7	− 14 . 31 ,7	+ 57 . 24 ,1	− 3 . 21 ,1

Di qui risulta, che l'opposizione di Vesta ebbe luogo il giorno 25 Maggio 1811 a 12^h. 50′. 3″, 1 T. medio al mer. di Padova

La long. del Pianeta dall' Equin. Med. era = 243°. 48′. 38″, 9

La latitudine Geocentrica boreale . . . .. 8 . 34 . 5 , 8

II. Opposizione dell'anno 1812.

L'Osservatorio Astronomico fu arricchito in quest'anno dalla Sovrana munificenza di un eccellente stromento dei passaggi del Sig. *Reichenbach* di tre piedi e mezzo, fornito di un ottimo livello internamente lavorato diviso dalla parte della bolla in parti decimali segnate sulla canna medesima di vetro. Ogni parte contiene linee 1 ½ del piede di Parigi, e corrisponde a 0″, 8, come me ne sono assicurato col mezzo del micrometro annesso al quadrante murale di *Ramsden*. Il canocchiale acromatico è di tale forza, e chiarezza, che si può vedere la polare, e β dell'orsa minore nel mezzogiorno. L'apertura dell'obiettivo è di tre pollici. L'illuminazione dello stromento si fa per l'asse, ed ha cinque sottilissimi fili di ragno tesi nel foco dell'oculare dei quali il terzo giace nel piano del Meridiano. È montato nella medesima sala del quadrante, cosicchè dopo di avere osservato l'appulso di un astro ai cinque fili dello stromento dei passaggi si ha ancora il tempo di osservare al quadrante la distanza al zenit.

Le seguenti osservazioni sono state fatte nel modo indicato riducendo gli appulsi ai cinque fili dello stromento dei passaggi al terzo filo, ed osservando le distanze al zenit nel quadrante di *Ramsden*, ove è da notarsi, che si sono lette le due divisioni, e si è preso il medio.

Giorni	Nomi delle Stelle	app. al 3° filo	Distanze al Zenit	Barom. in poll. lin.	Term. Reaumur.
Ottobre 16 1812	*o* della Balena	2^h. 7'. 47'',42	49°. 12'. 18''		
	Vesta	2 . 22 . 4 , 72	42 . 51 . 53		
	γ Balena	2 . 31 . 30 , 66	42 . 56 . 12 , 5	27^p. 11^l, 5	12°, 0
17	*o* Balena	2 . 7 . 47 , 30	49 . 12 . 27		
	Vesta	2 . 21 . 8 , 70	42 . 56 . 47		
	γ Balena	2 . 31 . 30 , 34	42 . 56 . 18		
	ρ Ariete	2 . 43 . 7 , 02			
	γ Perso	2 . 49 . 13 , 42			
	β Perseo	2 . 53 . 56 , 26			
	z Eridano	3 . 4 . 38 , 50		28 . 0 , 7	11 , 3
24	ν Pesci	1 . 29 . 37 , 18			
	o Pesci	1 . 33 . 26 , 50			
	ε Cassiopea	1 . 39 . 0 , 04			
	α Ariete	1 . 54 . 33 , 80	22 . 49 . 0		
	o Balena	2 . 17 . 48 , 82	49 . 12		
	Vesta	2 . 14 . 23 , 55	43 . 28 . 15		
	δ Balena	2 . 27 . 48 , 60	45 . 51 . 38		
	γ Balena	2 . 31 . 30 , 85	42 . 56 . 23	28 . 0 , 0	11 , 0
25	ν Pesci	1 . 29 . 36 , 55	40 . 50 . 40		
	ε Cassiopea	1 . 39 . 0 , 60	— — —		
	α Ariete	1 . 54 . 33 , 60	22 . 48 . 59		
	o Balena	2 . 7 . 48 , 44	49 . 12 . 29		
	Vesta	2 . 13 . 24 , 72	43 . 32 . 22		
	δ Balena	2 . 27 . 48 , 66	45 . 51 . 42		
	γ Balena	2 . 31 . 31 , 58	42 . 56 . 22	28 . 0 , 4	10 , 6
27	ν Pesci	1 . 29 . 37 , 47	40 . 50 : 51	quadrante rimesso	
	ε Cassiopea	1 . 39 . 1 , 40	— — —		
	α Ariete	1 . 54 . 34 , 48	22 . 49 . 14		
	o Balena	2 . 7 . 49 , 55	— — —		
	Vesta	2 . 11 . 26 , 64	43 . 40 . 25		
	δ Balena	2 . 27 . 49 , 42	45 . 51 . 59		
	γ Balena	2 . 31 . 32 , 34	42 . 56 . 29		
Novemb. 2	γ Pesci	1 . 29 . 45 , 58			
	ε Cassiopea	1 . 39 . 9 , 36			
	α Ariete	1 . 54 . 42 , 38	22 . 49 . 13		
	Vesta	2 . 5 . 42 , 05	44 . 0 . 47 , 2		
	δ Balena	2 . 27 . 57 , 24	45 . 52 . 0 , 2		
	γ Balena		42 . 56 . 34 , 9	28 . 5 , 0	9 , 7

Le posizioni apparenti delle stelle di confronto, prendendo le posizioni medie del catalogo sopra citato del Sig. *Piazzi*, mi risultano come segue

	Per il 16 Ottobre		Per il 2 Novembre	
Nomi	AR. app. in tempo	declinaz. appar.	AR. appar. in tempo	Declin. apparenti
v Pesci	1^h.31'.42'',14	+ 4°.32'.13'',3	1^h.31'.42'',19	+ 4°.32'.13'',1
o Pesci	1.35.31,65	+ 8.15.42,9	1.35.31,74	+ 8.15.43,2
α Ariete	1.56.38,81	+22.34.22,6	1.56.38,91	+22.34.24,3
o Balena	2. 9.53,77	− 3.49.54,9	2. 9.53,98	− 3.49.56,0
δ Balena	2.29.53,70	− 0.29.16,7	2.29.53,91	− 0.29.18,2
γ Balena	2.33.37,24	+ 2.26.33,0	2.33.37,36	+ 2.26.34,0
ρ Ariete	2.45.53,08			
γ Perseo	2.51.19,58			
β Perseo	2.56. 2,65			
z Eridano	3. 6.44,85			

Da queste posizioni apparenti ho dedotte le sottonotate ascensioni rette e declinazioni osservate di Vesta, ove devo notare, che ho aggiunto alle declinazioni 3'',9 per liberarle dall'effetto della paralasse. Quindi facendo uso delle tavole del Sig. *Carlini* rapporto al Sole, e dei superiori elementi ellittici di Vesta, ho calcolato le AR, e declinazioni per gl'istanti delle osservazioni, e le ho cangiate in apparenti applicandovi l'effetto dell'aberrazione, e la nutazione. Ottenni così i seguenti risultati.

Giorni	Tempo medio in Padova	AR apparente calcolata	AR apparente calcolata	Differenza	Declinaz. boreale osservata	Declinaz. boreale calcolata	Differenza
Ottob. 16	12^h.42'.50'',4	36°. 2'.47'',8	35°.45'.45'',3	+17'. 2'',5	2°.30'.51'',8	2.23.30,7	+7'.21'',1
17	12.37.58,5	35.48.46,5	35.31.44,2	17. 2,3	2.26. 4,9	2.18.42,0	7.22,7
24	12. 3.41,5	34. 7. 9,7	33.50.15,6	16.54,1	1.54.39,2	1.47.13,5	7.25,7
25	11.58.47,7	33.52.32,3	33.35.24,0	17. 8,3	1.50.32,0	1.43. 7,2	7.24,8
27	11.48.57,1	33.22.48,2	33. 5.47,4	17. 0,8	1.42.39,8	1.35.17,0	7.22,8
Nov. 2	11.19.30,2	31.54.39,8	31.37.49,6	16.50,2	1.22.19,6	1.14.55,2	7.24,8
			Medio	16.59,7		Medio	7.23,6

Per tener conto della correzione al catalogo ho aumentato il medio in ascensione retta di 5″,0 e diminuito quello in declinazione di 1″, 5. Ponendo pertanto

$$\left.\begin{array}{l} da = + 17'.\ 4'',7 \\ d\delta = + \ 7.22,1 \end{array}\right\} \text{trovasi} \;..\; \begin{array}{l} dl = + 18'.50'',2 \\ db = + \ 1.13,7 \end{array}$$

applicando queste correzioni alle longitudini, e latitudini geocentriche calcolate cogli elementi per i giorni 24, e 25 di Ottobre, e partendo dall'equinozio medio, trovansi i seguenti risultati.

Giorni	Temp. Medio	Long. di ⚶	Long. di ♁	Latit. geoc. di ⚶
24	12. 3.41,5	32°. 31′. 18″, 6	31°. 25′. 18″, 5	— 11°. 6′. 22″, 1
25	11.58.47,7	32 . 15 . 41 , 9	32 . 25 . 0 , 7	— 11 . 5 . 14 , 5
Differ.	23.55. 6,2	— 15 . 36 , 7	+ 59 . 42 , 2	+ 1 . 7 , 6

quindi il moto composto è = 75″. 18″,9. L'istante dell'opposizione trovasi 25 Ottobre $9^h.2'.39''.7$ tempo medio al meridiano di Padova

Longitudine di ⚶ in opposizione = 32°. 17′. 41″, 0
Latitudine geocentrica australe = 11 . 5 . 26 , 3

III. Ricerca dell'ellisse che soddisfa alle opposizioni degli anni 1808 - 1810 - 1811 - 1812.

Prima di dare i dettagli del calcolo numerico, che ho eseguito per giungere al desiderato fine, credo opportuno di riferire nei due seguenti Problemi le formule, di cui mi sono servito, le quali non sono, che un caso particolare di formule più generali sviluppate dal celebre *Gauss* nell'insigne sua opera intitolata: *Theoria motus corporum cœlestium in sectionibus conicis solem ambientium. Amburgi* 1809.

Pro-

Problema I.

Trovare l'espressione generale del differenziale della longitudine eliocentrica di un pianeta.

Sia per tale oggetto

L l'epoca delle longitudini medie
t il tempo decorso dopo l'epoca espresso in giorni
z il moto diurno sidereo del Pianeta
$e = \text{sen.}\phi =$ l'eccentricità dell'orbita
$\pi =$ la longitudine del perielio al momento domandato
☊ la longitudine del nodo ascendente
i l'inclinazione dell'orbita
a la distanza media
M l'anomalia media del pianeta
E l'anomalia eccentrica
v l'anomalia vera
r il raggio vettore.

Le formule del moto ellittico danno ... $M = E - \text{sen.}\phi\,.\,\text{sen.}E$

$$r = \frac{a\,.\cos.^2\phi}{1+\text{sen.}\phi.\cos.v}\,;\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}.\text{tang.}\tfrac{1}{2}E = \text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi)\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}E;$$

Il valore di r si può ancora scrivere sotto il seguente aspetto

$$r = \frac{a\,.\cos.^2.\phi}{(1+\text{sen.}\phi)\cos.^2\frac{1}{2}v + (1-\text{sen.}\phi)\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}v} = \frac{a\,\cos.^2\phi\,.\cos.^2\frac{1}{2}E}{(1+\text{sen.}\phi)\cos.^2\frac{1}{2}v}\,.$$

Da quest'ultima equazione deducesi ... $\sqrt{[r(1+\text{sen.}\phi)]}\cos.\frac{1}{2}v = \sqrt{a}\,.\cos.\phi\,.\cos.\frac{1}{2}E$ che moltiplicata per il valore di $\text{tang.}\frac{1}{2}v$ dà ... $\sqrt{[r(1-\text{sen.}\phi)]}\,.\,\text{sen.}\frac{1}{2}v = \sqrt{a}\,.\cos.\phi\,.\,\text{sen.}\frac{1}{2}E$. Le quali due equazioni sono molto comode per dedurre i valori di v, e di r tosto che siasi calcolato il valore di E.

Il prodotto di queste due equazioni dà

$$r\,\text{sen.}\,v = a\,.\cos.\phi\,.\,\text{sen.}E$$

e la somma dei loro quadrati ci porge

$$r = \frac{a\,.\cos.^2.\phi}{1+\text{sen.}\phi}.\cos.^2\tfrac{1}{2}E + \frac{a\,.\cos.^2.\phi}{1-\text{sen.}\phi}.\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}E$$

ovvero $r = a(1 - \text{sen.}\varphi\,.\,\text{sen.}\,\text{E})$.

Riunendo ora queste diverse formule avremo

$$\text{M} = \text{E} - \text{sen.}\,\varphi\,.\,\text{sen.}\,\text{E}\;\ldots\;(1)$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}v = \text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)\,.\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{E}\;\ldots\;(2)$$

$$r = \frac{a\cos.^2\varphi}{1 + \text{sen.}\varphi\cos.v} = \frac{a\,.\cos.\varphi\,.\,\text{sen.E}}{\text{sen.}\,v} = a(1 - \text{sen.}\varphi\cos.\text{E})\ldots(3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{r}\,.\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{2a}\,.\,\text{sen.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)\,.\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}\text{E}\\ \sqrt{r}\,.\,\cos.\tfrac{1}{2}v = \sqrt{2a}\,.\cos.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)\,.\cos.\tfrac{1}{2}\text{E}\end{array}\right\}\ldots(4).$$

Il differenziale della prima equazione (avendo riguardo alla terza) dà

$$d\text{E} = \frac{a\,.\,d\text{M}}{r} + \frac{a\,.\cos.\varphi\;\text{sen.E}}{r}\,.\,d\varphi = \frac{a\,.\,d\text{M}}{r} + \text{sen.}\,v\,.\,d\varphi\,.$$

Se nel differenziale logaritmico della seconda equazione si sostituisce il precedente valore di $d\text{E}$, dopo le opportune riduzioni si ottiene

$$dv = \frac{a^2\cos.\varphi}{r^2}\,.\,d\text{M} + \frac{a^2\,.\,\text{sen.E}}{r^2}\left(\cos.^2\varphi + \frac{r}{a}\right).\,d\varphi\,.$$

Se ora indichiamo per H la longitudine nell'orbita, avremo $\text{H} = v + \pi$ e perciò ... $d\text{H} = dv + d\pi$. Frattanto essendo $\text{M} = \text{L} + tz - \pi + 50'',2\,.\,\frac{t}{365}$ sarà $d\text{M} = d\text{L} + t\,.\,dz - d\pi$.

Quindi otterremo

$$d\text{H} = \frac{a^2\,.\cos.\varphi}{r^2}.d\text{L} + \frac{a^2\,.\cos.\varphi}{r^2}.t.dz + \left(1 - \frac{a^2\,.\cos.\varphi}{r^2}\right).d\pi + \frac{a^2}{r^2}\text{sen.E}\left(\cos.^2\varphi + \frac{r}{a}\right)d\varphi.$$

Per trovare ora il differenziale della longitudine eliocentrica ridotta all'ellittica, si consideri il triangolo sferico rettangolo, la di cui ipotenusa è $u = \text{H} - \Omega$, il lato adiacente all'angolo i inclinazione dell'orbita è $= \lambda - \Omega$, il lato opposto, ossia la latitudine eliocentrica sia $= \text{B}$. Si avranno dalla trigonometria le seguenti relazioni.

$$\text{tang.}(\lambda - \Omega) = \cos.i\,.\,\text{tang.}u$$

$$\cos.u = \cos.(\lambda - \Omega)\,.\cos.\beta$$

$$\text{tang.}\beta = \text{sen.}i\,.\cos.(\lambda - \Omega)\,.\,\text{tang.}u\,.$$

Differenziando la prima di queste equazioni, ed avendo riguardo alle altre due, si ottiene

$$d\lambda = d\Omega + \frac{\cos. i}{\cos.^2 \beta} . du - \text{tang.} \, B . \cos. (\lambda - \Omega) . di .$$

Ora $du = dH - d\Omega$; sostituendo nella precedente i valori di du e di dH si otterrà il differenziale della longitudine eliocentrica

$$d\lambda = \frac{a^2 \cos. \varphi . \cos. i}{r^2 \cos.^2 \beta} . dL + \frac{a^2 \cos. \varphi . \cos. i}{r^2 \cos.^2 \beta} . tdz + \frac{\cos. i}{\cos.^2 \beta} \left(1 - \frac{a^2 \cos. \varphi}{r^2} \right) . d\pi$$
$$+ \frac{a^2 \cos. i}{r^2 \cos.^2 \beta} . \text{sen.} \, E \left(\frac{r}{a} + \cos.^2 \varphi \right) . d\varphi + \left(1 - \frac{\cos. i}{\cos.^2 \beta} \right) . d\Omega - \cos. (\lambda - \Omega) . \text{tang.} \beta . di$$

Che se si volesse eliminare il valore di E dall'espressione precedente, (la qual cosa può essere comoda quando si abbiano già delle tavole per l'equazione del centro, e per il raggio vettore) allora non si deve far altro, che sostituire nel coefficiente di $d\varphi$ il valore di sen. E, che è ... $\text{sen.} E = \frac{r . \text{sen.} v}{a . \cos. \varphi}$, il quale diverrà in allora ... $\frac{a . \cos. i . \text{sen.} v}{r . \cos.^2 \beta . \cos. \varphi} \left(\frac{r}{a} + \cos.^2 \varphi \right)$.

Problema II.

Trovare l'espressione generale del differenziale della latitudine geocentrica di un Pianeta in opposizione.

Sia r la distanza del Pianeta al Sole nel momento dell'opposizione, ed R la distanza della terra al Sole per il medesimo istante. Il triangolo rettilineo, che ha i suoi vertici nel centro del Sole, del Pianeta, e della terra darà (chiamando b la latitudine geocentrica, β la latitudine eliocentrica del Pianeta)

$$\frac{\lambda}{r} \text{sen.} \, b = \text{sen.} \, (b - \beta)$$

la quale differenziata nell'ipotesi, che variino tutti gli elementi dell'orbita ellittica del Pianeta, porge

$$db = - \frac{\text{sen.} b . \text{sen.} (b - \beta)}{\text{sen.} \beta} . \frac{dr}{r} + \frac{\text{sen.} b . \cos. (b - \beta)}{\text{sen.} \beta} d\beta$$

nella quale dobbiamo ora introdurre i valori di dr, e di $d\beta$ espressi per i differenziali degli elementi dell'orbita.

Il valore di $\frac{dr}{r}$ otterrassi facilmente prendendo il differenziale logaritmico dell'equazione ... $r = a(1 - \text{sen.}\phi.\text{cos.E})$, e rammentando, che $d\text{E} = \frac{a.d\text{M}}{r} + \text{sen.}v.d\phi$ si troverà facilmente

$$\frac{dr}{r} = \frac{da}{a} + \frac{a^2}{r^2}\,\text{sen.}\phi.\text{sen.E}.d\text{M} + \frac{a}{r}(\text{sen.}\phi.\text{sen.}v.\text{sen.E} - \text{cos.}\phi.\text{cos.E})d\phi.$$

Per eliminare E da questa espressione si rifletta, che

$$\text{sen.E} = \frac{r.\text{sen.}v}{a.\text{cos.}\phi} = \frac{\text{cos.}\phi\ \text{sen.}v}{1 + \text{sen.}\phi.\text{cos.}v}$$

$$\text{cos.E} = \frac{\text{sen.}\phi + \text{cos.}v}{1 + \text{sen.}\phi.\text{cos.}v}.$$

Introducendo questi valori di sen.E, cos.E nel precedente valore di $\frac{dr}{r}$, e facendo le opportune riduzioni, si ottiene

$$\frac{dr}{r} = \frac{da}{a} + \frac{a.\text{tang.}\phi.\text{sen.}v}{r}.d\text{M} - \frac{a.\text{cos.}\phi\,\text{cos.}v}{r}\,d\phi$$

dove in luogo di $\frac{da}{a}$ si può scrivere ancora ... $-\frac{2}{3}.\frac{dz}{z}$, giacchè per la terza legge di *Keplero* si ha ... $a^3 = \text{K}.z^{-2}$ essendo K costante per tutti i pianeti. Quanto poi al valore di $d\beta$ conviene ricavarlo dal differenziale della latitudine eliocentrica. Ora essendo il Pianeta in opposizione, noi possiamo servirci della longitudine osservata per calcolare la latitudine eliocentrica, nel qual caso essa non varierà che per una variazione nel nodo, e nell'inclinazione. Chiamando pertanto α la longitudine eliocentrica osservata, avremo per determinare tang. β l'equazione

$$\text{tang.}\beta = \text{tang.}i.\text{sen.}(\alpha - \Omega)$$

la quale differenziata logaritmicamente nel supposto di α costante darà

$$\frac{d\beta}{\text{sen.}\beta} = \frac{2.\text{cos.}\beta}{\text{sen.}2i}.di - \text{cos.}\beta.\text{cot.}(\alpha - \Omega).d\Omega$$

sostituiti questi valori nell'espressione superiormente determinata per db, ed osservando che $dM = dL + t \,.\, dz - d\pi$ avremo

$$
\begin{aligned}
db = & -\frac{a \,.\, \text{sen.}\, b \,.\, \text{sen.}(b-\beta) \,.\, \text{tang.}\,\phi \, \text{sen.}\, v}{r \, \text{sen.}\, \beta} \,.\, dL + \frac{a \,.\, \text{sen.}\, b \,.\, \text{sen.}(b-\beta) \, \text{tang.}\,\phi \,.\, \text{sen.}\, v}{r \,.\, \text{sen.}\, \beta} \,.\, d\pi \\
& + \left(\frac{2}{3} \,.\, \frac{\text{sen.}\, b \,.\, \text{sen.}(b-\beta)}{z \,.\, \text{sen.}\, \beta \,.\, \text{sen.}\, 1''} - \frac{a \,.\, t \,.\, \text{sen.}\, b \,.\, \text{sen.}(b-\beta) \, \text{tang.}\,\phi \,.\, \text{sen.}\, v}{r \,.\, \text{sen.}\, \beta} \right) . \, dz \\
& + \frac{a \,.\, \text{sen.}\, b \,.\, \text{sen.}(b-\beta) \, \text{tang.}\,\phi \,.\, \cos.\, v}{r \, \text{sen.}\, \beta} \,.\, d\varphi + \frac{2 \,.\, \text{sen.}\, b \cos.(b-\beta) \cos.\, \beta}{\text{sen.}\, 2i} \,.\, di \\
& - \text{sen.}\, b \,.\, \cos.(b-\beta) \cos.\, \beta \,.\, \cot.(\alpha - \Omega) \,.\, d\Omega \, \ldots\ldots\ldots \text{(B)}
\end{aligned}
$$

ove nel coefficiente di dz si è diviso per sen. 1″ il termine diviso per z ad oggetto di ridurre il valore di z dato in secondi a parti di raggio.

Per dedurre ora dalle formule precedenti le correzioni degli elementi dell'orbita (correzioni, che supporremo tanto piccole, che le loro potenze superiori alla prima siano trascurabili) calcoleremo cogli elementi stessi già molto prossimi al vero le longitudini eliocentriche, e le latitudini geocentriche per l'istante dell'opposizione. Supponiamo, che sia

la longitudine osservata $= \alpha$
la latitudine osservata $= \theta$
la longitudine calcolata $= \lambda$
la latitudine geocentrica calcolata $= b$.

Porremo $\alpha = \lambda + d\lambda$; $\theta = b + db$, donde ricaveremo $d\lambda = \alpha - \lambda$, $db = \theta - b$. Scrivendo questi valori nelle equazioni (A), (B), e riducendole a numeri per ogni opposizione si avranno delle equazioni numeriche dalle quali ricaveremo le correzioni degli elementi, le quali se saranno troppo forti, daranno un nuovo sistema di elementi, rapporto al quale ripetendo le operazioni medesime, potremo determinare in modo più preciso le sue correzioni, e quindi ottenerne un altro sistema molto più prossimo al vero. Apparisce di qui, che se il pianeta descrive un'ellisse, tre sole opposizioni basteranno a determinare queste correzioni. Se pertanto gli elementi corretti con queste opposizioni non soddisfanno alle altre opposizioni, sarà un indizio o della poca esattezza delle osservazioni o della necessità di tenere conto delle disuguaglianze provenienti dalle attrazioni degli altri Pianeti.

Prima di passare alle applicazioni numeriche, crediamo bene rammentare, che le latitudini geocentriche devono calcolarsi colle seguenti formule.

$$(1)\ \text{tang.}\beta = \text{sen.}(\alpha - \Omega).\text{tang.}i;\quad (2)\ \text{tang.}b = \frac{r.\cos.\theta}{r.\cos.\theta - R}.\text{tang.}\beta.$$

Applicazione delle precedenti formule alle citate opposizioni.

Le opposizioni di Vesta da me osservate, e ridotte all' equinozio medio somministrano i seguenti dati

	Tempo Medio in Padova	Long. elioc. $= \alpha$	Latit. Geocen. $= \theta$ (*)
1808. 8 Settembre	8h. 4'. 8"	345°. 53'. 47", 5	− 11°. 0'. 24", 1
1810. 1 Gennajo	3 . 9 . 45, 5	100 . 36 . 31, 2	− 0 . 31 . 3, 3
1811. 25 Maggio	12 . 50 . 3, 1	243 . 48 . 38, 9	+ 8 . 34 . 0, 8
1812. 25 Ottobre	9 . 2 . 39, 7	32 . 17 . 41, 0	− 11 . 5, 26, 3

Nel ridurre a numeri le formule (A), (B) date superiormente ho supposto gli elementi ellittici invariabili, ed ho soltanto tenuto conto della precessione degli equinozj nel ridurre la posizione del perielio, e del nodo agli istanti delle sopra riferite opposizioni. Dietro queste avvertenze ottenni i seguenti risultati.

(*) Le opposizioni di Vesta degli anni 1808, 1810 trovansi riferite con molte altre osservazioni degli altri Pianeti in una mia Memoria inserita nel volume XVI della Società Italiana.

Opposizione dell' anno 1808.

$M = 86^\circ.\,37'.\,57'',2$; $\beta = -6^\circ.\,21'.\,23''$; $\lambda = 345^\circ.\,53'.\,39'',5$
$E = 91\,.\,43\,.\,24\,,6$ $\log.r = 0,3743998$ $b = -11.\,0\,.\,50,6$
$v = 96\,.\,48\,.\,51\,,8$ $\log.R = 0,0028180$ $t = -479,79557$

ove è da osservarsi, che il valore di t suppone, che venga fissata l'epoca nell'istante dell'opposizione accaduta l'anno 1810. Quindi risulta

$$(A) = 0,99527\,.\,dL - 477,53\,.\,dz + 0,00933\,.\,d\pi + 1,99233\,.\,d\varphi - 0,00460\,.\,d\Omega - 0,05093\,.\,di = +8'',0$$

$$(B) = +0,01238\,.\,dL - 25,65\,.\,dz - 0,01238\,.\,d\pi + 0,01651\,.\,d\varphi + 0,09732\,.\,d\Omega - 1,53460\,.\,di = +26'',5$$

Opposizione dell' anno 1810.

$M = 216^\circ.\,55'.\,3'',4$; $\beta = -0^\circ.\,18'.\,53''$; $\lambda = 100^\circ.\,36'.\,25'',0$
$E = 214\,.\,3\,.\,53\,,1$ $\log.r = 0,4040990$ $b = -0\,.\,30\,.\,50\,,1$
$v = 211\,.\,18\,.\,30\,,4$ $\log.R = 9,9926633$ $t = 0,0$

d'onde si deduce

$$(A) = 0,85744\,.\,dL + 0,00\,.\,dz + 0,13483\,.\,d\pi - 0,99564\,.\,d\varphi + 0,00773\,.\,d\Omega + 0,00549\,.\,di = +6'',0$$

$$(B) = -0,00024\,.\,dL - 0,80\,.\,dz + 0,00024\,.\,d\pi + 0,00451\,.\,d\varphi - 0,20438\,.\,d\Omega - 0,07278\,.\,di = -13'',2$$

Opposizione dell' anno 1811.

$M = 355^\circ.\,14'.\,30'',5$; $\beta = +4^\circ.\,32'.\,20''$; $\lambda = 243^\circ.\,48'.\,32'',1$
$E = 354\,.\,46\,.\,41\,,8$ $\log.r = 0,3329852$ $b = 8\,.\,33\,.\,18\,,2$
$v = 354\,.\,17\,.\,32\,,2$ $\log.R = 0,0058253$ $t = +509,40298$

$$(A) = 1,19710\,.\,dL + 609,82\,.\,dz - 0,19860\,.\,d\pi - 0,20827\,.\,d\varphi + 0,00150\,.\,d\Omega + 0,06155\,.\,di = +6'',8$$

$$(B) = 0,00128\,.\,dL + 19,17\,.\,dz - 0,00128\,.\,d\pi + 0,14317\,.\,d\varphi + 0,18053\,.\,d\Omega + 1,19960\,.\,di = +42'',6$$

Opposizione dell'anno 1812.

$M = 136^\circ.\ 7'.46'',4$; $\beta = -6^\circ.44'.45'',5$; $\lambda = 32^\circ.6'.18'',4$
$E = 139.26.28,7$ $\log.r = 0,4016230$ $b = -11.5.52,2$
$v = 142.39.\ 1,0$ $\log.R = 9,9970829$ $t = +1028,24508$

Con questi dati si ottiene

$$(A)\ldots 0,87922.dL + 904,15.dz + 0,12678.d\pi + 1,18215.d\phi$$
$$-0,00600.d\Omega + 0,03846.di = +682'',6$$

$$(B)\quad 0,00631.dL - 11,01.dz - 0,00631.d\pi + 0,09225.d\phi$$
$$-0,06620.d\Omega - 1,54730.di = +25'',9.$$

Avendo ora otto equazioni fra sei indeterminate, converrebbe combinarle fra loro nella maniera più vantaggiosa per ricavarne le correzioni degli elementi dell'orbita. La piccolezza dei coefficienti di $d\Omega$, e di di nelle quattro equazioni in (A), fa sì che si possano da principio risolvere queste separatamente trascurando l'influenza di $d\Omega$, e di di nelle medesime. Si otterranno così i valori di dL, dz, $d\phi$, $d\pi$, che sostituiti nelle equazioni (B) daranno quattro equazioni, che combinate fra loro, daranno i valori di $d\Omega$, di. Le quattro equazioni (A) divise per il coefficiente di dL divengono le seguenti.

$$(1)\ldots dL - 479,80.dz + 0,009574.d\pi + 2,00131.d\phi$$
$$= +8''.038 - 0,004622.d\Omega + 0,05117.di$$

$$(2)\quad dL + 0,00.dz + 0,157250.d\pi - 1,16120.d\phi$$
$$= +7,231 - 0,009015.d\Omega - 0,00640.di$$

$$(3)\quad dL + 509,40.dz - 0,165898.d\pi - 0,17398.d\phi$$
$$= +5,680 - 0,001253.d\Omega - 0,05143.di$$

$$(4)\quad dL + 1028,25.dz + 0,144198.d\pi + 1,34454.d\phi$$
$$= +776,370 + 0,006824.d\Omega - 0,04374.di.$$

Sottraendo una dall'altra queste equazioni secondo l'ordine sotto notato, e dividendo per i coefficienti di dz, si ottengono le tre seguenti equazioni.

$$(2)-(1) = (1)' = dz + 0,0003082.d\pi - 0,0065913.d\phi$$
$$= -0'',001682 - 0,000028.d\Omega - 0,000120.di$$

(3)

$$(3)-(2)=(2)'=dz-0,0006344\,.\,d\pi+0,0019380\,.\,d\varphi$$
$$=-0,003045+0,000015\,.\,d\Omega-0,000086\,.\,di$$
$$(4)-(2)=(3)'=dz-0,0000127\,.\,d\pi+0,0024369\,.\,d\varphi$$
$$=+0,748008+0,000015\,.\,d\Omega-0,000086\,.\,di$$

Da queste si formano ora le due seguenti

$$(1)'-(2)'=d\pi-9,04807\,.\,d\varphi=+1'',446-0,03607\,.\,di-0,04562\,.\,d\Omega$$
$$(1)'-(3)'=d\pi-28,13400\,.\,d\varphi=-2336,210-0,21676\,.\,di-0,13400\,.\,d\Omega$$

Per ultimo si dedurranno i valori di $d\varphi$, $d\pi$, dz, dL dalle precedenti serie di equazioni espressi come segue:

$$d\varphi=+\ 122'',48+0,00463\,.\,d\Omega+0,01182\,.\,di$$
$$d\pi=+1109\ ,65-0,00373\,.\,d\Omega+0,07092\,.\,di$$
$$dz=+\ 0'',463629+0,000003\,.\,d\Omega-0,000065\,.\,di$$
$$dL=-25\,,05-0,00307\,.\,d\Omega-0,00388\,.\,di\,.$$

Sostituendo ora i primi valori prossimi di dL, dz, $d\pi$, $d\varphi$ nelle quattro equazioni (B) si formano le quattro seguenti

$$(1)+0,09732\,.\,d\Omega-1,53460\,.\,di=+50'',5$$
$$(2)-0,20438\,.\,d\Omega-0,07278\,.\,di=-13\ ,7$$
$$(3)+0,18053\,.\,d\Omega+1,19960\,.\,di=+17\ ,6$$
$$(4)-0,06620\,.\,d\Omega-1,54730\,.\,di=+26\ ,8$$

le quali combinate col noto metodo dei minimi quadrati somministrano le due seguenti

$$+0,0882\,.\,d\Omega+0,1845\,.\,di=+\ 9'',118$$
$$+0,1845\,.\,d\Omega+6,1935\,.\,di=-97\ ,804\,.$$

Risolvendo queste due ultime equazioni si ottiene $di=-20'',2$; $d\Omega=+145'',5$.

Se ora si sostituiscono questi valori di di, e $d\Omega$ nei valori sopra riferiti di $d\varphi$, dz, $d\pi$, dL si otterranno le seguenti correzioni

$$d\varphi=+\ 122'',9$$
$$d\pi=+1107\ ,6$$
$$dz=+\ 0'',46537$$
$$dL=-\ 25'',4\,.$$

Applicando ora le precedenti correzioni ai superiori elementi ellittici, otterremo i seguenti corretti

Epoca al meridiano di Padova per il
Gennajo 1810 . . . . =105°.52′.55″,0
Moto diurno tropico 16.18,15537
Eccentricità = sen. 5°.8′.2″,9
Longitudine del Perielio (1810) . . =249.35.11,6
Longitudine del Nodo (1810) . . . =103. 9.42,5
Inclinazione all'ecclittica . . . . . . = 7. 8. 1,8
Logaritmo *d* semiasse maggiore = 0,3731065.

Se ora si confrontano i luoghi calcolati con questi elementi cogli osservati, si troverà che per fare coincidere quelli con questi, si devono aumentare i calcolati delle seguenti quantità.

	Long. Elioc.	Latit. Geoc.
1808	+ 2″, 0	+ 5,4
1810	+ 0,1	+ 14,6
1811	+ 0,0	+ 15,5
1812	− 0,9	+ 5,3

Questi elementi soddisfanno assai bene alle longitudini osservate, e poco si dilungano dalle latitudini geocentriche. Se per altro si confrontano colle osservazioni dell'anno 1807 fatte in Marzo, ed Aprile si troverà, che si allontanano di circa 25 minuti in longitudine, ed 1 in latitudine.

D'onde si può già concludere la necessità di tener conto delle perturbazioni provenienti dall'attrazione degli altri pianeti per accordare, o almeno rappresentare con più precisione le osservazioni di Vesta colla Teoria.

Scolio. Un leggero errore di calcolo commesso nell'equazione (B) corrispondente all'anno 1812, ci aveva condotti ad elementi ellittici un poco dai superiori diversi, e sui quali è fondata la riduzione delle osservazioni seguenti fatte intorno all'opposizione dell'anno 1814. Siccome i risultati finali non sono alterati, così ho creduto inutile ripetere il calcolo delle seguenti osservazioni nei superiori elementi purgati dall'anzidetto errore . Basterà solo di qui riferire gli elementi, che hanno servito di base alle seguenti riduzioni per comodo di coloro, che volessero ripetere i calcoli .

Epoca delle longitudini Medie (1810) = 105°.52'.55",1
Moto medio diurno . . . . = 16.18,15611
Longitudine del perielio fisso rapporto alle Stelle (1810) . . . . = 249.35.10,9
Eccentricità = sen. 5°.8'.2",73 = 0,0894866 (A)
Longitudine Nodo fisso rapporto alle Stelle (1810) . . . . = 103. 9.29,4
Inclinazione rapporto all' Ecclittica = 7. 7.50
Logaritmo della distanza media = 0,3731061

i quali non differiscono quasi sensibilmente dai superiori, che nel nodo, e nell' inclinazione .

IV. Osservazioni di Vesta intorno all' opposizione dell'anno 1814.

Le osservazioni di Vesta furono eziandio in quest'anno fatte al medesimo stromento dei passaggi, ed al medesimo quadrante murale, di cui abbiamo fatto superiormente menzione . Noi riferiremo le osservazioni originali, affinchè possa ciascuno verificare il loro accordo .

1814	gior.	Nomi	appul. al 3 filo	Distan. al Zenit	Barom. in poll. lin.	Term. di Reau.
Febbrajo	3	μ Leone	9^h.45′.45″,20	18°.31′. 0″		
		π Leone	9 . 53 . 58 , 00	36 . 27 . : :		
		Regolo	10 .. 2 . 2 , 73	32 . 30 . 49		
		Vesta	10 . 11 . 44 , 25	25 . 53 . 4	27°. 11′, 3	+ 0 , 0
	4	μ Leone	9 . 46 . 0 , 82	18 . 30 . 46		
		π Leone	9 . 54 . 6 , 03	36 . 27 . 8		
		Regolo	10 . 2 . 10 , 65	32 . 30 . 49		
		Vesta	10 . 10 . 59 , 89	25 . 42 . 43	28 . 0 , 7	+ 0 , 0
	5	μ Leone	9 . 46 . 0 , 82	18 . 30 . 43		
		π Leone	9 . 54 . 13 , 60	36 . 27 . 10		
		Regolo	10 . 2 . 18 , 28	32 . 30 . 49		
		Vesta	10 . 10 . 14 , 32	25 . 34 . 12	28 , 0 , 7	+ 0 , 0
	9	μ Leone	9 . 46 . 31 , 08	18 . 30 . 52		
		π Leone	9 . 54 . 43 , 70	36 . 27 . 15		
		Regolo	10 . 2 . 48 , 57	32 . 30 . 53		
		Vesta	10 . 7 . 2 , 47	25 . 0 . 50	28 . 0 , 0	+ 0 , 0
	10	μ Leone	9 . 46 . 38 , 48	18 . 30 . 53		
		π Leone	9 . 54 . 51 , 42	36 . 27 . 14		
		Regolo	10 . 2 . 55 , 92	32 . 30 . 54		
		Vesta	10 . 6 . 12 , 85	24 . 52 . 39 , 5	28 . 4 , 0	+ 2 , 0
	13	μ Leone	9 . 46 . 58 , 65	18 . 30 . 51		
		π Leone	9 . 55 . 11 , 48	36 . 27 . 10		
		Vesta	10 . 3 . 37 , 93	24 . 28 . 22		
		λ Orsa maggiore	10 . 10 . 39 , 05	. . . . . .		
		γ Leone	10 . 14 . 30 , 93	24 . 36 . 39	28 . 3 , 1	+ 2 , 2
	14	Vesta	10 . 2 . 45 , 12	24 . 20 . 30		
		λ Orsa maggiore	10 . 10 . 45 , 24	. . . . . .		
		γ Leone	10 . 14 . 37 , 13	24 . 36 . 40	28 . 4 , 9	+ 0 , 5
	15	μ Leone	. . . .	18 . 30 . 54		
		π Leone	9 . 55 . 24 , 48	36 . 27 . 12		
		Vesta	10 . 1 . 52 , 35	24 . 12 . 45		
		λ Orsa maggiore	10 . 10 . 52 , 05	1 . 33 . 30		
		γ Leone	10 . 14 . 43 , 82	24 . 36 . 41	28 . 0 , 9	+ 1 , 0
	17	π Leone	9 . 55 . 37 , 93	36 . 27 . 13		
		Vesta	10 . 0 . 6 ., 22	23 . 57 . 32		
		Regolo	10 . 3 . 42 , 47	. . . . . .		
		λ Orsa maggiore	10 . 11 . 5 , 25	1 . 33 . 31		
		γ Leone	10 . 14 . 53 , 25	24 . 36 . 45		
	20	μ Leone	9 . 47 . 45 , 47	18 30 . 53 , 5		
		Vesta	9 . 57 . 27 , 97	23 . 35 . 46		
		Regolo	10 . 4 . 2 , 88	32 . 30 . 54		
		λ Orsa maggiore	10 . 11 . 25 , 87	. . . . . .		
		γ Leone	10 . 15 . 17 , 88	24 . 36 . 44	28 . 4 , 2	− 1 , 5
	21	μ Leone	9 . 47 . 52 , 22	18 . 30 . 53		
		Vesta	9 . 56 . 35 , 67	23 . 28 . 43		
		Regolo	10 . 4 . 9 , 80	32 . 30 . 54		
		λ Orsa maggiore	10 . 11 . 33 , 08	. . . . . .		
		γ Leone	10 . 15 . 24 , 66	24 . 36 . 45	28 . 30 , 0	− 2 , 4

Le posizioni delle stelle sono state prese dall' Effemeridi di Milano per il 1812, ove si trova un estratto del Catalogo di *Piazzi* con le correzioni da questo celebre Astronomo citate nel libro VI della Specola Palermitana. Applicando alle posizioni medie ivi riferite l'aberrazione, la nutazione, e la precessione degli equinozj, trovansi per i giorni 4, e 24 Febbrajo le seguenti posizioni apparenti

	4 Febbrajo		24 Febbrajo	
	A. R. appar.	decl. bor.	A. R. appar.	decl. app.
μ Leone	= 145°.32′.34″,6	= 26°.52′. 33″,4	145°. 32′. 38″,0	= 26°.52′.35″,0
π Leone	= 147 . 35 . 45 , 8	= 8 . 55 . 50 , 4	147 . 35 . 48 , 1	= 8 . 55 . 49 , 2
α Leone	= 149 . 36 . 55 , 0	= 12 . 52 . 14 , 3	149 . 37 . 1 , 9	= 12 . 52 . 12 , 1

Per il 16 Febbrajo

λ Orsa maggiore = 151°. 27′. 40″, 7 . . . .
γ Leone = 152 . 25 . 36 , 3 = 20 . 46 . 38 , 4

Con questi calcolando per tutti i giorni l'equazione del Pendolo, e l'errore del quadrante murale, e prendendo il risultato medio d'ogni giorno, si ottengono le seguenti posizioni apparenti di Vesta .

1814	Giorni	Tempo Medio in Padova	A. R. apparente di Vesta	Declinaz. appar. Boreale
Febbrajo	3	13^{h}. 14′. 0″,0	152°. 2′. 19″,0	19°. 32′. 8″,3
	4	13 . 9 . 11 , 8	151 . 49 . 13 , 3	19 . 40 . 29 , 5
	5	13 . 4 . 23 , 8	151 . 35 . 55 , 3	19 . 49 . 0 , 6
	9	12 . 44 . 57 , 8	150 . 40 . 25 , 9	20 . 22 . 28 , 8
	10	12 . 40 . 5 , 0	150 . 26 . 9 , 5	20 . 30 . 39 , 9
	13	12 . 25 . 22 , 7	149 . 42 . 23 , 6	20 . 54 . 55 , 4
	14	12 . 20 . 27 , 9	149 . 27 . 37 , 9	21 . 2 . 48 , 8
	15	12 . 15 . 32 , 6	149 . 12 . 45 , 3	21 . 10 . 35 , 0
	17	12 . 5 . 42 , 6	148 . 42 . 54 , 2	21 . 25 . 50 , 4
	20	11 . 50 . 36 , 0	147 . 58 . 13 , 2	21 . 47 . 35 , 8
	21	11 . 46 . 0 , 8	147 . 43 . 25 , 1	21 . 54 . 38 , 8

Ho confrontato queste osservazioni cogli elementi ellittici (A) sopra riferiti, tenendo conto delle variazioni secolari che verranno esposte in seguito . Per ridurre le superiori osservazioni all' equinozio medio vi ho applicato le seguenti correzioni .

Giorni :	3 : 21	3 : 21
Nutazione Lunare :	+ 16″, 8 : + 17″, 3	− 3″, 1 : − 2″, 7
Nut. Solare - - :	− 1, 2 : − 1, 4	+ 0, 4 : + 0, 3
Aberraz. - - - :	− 6, 5 : − 7, 3	+ 4, 1 : + 3, 5
Parallasse	- - - - - - - - -	+ 2, 6 : + 2, 4
Correzioni - - :	+ 9″, 1 : + 8″, 6	+ 4″, 0 : + 3″, 5

Servendomi delle tavole Solari del Sig. *Carlini*, ho ottenuto i seguenti risultati.

giorni	AR osserv. di ⚶ ridotta all'Eq. Medio	Decli. osserv. di ⚶ ridotta all'Eq. Medio	AR calcolate dall' Equin. Medio	Declinazioni Boreali calcolate	Differ. in AR	Differ. in declin.
3	152°. 2′.27″,8	19°.32′.12″,1	152°. 5′.54″,8	19°.31′. 3″,5	−3′.27″,0	+1′. 8″,6
4	151 .49 .22 , 1	19 .40 .33 , 3	151 .52 .47 , 9	19 .39 .31 , 2	−3 .25 , 8	+1 . 2 , 2
5	151 .36 . 4 , 1	19 .49 . 4 , 4	151 .39 .29 , 9	19 .47 .56 , 1	−3 .25 , 8	+1 . 8 , 3
9	150 .40 .34 , 8	19 .22 .32 , 6	150 .44 . 5 , 2	20 .21 .20 , 3	−3 .30 , 0	+1 .12 , 3
10	150 .26 .17 , 3	20 .30 .43 , 7	150 .29 .44 , 7	20 .29 .34 , 5	−3 .27 , 0	+1 . 9 , 2
13	149 .42 .32 , 4	20 .54 .59 , 2	149 .45 .57 , 8	20 .53 .49 , 6	−3 .25 , 4	+1 . 9 , 7
14	149 .27 .46 , 7	21 . 2 .52 , 6	149 .31 .11 , 0	21 . 1 .43 , 4	−3 .24 , 3	+1 . 9 , 2
15	149 .12 .54 , 1	21 .10 .38 , 8	149 .16 .19 , 5	21 . 9 .32 , 7	−3 .25 , 4	+1 . 6 , 1
20	147 .58 .22 , 0	21 .47 .39 , 6	148 . 1 .52 , 0	21 .46 .33 , 2	−3 .30 , 0	+1 . 6 , 4
21	147 .43 .33 , 9	21 .54 .42 , 6	147 .47 . 2 , 0	21 .53 .32 , 0	−3 .28 , 1	+1 .10 , 0
				Medio	−3 .26 , 9	+1 .8″,33

Calcolando per il giorno 13 di Febbrajo i valori di *d*L, e *db*, cioè le differenze fra la longitudine osservata, e la calcolata, e fra la latitudine Geocentrica osservata, e la calcolata trovansi i seguenti risultati

$$dL = +0,8847 \,.\, da - 0,3508 \,.\, d\delta = -3'.27'',10$$

$$db = +0,3244 \,.\, da + 0,9377 \,.\, d\delta = - \quad 3,04$$

Correggendo con questi dati la longitudine di Vesta calcolata col mezzo dei medesimi elementi ellittici per il giorno 13 a mezzodì e a mezzanotte (tempo medio), e prendendo i luoghi del Sole, si trovano i seguenti risultati .

	Long. di ⚶ corr.	Latit. geoc. boreale	Longitudine della terra
13 Febbrajo 0^h	144°. 40'. 58", 3	8°. 1'. 3", 5	144°. 11'. 38", 8
12	144 . 33 . 5 , 0	8 . 2 . 24, 4	144 . 41 . 56 , 6

Quindi si deduce, che l'opposizione col Sole ebbe luogo il giorno 13 Febbrajo a 9^h. 12'. 56", 4 T. Medio in Padova, mentre era la longitudine di Vesta, e della terra

= 144°. 34'. 54", 8

Latit. Geoc. boreale di ⚶ . . = 8 . 2 . 5 , 9 .

ARTICOLO II.

Calcolo delle perturbazioni di Vesta dipendenti dall' attrazione di Giove, e di Marte, tenendo conto soltanto delle prime potenze dell' eccentricità, ed inclinazioni delle orbite loro .

Siccome non è possibile conciliare le opposizioni già osservate, e le osservazioni fatte nel 1807 con un'orbita puramente ellittica, così ho voluto tentare, se con qualche esattezza si potessero rappresentare le osservazioni fatte fin ora tenendo conto delle perturbazioni di Giove, giacchè l'azione di questo Pianeta sopra Vesta deve essere di gran lunga più sensibile di quella degli altri Pianeti attesa la sua vicinanza, e la sua forte massa . A tale oggetto mi sono servito delle formule dal celebre *La-Place* date nella sua Meccanica Celeste Vol. I, pag. 272 e seg. Noi supporremo, che i nostri lettori abbiano sotto occhio le citate formule, e daremo i risultati numerici delle medesime, che sono i seguenti .

Log. $a = 9,6568696$

$b^{(0)}_{-1:2} = 2,1043693$ . . Log. $b^{(0)}_{-1:2} = 0,3231220 +$

$b^{(1)}_{-1:2} = -0,4418015$ . . . . $= 9,6452272 -$

$b^{(0)}_{1:2} = +2,116928$ . . . . $= 0,3257060 +$

$b^{(1)}_{1:2} = 0,494171$ . . . . $= 9,6938778 +$

$b^{(2)}_{1:2} = 0,169830$ . . . . $= 9,2300144 +$

$b^{(3)}_{1:2} = 0,064541$ . . . . $= 8,8098357 +$

$b^{(4)}_{1:2} = 0,025702$ . . . . $= 8,4099669 +$

$b^{(5)}_{1:2} = 0,010513$ . . . . $= 8,0217267 +$

$b^{(6)}_{1:2} = 0,004320$ . . . . $= 7,6354837 +$

$b^{(7)}_{1:2} = 0,001701$ . . . . $= 7,2307043 +$

$d.b^{(0)}_{1:2} = 0,587488$ . . . . $= 9,7689990 +$

$d.b^{(1)}_{1:2} = 1,294587$ . . . . $= 0,1121315 +$

$d.b^{(2)}_{1:2} = 0,827364$ . . . . $= 9,9176966 +$

$d.b^{(3)}_{1:2} = 0,458289$ . . . . $= 9,6611395 +$

$d.b^{(4)}_{1:2} = 0,239592$ . . . . $= 9,3794723 +$

$d.b^{(5)}_{1:2} = 0,122216$ . . . . $= 9,0871281 +$

$d.b^{(6)}_{1:2} = 0,061364$ . . . . $= 8,7879137 +$

$d^2.b^{(0)}_{1:2} = 2,042862$ . . . . $= 0,3102369 +$

$d^2.b^{(1)}_{1:2} = 1,648936$ . . . . $= 0,2172038 +$

$d^2.b^{(2)}_{1:2} = 2,635040$ . . . . $= 0,4207872 +$

$d^2.b^{(3)}_{1:2} = 2,415862$ . . . . $= 0,3830722 +$

$d^2.b^{(4)}_{1:2} = 1,765986$ . . . . $= 0,2469872 +$

$d^2.b^{(5)}_{1:2} = 1,162347$ . . . . $= 0,0653357 +$

Ove devo osservare, che per comodo ho scritto $d.b^{(1)}_{1:2}$, $d^2.b^{(1)}_{1:2}$ . . . in luogo di $\frac{db^{(1)}_{1:2}}{da}$, $\frac{d^2b^{(1)}_{1:2}}{da^2}$.

Ponendo poi il moto sidereo di Vesta per $365,25 = n$ quello di Giove $= n'$, come anche la sua massa $= m'$, si avrà in numeri

$$n = 357222'' \qquad m = \frac{1}{1067,09}; \qquad \text{Log.}\, a = 0,3731065$$
$$n' = 109256,4 \qquad\qquad\qquad \text{Log.}\, a' = 0,7162365.$$

Con questi dati calcolando i valori numerici di $D^{(i)}$, $E^{(i)}$, $F^{(i)}$, $G^{(i)}$ tanto per i positivo, che per i negativo, e sostituendoli nei valori di δr, e δv delle pag. 279, 280 della citata Meccanica,

canica, si troverà [ponendo per brevità $i(nt-n't+\mathrm{E}-\mathrm{E}')=i\mathrm{D}$]

$$\begin{array}{ll}
\delta r = -0{,}0000457 & +0{,}0000254\,.\cos.\mathrm{A} \\
\quad +0{,}0004844\,.\cos.\mathrm{D} & -0{,}0000053\,.\cos.(\mathrm{D}+\mathrm{A}') \\
\quad -0{,}0009362\,.\cos.2\mathrm{D} & -0{,}0000864\,.\cos.(\mathrm{D}-\mathrm{A}) \\
\quad -0{,}0001185\,.\cos.3\mathrm{D} & +0{,}0000244\,.\cos.\mathrm{A}' \\
\quad -0{,}0000274\,.\cos.4\mathrm{D} & -0{,}0003101\,.\cos.(2\mathrm{D}-\mathrm{A}) \\
\quad -0{,}0000078\,.\cos.5\mathrm{D} & +0{,}0000636\,.\cos.(\mathrm{D}-\mathrm{A}') \\
\quad -0{,}0000025\,.\cos.6\mathrm{D} & +0{,}0011353\,.\cos.(3\mathrm{D}-\mathrm{A}) \\
 & -0{,}0010285\,.\cos.(2\mathrm{D}-\mathrm{A}') \\
 & +0{,}0000472\,.\cos.(4\mathrm{D}-\mathrm{A}) \\
 & -0{,}0000495\,.\cos.(3\mathrm{D}-\mathrm{A}') \\
 & +0{,}0000115\,.\cos.(5\mathrm{D}-\mathrm{A}) \\
 & -0{,}0000121\,.\cos.(4\mathrm{D}-\mathrm{A}') \\
 & +0{,}0000640\,.\cos.(\mathrm{D}+\mathrm{A}) \\
 & +0{,}0000068\,.\cos.(2\mathrm{D}+\mathrm{A}') \\
 & -0{,}0000813\,.\cos.(2\mathrm{D}+\mathrm{A}) \\
 & +0{,}0000032\,.\cos.(3\mathrm{D}+\mathrm{A}') \\
 & -0{,}0000125\,.\cos.(3\mathrm{D}+\mathrm{A}) \\
 & +0{,}0000013\,.\cos.(4\mathrm{D}+\mathrm{A}') \\
 & -0{,}0000037\,.\cos.(4\mathrm{D}+\mathrm{A}) \\
 & +0{,}0000006\,.\cos.(5\mathrm{D}+\mathrm{A}');
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\delta v = -114'',59\,.\,\mathrm{sen.}\,\mathrm{D} & -\ 18'',45\,.\,\mathrm{sen.}\,(\mathrm{D}-\mathrm{A}) \\
\quad +113\,,28\,.\,\mathrm{sen.}\,2\mathrm{D} & -\ 14\,,51\,.\,\mathrm{sen.}\,\mathrm{A}' \\
\quad +\ 13\,,87\,.\,\mathrm{sen.}\,3\mathrm{D} & +168\,,47\,.\,\mathrm{sen.}\,(2\mathrm{D}-\mathrm{A}) \\
\quad +\ \ 2\,,90\,.\,\mathrm{sen.}\,4\mathrm{D} & -\ 24\,,02\,.\,\mathrm{sen.}\,(\mathrm{D}-\mathrm{A}') \\
\quad +\ \ 0\,,77\,.\,\mathrm{sen.}\,5\mathrm{D} & -183\,,37\,.\,\mathrm{sen.}\,(3\mathrm{D}-\mathrm{A}) \\
\quad +\ \ 0\,,23\,.\,\mathrm{sen.}\,5\mathrm{D} & +170\,,42\,.\,\mathrm{sen.}\,(2\mathrm{D}-\mathrm{A}') \\
 & -\ \ 5\,,00\,.\,\mathrm{sen.}\,(4\mathrm{D}-\mathrm{A}) \\
 & +\ \ 6\,,19\,.\,\mathrm{sen.}\,(3\mathrm{D}-\mathrm{A}') \\
 & -\ \ 0\,,99\,.\,\mathrm{sen.}\,(5\mathrm{D}-\mathrm{A}) \\
 & +\ \ 1\,,32\,.\,\mathrm{sen.}\,(4\mathrm{D}-\mathrm{A}') \\
 & +\ 13\,,66\,.\,\mathrm{sen.}\,(\mathrm{D}+\mathrm{A}) \\
 & -\ \ 0\,,90\,.\,\mathrm{sen.}\,(2\mathrm{D}+\mathrm{A}') \\
 & -\ 19\,,88\,.\,\mathrm{sen.}\,(2\mathrm{D}+\mathrm{A}) \\
 & -\ \ 0\,,36\,.\,\mathrm{sen.}\,(3\mathrm{D}+\mathrm{A}')
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
-\ 2,98\,.\,\text{sen.}\,(3D+A)\\
-\ 0,14\,.\,\text{sen.}\,(4D+A')\\
-\ 0,84\,.\,\text{sen.}\,(4D+A)
\end{array}$$

Ove δr rappresenta la quantità da aggiungersi al raggio vettore ellittico, δv la quantità da aggiungersi alla longitudine ellittica di Vesta nell'orbita per conto delle attrazioni di Giove, A rappresenta l'anomalia media di Vesta, A' l'anomalia media di Giove contate dal Perielio. Se pertanto chiamiamo

⚶ la longitudine media di Vesta
♃ la longitudine media di Giove
π longitudine del perielio di Vesta $= 249^\circ.\,35'$
π' longitudine del perielio di Giove $= 11\,.\,17$

sarà $D = ⚶ - ♃$, $A = ⚶ - \pi$, $A' = ♃ - \pi'$.

Introducendo questi valori nelle espressioni di δr, e di δv, e sommando insieme quei termini, che dipendono da un medesimo angolo variabile, si ottiene (esprimendo δr in decime millionesime parti dell'unità)

$$\begin{array}{rl}
\delta r = -\ 457 & +\ 285\,.\,\text{cos.}\,(⚶+119^\circ.30')\\
+4844\,.\,\text{cos.}\,D & +\ 1021\,.\,\text{cos.}\,(♃+302^\circ.38',5)\\
-9362\,.\,\text{cos.}\,2D & +\ 3478\,.\,\text{cos.}\,(⚶-2♃+60^\circ.38')\\
-1185\,.\,\text{cos.}\,3D & +18903\,.\,\text{cos.}\,(2⚶-3♃+222^\circ.1')\\
-\ 274\,.\,\text{cos.}\,4D & +\ 845\,.\,\text{cos.}\,(3⚶-4♃+219^\circ.40')\\
-\ 78\,.\,\text{cos.}\,5D & +\ 206\,.\,\text{cos.}\,(4⚶-5♃+219^\circ.37')\\
-\ 25\,.\,\text{cos.}\,6D & +\ 607\,.\,\text{cos.}\,(2⚶-♃+104^\circ.56')\\
 & +\ 829\,.\,\text{cos.}\,(3⚶-2♃+292^\circ.19')\\
 & +\ 132\,.\,\text{cos.}\,(4⚶-3♃+295^\circ.12')\\
 & +\ 41\,.\,\text{cos.}\,(5⚶-4♃+297^\circ.39')
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\delta v = -\ 114'',59\,.\,\text{sen.}\,D & +\ 28'',87\,.\,\text{sen.}\,(♃+135^\circ.48')\\
+\ 133,28\,.\,\text{sen.}\,2D & +182,23\,.\,\text{sen.}\,(⚶-2♃+243^\circ.9')\\
+\ 13,87\,.\,\text{sen.}\,3D & +309,09\,.\,\text{sen.}\,(2⚶-3♃+41^\circ.36')\\
+\ 2,90\,.\,\text{sen.}\,4D & +\ 9,79\,.\,\text{sen.}\,(3⚶-4♃+37^\circ.2',5)\\
+\ 0,77\,.\,\text{sen.}\,5D & +\ 2,09\,.\,\text{sen.}\,(4⚶-5♃+38^\circ.6')\\
+\ 0,23\,.\,\text{sen.}\,6D & +\ 14,14\,.\,\text{sen.}\,(2⚶-♃+113^\circ.31')\\
 & +\ 19,69\,.\,\text{sen.}\,(3⚶-2♃+289^\circ.31',5)\\
 & +\ 2,91\,.\,\text{sen.}\,(4⚶-3♃+288^\circ.4')\,.
\end{array}$$

Queste formule sono state dedotte, facendo uso dei superiori elementi ellittici da noi calcolati, ed i loro coefficienti possono subire qualche alterazione sopra tutto se l'eccentricità variasse notabilmente. Siccome l'eccentricità dell'orbita di Vesta entrava soltanto come moltiplicatore nei soli termini contenenti l'anomalia A, così chiamando e' l'eccentricità di un nuovo sistema di elementi ellittici di Vesta, e quella dei nostri elementi, è chiaro, che basterà moltiplicare i termini contenenti A per il rapporto $\frac{e'}{e}$ per avere i nuovi coefficienti corretti. Resta ora a calcolare le perturbazioni di Vesta in latitudine. A tale oggetto conviene prima preparare i valori di $b^{(i)}{}_{3:2}$, $\beta^{(i)}$, i quali mi risultano come segue.

$b^{(0)}{}_{3:2}=3{,}33745$....log. $b^{(0)}{}_{3:2}=0{,}5234148$....log. $\beta^{(0)}=8{,}3747059+$

$b^{(1)}{}_{3:2}=2{,}10204$....log. $b^{(1)}{}_{3:2}=0{,}3226413$....log. $\beta^{(1)}=8{,}1739324+$

$b^{(2)}{}_{3:2}=1{,}15955$....log. $b^{(2)}{}_{3:2}=0{,}0642896$....log. $\beta^{(2)}=7{,}9155807+$

$b^{(3)}{}_{3:2}=2{,}60511$....log. $b^{(3)}{}_{3:2}=9{,}7818343$....log. $\beta^{(3)}=7{,}6331254+$

$b^{(4)}{}_{3:2}=0{,}30620$....log. $b^{(4)}{}_{3:2}=9{,}48601$ ....log. $\beta^{(4)}=7{,}33730\ +$

Chiamando poi φ', φ l'inclinazioni delle orbite di Giove e di Vesta all'ecclittica, θ', θ le longitudini dei loro nodi ascendenti, assumendo $\varphi'=1^\circ.18'.51''$, $\varphi=7^\circ.8'.0''$, $\theta'=98^\circ.30'$, $\theta=103^\circ.10'$, e riducendo a numeri le formule della pag. 283, troveremo

$$p'=+0{,}0226885\ \ldots\ldots p=+0{,}1218137$$

$$q'=-0{,}0033914\ \ldots\ldots q=-0{,}0284777$$

d'onde deducesi ... $\log.\gamma=9{,}0096623$; $\pi=284^\circ.12'.18''$.

Con questi dati la formola δs della pag. 282 (trascurando il termine moltiplicato per t) diviene

$$\begin{aligned}\delta s = &+\ 3'',00\ .\ \text{sen.}\,(\text{♃}-\pi)\\ &-\ 5,04\ .\ \text{sen.}\,(\text{⚶}-2\text{♃}+\pi)\\ &+\ 13,74\ .\ \text{sen.}\,(2\text{⚶}-3\text{♃}+\pi)\\ &+\ 0,57\ .\ \text{sen.}\,(3\text{⚶}-4\text{♃}+\pi)\\ &+\ 1,26\ .\ \text{sen.}\,(2\text{⚶}-\text{♃}-\pi)\\ &-\ 0,26\ .\ \text{sen.}\,(3\text{⚶}-2\text{♃}-\pi).\end{aligned}$$

V. Affinchè poi nulla mancasse alla precedente teoria di Vesta, ho calcolato eziandio le variazioni secolari dipendenti sì dall'attrazione di Giove, come da quella degli altri Pianeti, e per questo oggetto mi sono servito della bella teoria data dal Sig. *La-Place* nel Cap. VII della sua Meccanica celeste libro II. Ritenendo le quantità ad indice o per quelle relative al Pianeta perturbato, noi supporremo, che siano le quantità

[o, 1], (o, 1) relative a Giove
[o, 2], (o, 2) relative a Saturno
[o, 3], (o, 3) relative ad Urano
[o, 4], (o, 4) relative a Marte
[o, 5], (o, 5) relative alla Terra
[o, 6], (o, 6) relative a Venere
[o, 7], (o, 7) relative a Mercurio.

Poniamo (come *La-Place*)

$$(0,1) = -\frac{3m'n}{4}\cdot\frac{a^2 b^{(1)}_{-1:2}}{(1-a^2)^2}$$

$$[0,2] = -\frac{3m'na\left\{(1+a^2)\,b^{(1)}_{-1:2} + \frac{1}{2}a\,b^{(0)}_{-1:2}\right\}}{2(1-a^2)^2}$$

$$= (0,1)\,\frac{2.(1+a^2)}{a} - \frac{3m'na}{2(1-a^2)^2} - b^{(0)}_{-1:2}$$

ove m' rappresenta la massa del pianeta perturbante (nel caso attuale quella di Giove) ed a' la sua distanza media dal Sole.

Rapporto agli altri indici (o, 2), [o, 2] ec. si deducono dalle precedenti formole scrivendo per a, $b^{(1)}_{-1:2}$, $b^{(0)}_{-1:2}$, m' le quantità relative agli altri Pianeti perturbanti. Trovérassi così

$(0,1) = +36'',229$ . . . $[0,1] = +19'',985$
$(0,2) = +\ 1,363$ . . . $[0,2] = +\ 0,419$
$(0,3) = +\ 0,026$ . . . $[0,3] = +\ 0,003$
$(0,4) = +\ 0,108$ . . . $[0,4] = +\ 0,093$
$(0,5) = +\ 0,090$ . . . $[0,5] = +\ 0,049$
$(0,6) = +\ 0,024$ . . . $[0,6] = +\ 0,009$
$(0,7) = +\ 0,001$ . . . $[0,7] = +\ 0,000$.

Con questi valori, mediante le formule, che trovansi alla pag. 308 del I Vol. si ottiene

$$\frac{de}{dt} = +\, 0'',829 = +\, 0,000004009$$

$$\frac{d\pi}{dt} = +\, 44'',135\,.$$

Le variazioni secolari dell'inclinazione, e del raggio vettore dovranno calcolarsi colle seguenti formule

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} = {} & [(0,1)-(5,1)].\text{tang}.\varphi'.\text{sen}.(\theta-\theta')+[(0,2)-(5,2)].\text{tang}.\varphi''.\text{sen}.(\theta-\theta'') \\ & +[(0,3)-(5,3)].\text{tang}.\varphi'''.\text{sen}.(\theta-\theta''')+[(0,4)-(5,4)].\text{tang}.\varphi^{iv}.\text{sen}.(\theta-\theta^{iv}) \\ & +[(0,6)-(5,6)].\text{tang}.\varphi^{v'}.\text{sen}.(\theta-\theta^{v'})+[(0,7)-(5,7)].\text{tang}.\varphi^{v''}.\text{sen}.(\theta-\theta^{v''})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} = {} & -[(0,1)+(0,2)+(0,3)+(0,4)+(0,5)+(0,6)+(0,7)]-(5,0) \\ & +[(0,1)-(5,1)].\frac{\text{tang}.\varphi'}{\text{tang}.\varphi}.\cos.(\theta-\theta')+[(0,2)-(5,2)].\frac{\text{tang}.\varphi''}{\text{tang}.\varphi}.\cos.(\theta-\theta'') \\ & + \qquad\qquad +[(0,7)-(5,7)].\frac{\text{tang}.\varphi^{v''}}{\text{tang}.\varphi}.\cos.(\theta-\theta^{v''})\,;\end{aligned}$$

Nelle formule precedenti gli indici 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sono relativi a Vesta, Giove, Urano, Marte, la Terra, Venere, Mercurio; le quantità φ rappresentano le inclinazioni delle orbite planetarie all'ecclittica, e le quantità θ le longitudini dei loro nodi ascendenti sull'ecclittica. La quantità $(5,0)$ è $= 0$ (per lo meno supponendo $= 0$ la massa del Pianeta Vesta). Le quantità $(5,1)$, $(5,2)$ ... sono state desunte dal terzo tomo della Meccanica celeste pag. 87, e riducendo le denominazioni ivi adoperate alle nostre, e la divisione decimale alla sessagesimale, si troverà

$(5,1) = +\, 6'',948 \qquad (5,4) = +\, 0'',433$
$(5,2) = +\, 0,341 \qquad (5,6) = +\, 5,427$
$(5,3) = +\, 0,007 \qquad (5,7) = +\, 0,098\,.$

Sostituendo questi valori, e quelli di $\varphi', \varphi'', \ldots\, \theta', \theta''$ dati dal Sig. *La-Place* nelle due superiori equazioni, si ottiene

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\, 0'',120\,; \quad \frac{d\theta}{dt} = -\, 34'',481\,.$$

Supponendo ora la precessione annua degli equinozi $= 50'',11$

avremo le variazioni annue rapporto all'equinozio medio, ed all'ecclittica vera espresse così:

Variazione annua del Perielio di Vesta $= + 94'', 24$
del nodo . . . . $= + 15, 63$
dell'inclinazione . $= - 0, 12$
dell'eccentricità . $= + 0, 000004009$

Chiamando ora, come sopra, $e = \text{sen.}\,\phi$ la variazione annua dell'angolo ϕ sarà $= 0'', 828$.

VI. L'azione di Marte sopra Vesta è di gran lunga meno sensibile di quella di Giove a motivo della sua piccolissima massa. Avendo ridotto a calcolo il suo influsso nella longitudine geocentrica, ho trovato le seguenti equazioni da aggiungere alla longitudine eliocentrica nell'orbita

$$\begin{aligned} \delta v = & + 1'', 02 \,.\, \text{sen.}\,(\text{♂} - \text{⚶}) \\ & - 0, 13 \,.\, \text{sen.}\, 2(\text{♂} - \text{⚶}) \\ & - 2'' \end{aligned}$$

essendo $\pi = 249^\circ. 35'$; $\pi' = 332^\circ. 30'$ (longitudine del Perielio di Marte).

Le equazioni dipendenti dalla distanza angolare di Marte a Vesta sono così piccole, che possono essere trascurate. Le altre due dipendenti dal doppio della longitudine di Vesta meno la longitudine di Marte possono ridursi alla seguente, (di cui solamente terremo conto)

$$+ 10'', 75 \,.\, \text{sen.}\,(2\text{⚶} - \text{♂} + 337^\circ. 35').$$

L'equazioni del raggio vettore dipendenti dal medesimo angolo variabile sono le seguenti

$$\begin{aligned} & + 0, 0000022 \,.\, \cos.\,(2\text{⚶} - \text{♂} - \pi) \\ & - 0, 0000078 \,.\, \cos.\,(2\text{⚶} - \text{♂} - \pi') \end{aligned}$$

le quali si riducono alla seguente

$$+ 0, 000 \quad 75 \,.\, \cos.\,(2\text{⚶} - \text{♂} + 158^\circ. 29').$$

Queste equazioni sono sì piccole, che si potranno quasi sempre trascurare. Tuttavia se ne è tenuto conto nella seguente correzione degli elementi.

VII. Correzione ulteriore degli elementi ellittici di Vesta avendo riguardo alle precedenti perturbazioni.

Quando si vuol tener conto delle perturbazioni nella correzione degli elementi ellittici, conviene calcolare le perturbazioni sì in longitudine, che in latitudine, e nel raggio vettore, ed applicarle alle posizioni ellittiche calcolate. In allora per ogni opposizione si formerà un' equazione di condizione fra le correzioni dell'epoca, del perielio, del moto medio, e dell'eccentricità. Avendo colla combinazione di queste equazioni ricavati i valori numerici di queste correzioni, si calcoleranno per ogni opposizione le latitudini geocentriche coi nuovi elementi corretti, e colla vecchia inclinazione, e nodo, unitamente alle equazioni di condizione fra la correzione della longitudine del nodo, e dell'inclinazione, e col mezzo di queste nuove equazioni di condizione si otterranno le ricercate correzioni per il nodo ed inclinazione.

Aggiungeremo qui gli elementi di questi calcoli per le opposizioni di Vesta fin ora osservate, supponendo il luogo del Nodo nel 1810 = 103°. 9'. 45", 5 e l' inclinazione = 7°. 8'. 1", 8.

anni	Long. Elioc. di ⚶ osservata $=\alpha$	Lat. Geoc. osservata $=\theta$	Longit. osservate ridotte all' orbita	Long. ellitt. calc. nell' orb $=$ H	par. in long. di Vesta	Longit. in orb. calcolate	dH
1808	345°.53'.47",5	−11°. 0'.24",1	346°. 4'.37",2	346°. 4'.35",3	−0'. 5",4	346°. 4'.29".9	+ 7",3
1810	100.36.31,2	− 0.31. 3,3	100.35.19,6	100.35.20,8	−4. 7,6	100.31.13,2	+246,4
1811	243.48.38,9	+ 8.34. 0,8	243.35.32,3	243.35.21,6	−3.50,0	243.31.31,6	+240,7
1812	32.17.41,0	−11. 5.26,3	32. 9.26,4	32. 9.45,6	+8.24,0	32.18. 9,6	−523,2
1814	144.34.54,8	+ 8. 2. 5,9	144.48.13,2	144.50. 7,7	−2.26,9	144.47.40,8	+ 32,4

L'espressione di dH data di sopra, quando si sostituisca per sen. E il suo valore $\frac{r\,\text{sen.}\,v}{\cos.\,\phi}$ diviene

$$dH = \frac{a^2 . \cos\,\phi}{r^2} . dL + \frac{a^2 . \cos . \phi}{r^2} . t . dz + \left(1 - \frac{a^2 . \cos . \phi}{r^2}\right) d\pi + \frac{a . \text{sen.}\, v}{r . \cos . \phi}\left(\cos .^2 . \phi + \frac{r}{a}\right) .$$

Riducendo questa equazione a numeri per ciascuna delle superiori opposizioni, e fissando il principio del tempo t nell' istante dell'opposizione dell'anno 1811, si otterranno per ordine le cinque seguenti equazioni.

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I})=0{,}99162.d\mathrm{L}-980{,}92.dz+0{,}00838.d\pi+1{,}98491.d\phi=+\ 7'',3\\
&(\mathrm{II})=0{,}86082.d\mathrm{L}-439{,}51.dz+0{,}13918.d\pi-0{,}96238.d\phi=+246{,}4\\
&(\mathrm{III})=1{,}20030.d\mathrm{L}+\ 0{,}00.dz-0{,}20030.d\pi-0{,}22048.d\phi=+248{,}7\\
&(\mathrm{IV})=0{,}87352.d\mathrm{L}+453{,}21.dz+0{,}12648.d\pi+1{,}17900.d\phi=-523{,}2\\
&(\mathrm{V})=0{,}96620.d\mathrm{L}+961{,}24.dz+0{,}03380.d\pi-1{,}91870.d\phi=+\ 32{,}4
\end{aligned}$$

Applicando a queste equazioni il metodo dei minimi quadrati se ne dedurranno le quattro seguenti.

$$\begin{aligned}
&+\ 4{,}88272.d\mathrm{L}-27{,}48.dz+\ 0{,}03113.d\pi+0{,}04934.d\phi=+83'',02\\
&-27{,}48\ \ d\mathrm{L}+2284754.dz+20{,}4206.d\pi-2834{,}04.d\phi=-321433''\\
&+\ 0{,}03113.d\mathrm{L}+20{,}4206.dz+0{,}07670.d\pi+0{,}01112.d\phi=-78{,}938\\
&+\ 0{,}04934.d\mathrm{L}-2834{,}04.dz+0{,}01112.d\pi+9{,}98597.d\phi=-954{,}73
\end{aligned}$$

Risolvendo queste equazioni si otterrà

$$\begin{aligned}
d\mathrm{L} &= +\ 22'',74\\
dz &= -\ 0{,}3855\\
d\phi &= -\ 204{,}116\\
d\pi &= -\ 916{,}4
\end{aligned}$$

Ora la differenza dei tempi fra l'opposizione dell'anno 1811, ed il principio del 1810 essendo di $509^s,40$, la correzione dell'epoca del 1810 sarà

$$= d\mathrm{L} = -510{,}50\,.\,dz = 22'',74 + 196'',76 = +3'.39'',5\,.$$

Applicando pertanto queste correzioni agli elementi ellittici superiormente calcolati otterremo i seguenti

Epoca 1810 . . . . . . = 105°. 56'. 34", 5
Moto diurno medio . . . = 16 . 17 , 7699
Perielio (1810) . . . . = 249 . 19 . 55 , 2
Eccentricità . . . . . . = sen. 5°. 4 , 37", 78
Logaritmo della distanza media = 0, 3732206.

Resta ora a determinare le correzioni della longitudine del Nodo, e dell'inclinazione. A tale oggetto si calcolino le latitudini eliocentriche di Vesta per .... $\tan g.\beta = \tan g.i.\mathrm{sen}.(\alpha - \Omega)$, ed a queste si applichino le perturbazioni in latitudine per formare le latitudini eliocentriche corrette, che indicheremo per β', quindi coi superiori elementi si calcolino i raggi vettori, e vi si applichino le loro rispettive perturbazioni; si otterranno così i veri raggi vettori, che chiameremo r. Chiamando

mando R la distanza della terra al Sole, e b la latitudine geocentrica, avremo .... $\text{tang.}b = \dfrac{r.\cos.\beta'}{r.\cos.\beta - \mathrm{R}}.\text{tang.}\beta'$. I valori b paragonati ai valori osservati θ daranno gli errori in latitudine in quanto che questi possono dipendere dall' errore del nodo, e dell' inclinazione. Ora non facendo variare, che questi due elementi si ha

$$db = + \frac{2.\text{sen}.b.\cos.(b-\beta')\cos.\beta'}{\text{sen}.2i}.di - \text{sen}.b.\cos.(b-\beta').\cos.\beta'.\cot.(\alpha-\Omega).d\Omega$$

Riducendo questa equazione a numeri per le superiori opposizioni si formeranno le equazioni di condizione, da cui dipendono i valori di di, $d\Omega$. Ecco i dati per questo calcolo

anni	Latitudine eliocentrica $=\beta$	perturb. in latitud.	Valori di β'	Valori di r'	Valori di R	Valori di b	Valori di θ	Valori di db
1808	−6°.20'.54",3	− 7",5	−6°.21'. 1",6	2,365858	1,006510	−11°. 0'.41",4	−11°. 0'.24",1	+17",3
1810	−0. 19. 9,9	+18,0	−0. 18.51,9	2,537477	0,983250	− 0.30.48,0	− 0.31. 3,3	−15,3
1811	+4.32.16,7	− 7,9	+4.32. 8,8	2,150318	1,013504	+ 8.33.26,9	+ 8.34. 0,8	+33,9
1812	−6.44.38,4	− 5,6	−6.44.44,0	2,521931	0,993305	−11. 5.26,8	−11. 5.26,3	+ 0,5
1814	+4.43.53,9	+ 4,3	+4.43.58,4	2.396387	0,987909	+ 8. 2.13,9	+ 8. 2. 5,9	− 8,0

Le equazioni di condizione per determinare i valori di di, $d\Omega$ saranno le seguenti

$$-1,5353.di + 0,0935.d\Omega = +17'',3$$
$$-0,0727.di - 0,2009.d\Omega = -15,3$$
$$+1,2010.di + 0,1824.d\Omega = +33,9$$
$$-1,5460.di - 0,0661.d\Omega = +0,5$$
$$+1,1290.di - 0,1578.d\Omega = -8,0.$$

Le quali trattate al solito secondo il metodo dei minimi quadrati danno le due seguenti

$$7,5803.di + 0,00561.d\Omega = +5'',477$$
$$0,00561.di + 0,1112.d\Omega = +12,106$$

d'onde rilevasi $di = +0'',64$; $d\Omega = +108'',84$, e quindi la inclinazione vera dell' orbita di Vesta all' ecclittica nel 1810 era . . . . = 7°. 8'. 2",4

La longitudine del nodo alla stessa epoca = 103°. 11'. 31",3

Ecco pertanto qui riuniti gli elementi di Vesta corretti dall' influsso delle perturbazioni.

Epoca al Meridiano di Padova per il giorno 0 Gennajo 1810 . . . . . = 105°. 56'. 34'', 5
Moto diurno medio . . . . = 16 . 17 , 7699
Longitudine del Perielio (1810) . . = 249 . 19 . 55 , 2
Eccentricità (1810) = sen. 5°. 4'. 37'', 78 = sen. φ
Logaritmo della distanza media . . = 0 , 3732206
Longitudine del nodo ascendente (1810) = 103°, 11'. 31'', 3
Inclinazione (1810) . . . . = 7 . 8 . 2 , 4
Variazione annua della longitudine del perielio . . . . = + 1 . 34 , 24
della longitudine Nodo = + 0 . 15 , 63
dell' angolo φ . . = + 0 , 828
dell' eccentricità . . = − 0 , 000004009
dell' inclinazione . . = − 0'', 12.

Errori di questi elementi nelle opposizioni, che hanno servito di base (i segni indicando al solito quantità da aggiungersi alle quantità calcolate per avere le osservate)

Errori

anni	nella long. eliocentrica	nella lat. geocent.
1808	+ 17'', 9	+ 5'', 9
1810	− 15 , 2	+ 2 , 3
1811	− 11 , 5	+ 16 , 2
1812	− 10 , 7	+ 8 , 0
1814	+ 14 , 8	+ 10 , 7

Formule numeriche che si sono adoperate nella costruzione delle annesse tavole di Vesta.

Chiamando E l' equazione del centro, z l' anomalia media contata dal perielio, r il raggio vettore ellittico, avremo

$$\begin{array}{rlrl}
\mathrm{E} = & 36471'',98\,.\,\mathrm{sen}.\,z & \left(\frac{d\mathrm{E}}{d\phi}\right).\,1' = & 119'',18\,.\,\mathrm{sen}.\,z \\
+ & 2013\,,48\,.\,\mathrm{sen}.\,2z & + & 13\,,15\,.\,\mathrm{sen}.\,2z \\
+ & 154\,,12\,.\,\mathrm{sen}.\,3z & + & 1\,,51\,.\,\mathrm{sen}.\,3z \\
+ & 13\,,49\,.\,\mathrm{sen}.\,4z & + & 0\,,18\,.\,\mathrm{sen}.\,4z \\
+ & 1\,,27\,.\,\mathrm{sen}.\,5z & + & 0\,,02\,.\,\mathrm{sen}.\,5z \\
+ & 0\,,13\,.\,\mathrm{sen}.\,6z & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlrl}
r = 2{,}370925 & -\,0{,}2083882\,.\,\cos.\,z & \left(\frac{dr}{d\phi}\right).\,1' = & 0{,}00006081 \\
 & -\,0{,}0091998\,.\,\cos.\,2z & & -\,0{,}00067983.\cos.\,z \\
 & -\,0{,}0006093\,.\,\cos.\,3z & & -\,0{,}00006018.\cos.\,2z \\
 & -\,0{,}0000479\,.\,\cos.\,4z & & -\,0{,}00000711.\cos.\,3z \\
 & -\,0{,}0000042\,.\,\cos.\,5z & & -\,0{,}00000064.\cos.\,4z \\
 & -\,0{,}0000004\,.\,\cos.\,6z & & -\,0{,}00000009.\cos.\,5z
\end{array}$$

Se indichiamo per β la latitudine eliocentrica, per u l'argomento di latitudine, sarà .... $\mathrm{sen}.\,\beta = \mathrm{sen}.\,i\,.\,\mathrm{sen}.\,u$, e quindi

$$\beta = \left(\mathrm{sen}.\,i + \frac{1}{8}\,\mathrm{sen}.^3\,i + \frac{3}{64}\,\mathrm{sen}.^5\,i\right)\mathrm{sen}.\,u - \left(\frac{1}{24}\,\mathrm{sen}.^3\,i + \frac{3}{128}\,\mathrm{sen}.^5\,i\right)$$
$$\mathrm{sen}.\,3u + \frac{3}{640}\,.\,\mathrm{sen}.^5\,i\,.\,\mathrm{sen}.\,5u\,.$$

La quale ridotta in numeri nel caso nostro unitamente alla sua variazione per 10″ sarà

$$\beta = 25665'',77\,.\,\mathrm{sen}.\,u - 16'',60\,.\,\mathrm{sen}.\,3u + 0'',03\,.\,\mathrm{sen}.\,5u$$
$$\left(\frac{d\beta}{di}\right).\,10'' = +\,9\,,98\,.\,\mathrm{sen}.\,u - 0\,,02\,.\,\mathrm{sen}.\,3u\,.$$

La tavola II contiene per ogni mezzo grado dell'anomalia media i valori di E, $\left(\frac{d\mathrm{E}}{d\phi}\right).\,1'$, r, $\left(\frac{dr}{d\phi}\right).\,1'$; col mezzo di questa tavola si può calcolare con somma facilità l'equazione del centro, ed il raggio vettore corrispondenti per ogni anomalia media al sistema superiore di elementi. Che se si desiderassero le analoghe quantità per un'altra ellisse, in cui l'angolo ϕ (il seno del quale rappresenta l'eccentricità) differisce dal precedente di un numero a'' di secondi, basterebbe prendere i valori di $\left(\frac{d\mathrm{E}}{d\phi}\right).\,1'$, $\left(\frac{dr}{d\phi}\right).\,1'$ corrispondenti al medesimo grado di anomalia, ed avendoli moltiplicati per $\frac{a''}{60}$ si applicheranno i prodotti col loro segno ai valori di E, e di r. Si suppone per altro che il numero a'' sia tale da non oltrepassare due o al più tre minuti primi. Allo stesso modo si potrà tener conto della variazione secolare dell'equazione del centro, e del raggio vettore, moltiplicando i numeri delle colonne $\left(\frac{dE}{d\phi}\right).1'$, $\left(\frac{dr}{d\phi}\right).1'$ per il numero ... $\frac{0'',828}{60''}t = 0'',0138.t$, ove t esprime il numero degli anni e parti d'anno compresi fra il principio del 1810, e l'istante per cui si calcola; gli anni posteriori al 1810 essendo assunti positivi, e gli anteriori negativi. Questi prodotti daranno le variazioni cercate, le quali si dovranno sommare coi loro segni ai valori di E, e di r. La tavola III dà la latitudine eliocentrica di Vesta supposta l'inclinazione $7^\circ.8'.2'',4$; e la colonna $\left(\frac{d\beta}{di}\right).10''$ rappresenta la variazione di questa latitudine per una variazione. In tal guisa potrà servire a calcolare la latitudine eziandio per un'inclinazione differente dalla superiore, ed a tener conto della variazione secolare della medesima, qualora si creda opportuno. Chiamando m il numero corrispondente ad un dato valore dell'argomento nella colonna $\left(\frac{d\beta}{di}\right).10''$, la variazione secolare della latitudine sarà $= -0'',012.m.t$ essendo t il numero degli anni al di sopra del 1810.

La longitudine di Vesta ridotta all'ecclittica si troverà comodamente per la formola

$$\lambda' = \lambda - \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\,i}{\text{sen.}\,1''}\,\text{tang.}\,\beta\,.\,\text{cos.}\,u$$

ove λ è la longitudine vera nell'orbita corretta dalle perturbazioni, che si calcolano con le tavole seguenti, come ora indicheremo, u è l'argomento di latitudine, ossia la longitudine vera nell'orbita meno la longitudine del nodo. Per il sistema attuale di elementi il numero costante ... $\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}.1'}{\text{sen.}\,1''}$ è tale, che il suo logaritmo è ... $= 4,10917$.

Spiegazione delle Tavole delle perturbazioni di Vesta poste in seguito alle precedenti.

Siccome l'eccentricità, ed il perielio hanno subito una forte variazione in virtù delle precedenti correzioni, così ho creduto opportuno di correggere le equazioni rappresentanti le perturbazioni dipendenti dall'eccentricità, e dal perielio di Vesta. Avendo poi sommato le equazioni dipendenti da un medesimo angolo variabile ho ottenuto le seguenti espressioni per δv, e δr.

$$
\begin{array}{rl}
\delta v = -114'',59.\text{sen}.D & +\ 28'',75.\text{sen}.(\text{♃}+136°.0') \\
+133,28.\text{sen}.2D & +180,50.\text{sen}.(\text{⚶}-2\text{♃}+242°.51') \\
+13,87.\text{sen}.3D & +307,62.\text{sen}.(2\text{⚶}-3\text{♃}+41°.18') \\
+2,90.\text{sen}.4D & +\ 4,76.\text{sen}.(3\text{⚶}-4\text{♃}+36°.45) \\
+0,77.\text{sen}.5D & +\ 2,03.\text{sen}.(4\text{⚶}-5\text{♃}+35°.35) \\
+0,23.\text{sen}.6D & +\ 14,02.\text{sen}.(2\text{⚶}-\text{♃}+113°.46) \\
 & +\ 19,49.\text{sen}.(3\text{⚶}-2\text{♃}+289°.47,5) \\
 & +\ 2,87.\text{sen}.(4\text{⚶}-3\text{♃}+288°.15) \\
\delta r = -0,0000457+4844.\cos.D & +\ 285.\cos.(\text{⚶}+119°.49') \\
-9362.\cos.2D & +\ 1011.\cos.(\text{♃}+302.59) \\
-1185.\cos.3D & +\ 3436.\cos.(\text{⚶}-2\text{♃}+60°.19') \\
-274.\cos.4D & +18817.\cos.(2\text{⚶}-3\text{♃}+221.42) \\
-78.\cos.5D & +\ 841.\cos.(3\text{⚶}-4\text{♃}+219.23) \\
-25.\cos.6D & +\ 206.\cos.(4\text{⚶}-5\text{♃}+219.22) \\
 & +\ 600.\cos.(2\text{⚶}-\text{♃}+105.9) \\
 & +\ 821.\cos.(3\text{⚶}-2\text{♃}+292.34) \\
 & +\ 131.\cos.(4\text{⚶}-3\text{♃}+295.29) \\
 & +\ 40.\cos.(5\text{⚶}-4\text{♃}+297.53)
\end{array}
$$

ove è da notare, che tutti i coefficienti esprimono dieci millionesime parti dell'unità.

La tavola III comprende le parti di δv, e di δr dipendenti dall'angolo $D =$ long. med. di ⚶ — longit. med. di ♃. L'argomento suppone la circonferenza divisa in quattrocento parti; esso occupa le due prime colonne, e quando in ogni caso particolare l'argomento D si trova sotto la prima colonna, in allora il segno che precede il valore di δv, o di δr è quello che deve adoperarsi; ma se trovasi scritto l'argomento nella seconda colonna, conviene in allora dare ai valori di δv, e dr il segno seguente.

Per i valori di δr il segno precedente è sempre identico al seguente; non così per quelli di δv. Di più essendosi nelle tavole rigettata l'ultima cifra, i calcoli concernenti il raggio vettore portano sempre sei cifre decimali; così la porzione da applicarsi al raggio vettore ricavata da questa tavola esprime delle millionesime parti dell'unità. Per ridurre in tavole comode all'uso le altre equazioni dipendenti dalla longitudine di Vesta, e di Giove, ho adoperato la seguente trasformazione. Chiamando $\delta v'$ la seconda parte di δv, e $\delta r'$ la seconda parte di δr si ottiene facilmente

$$\begin{array}{rl}
\delta v' = -20'',68 & \left.\begin{array}{ll}
+\ 82'',36\,.\cos.D & -160'',61\,.\text{sen}.D \\
-236,77\,.\cos.2D & +190,19\,.\text{sen}.2D \\
-\ 1,22\,.\cos.3D & +\ 24,18\,.\text{sen}.3D \\
-\ 0,75\,.\cos.4D & +\ 3,91\,.\text{sen}.4D
\end{array}\right\}.\text{sen}.\text{♃} \\
19'',97 & \left.\begin{array}{ll}
-\ 82,36\,.\text{sen}.D & -160'',61\,.\cos.D \\
+225,47\,.\text{sen}.2D & +215,87\,.\cos.2D \\
+\ 14,42\,.\text{sen}.3D & -\ 12,50\,.\cos.3D \\
+\ 2,55\,.\text{sen}.4D & -\ 1,55\,.\cos.4D
\end{array}\right\}.\cos.\text{♃}
\end{array}$$

Il valore di $\delta r'$ espresso in dieci millionesime parti dell'unità sarà il seguente.

$$\begin{array}{rl}
\delta r' = 848 & \left.\begin{array}{ll}
+\ 1847\,.\text{sen}.D & +\ 2749\,.\cos.D \\
-\ 13892\,.\text{sen}.2D & -\ 13097\,.\cos.2D \\
-\ 965\,.\text{sen}.3D & +\ 225\,.\cos.3D \\
-\ 215\,.\text{sen}.4D & -\ 11\,.\cos.4D \\
-\ 19\,.\text{sen}.5D & +\ 36\,.\cos.5D
\end{array}\right\}.\text{sen}.\text{♃} \\
550 & \left.\begin{array}{ll}
+\ 1565\,.\cos.D & -\ 3239\,.\text{sen}.D \\
-\ 14216\,.\cos.2D & +\ 11939\,.\text{sen}.2D \\
-\ 335\,.\cos.3D & +\ 1293\,.\text{sen}.3D \\
-\ 103\,.\cos.4D & +\ 249\,.\text{sen}.4D \\
+\ 19\,.\cos.5D & +\ 36\,.\text{sen}.5D
\end{array}\right\}.\cos.\text{♃}
\end{array}$$

ossia più brevemente

$$\delta v' = \text{A} \,.\, \text{sen.}\, ♃ + \text{B} \,.\, \text{cos.}\, ♃$$
$$\delta r' = \text{A}' \,.\, \text{sen.}\, ♃ + \text{B}' \,.\, \text{cos.}\, ♃$$

Le quantità A, B, A', B' dipendono unicamente come si vede dall'angolo D. La tavola IV comprende i valori di queste quantità per tutti i gradi della circonferenza divisa in quattrocento parti. Prendendo pertanto da essa coll'argomento D i valori di A, B, A', B', e moltiplicando A, A' per sen. ♃; B, B' per cos. ♃ si formeranno le seconde parti delle perturbazioni cercate in virtù delle superiori formule. Conviene soltanto osservare, che nei valori di A', B' si è rigettata l'ultima cifra, e così il valore di $\delta r'$ sarà espresso in millionesime parti dell'unità. Per ultimo il valore di δs dato di sopra si può porre sotto la seguente forma.

$$\delta s = +0',74 + \left.\begin{array}{ll} 1,24 \,.\, \text{cos.D} & + 4'',89 \,.\, \text{sen.D} \\ -3,65 \,.\, \text{cos.2D} & -12,20 \,.\, \text{sen.2D} \\ -0,20 \,.\, \text{cos.3D} & -0,30 \,.\, \text{sen.3D} \end{array}\right\} .\, \text{sen.}\, ♃$$
$$2'',91 - \left.\begin{array}{ll} 1,24 \,.\, \text{sen.D} & + 4,89 \,.\, \text{cos.D} \\ +3,09 \,.\, \text{sen.2D} & -14,44 \,.\, \text{cos.2D} \\ +0,08 \,.\, \text{sen.3D} & -0,80 \,.\, \text{cos.3D} \end{array}\right\} .\, \text{cos.}\, ♃$$

ossia $\delta s = \text{A}'' \,.\, \text{sen.}\, ♃ + \text{B}'' \,.\, \text{cos.}\, ♃$.

La tavola V dà i valori di A'', e di B'', che sostituiti in questa formula danno le perturbazioni prodotte da Giove nella latitudine eliocentrica di Vesta.

Non si sono aggiunte le tavole delle perturbazioni provenienti da Marte sia perchè sono esse trascurabili nel presente argomento, sia perchè se ne può tenere conto con tutta facilità, qualora si creda opportuno, calcolandole colla formola seguente.

Perturbazione in longitudine proveniente da Marte $= 10'',75 \,.\, \text{sen. M}$ essendo $\text{M} = 2⚶ - ♂ + 337°.\,35'$.

Il valore di M nel 1810 era $= 203°.\,0'$

il suo moto annuo $= 6°.\,59'.\,2''$.

TAVOLA I.

Per calcolare la longitudine media di Vesta, e gli argomenti per le perturbazioni.

Anni	Long. med. di ⚶	Perielio 249°	Nodo 103°	D	♃
1807	168°.15'.58'',1	15'.12'',2	10'.44'',3	259°,59	294°,38
1808	267 . 24 . 4 ,6	16 .46 ,4	10 .55 ,9	336 ,02	324 ,59
1809	6 . 48 .28 ,4	18 .20 ,9	11 . 15 ,7	12 ,65	355 ,25
1810	105 . 56 .34 ,5	19 .55 ,2	11 .31 ,3	89 ,11	25 ,45
1811	205 . 4 .50 ,7	21 .29 ,4	11 .47 ,0	165 ,54	56 . 6
1812	304 . 12 .46 ,6	23 . 3 ,6	12 . 2 ,6	241 ,98	86 . 26
1813	43 . 37 . 10 ,5	24 .38 ,1	12 . 18 ,2	318 ,61	116 . 52
1814	142 . 45 . 16 ,5	26 . 12 ,4	12 .33 ,6	395 ,06	147 . 12
1815	241 . 53 .22 ,6	27 .46 ,7	12 .49 ,2	71 ,46	177 . 34
1816	341 . 1 .28 ,7	29 .20 ,9	13 . 4 ,8	147 ,91	207 . 54
1817	80 . 25 .52 ,5	30 .55 ,4	13 .20 ,1	224 ,56	238 . 20
1818	179 . 33 .58 ,6	32 .29 ,7	13 .35 ,7	301 ,00	268 . 40
1819	278 . 42 . 4 ,7	34 . 3 ,9	13 .51 ,4	377 ,43	299 . 1
1820	17 . 50 . 10 ,7	35 .38 ,2	14 . 7 ,0	53 ,87	329 . 21
giorni	⚶	Perielio	Nodo	D	♃
1	0°. 16'. 17'',8	0'',3	0'',0	0°,21	5',0
2	0 .32 .35 ,5	0 ,5	0 ,1	0 ,42	10 ,0
3	0 .48 .53 ,3	0 ,8	0 ,1	0 ,63	15 ,0
4	1 . 5 . 11 ,1	1 ,0	0 ,2	0 ,84	20 ,0
5	1 .21 .28 ,8	1 ,3	0 ,2	1 ,05	24 ,9
6	1 .37 .46 ,6	1 ,6	0 ,3	1 ,26	29 ,9
7	1 .54 . 4 ,4	1 ,8	0 ,3	1 ,47	34 ,9
8	2 . 10 .22 ,2	2 ,1	0 ,3	1 ,68	39 ,9
9	2 .26 .39 ,9	2 ,3	0 ,4	1 ,89	44 ,9
10	2 .42 .57 ,7	2 ,6	0 ,4	2 ,09	49 ,9
20	5 .25 .55 ,4	5 ,2	0 ,9	4 ,19	1°.39,7
30	8 . 8 .53 ,1	7 ,7	1 ,3	6 ,28	2.29,6
40	10 .51 .50 ,8	10 ,3	1 ,7	8 ,38	3.19,5
50	13 .34 .48 ,5	12 ,9	2 ,2	10 ,47	4. 9,4
60	16 . 17 .46 ,2	14 ,5	2 ,6	12 ,56	4.59,3
70	19 . 0 .43 ,9	18 ,1	3 ,0	14 ,66	5.49,2
80	21 .43 .41 ,6	20 ,6	3 ,4	16 ,75	6.39,1
90	24 .26 .39 ,3	23 ,2	3 ,9	18 ,85	7.29,0
100	27 . 9 .37 ,0	25 ,8	4 ,3	20 ,94	8.18,8
110	29 .52 .34 ,7	28 ,4	4 ,7	23 ,03	9. 8,7
120	32 .35 .32 ,4	31 .0	4 ,2	25 ,13	9.58,5
130	35 . 18 .30 ,1	33 ,5	5 ,6	27 ,22	10.48,4
140	38 . 1 .27 ,8	36 ,1	6 ,0	29 ,32	11.38,3
150	40 .44 .25 ,5	38 ,7	6 ,5	31 ,41	12.28,2
160	43 .27 .23 ,2	41 ,3	6 ,9	33 ,50	13.18,1
170	46 . 10 .20 ,9	43 ,9	7 ,3	35 ,60	14. 8,0
180	48 .53 . 18 ,6	45 ,4	7 ,7	37 ,69	14.57,8
190	51 .36 . 16 ,3	49 ,0	8 ,2	39 ,79	15.47,7
200	54 . 19 . 14 ,0	51 ,6	8 ,6	41 ,88	16.37,6
210	57 .42 . 11 ,7	54 ,2	9 ,0	43 ,97	17.27,5
220	59 .45 . 9 ,4	56 ,8	9 ,5	46 ,07	18.17,4
230	62 .28 . 7 ,1	59 ,3	9 ,9	48 ,16	19. 7,3
240	65 . 11 . 4 ,8	1'. 1 ,9	10 ,3	50 ,26	19.57,1
250	67 .54 . 2 ,5	1 . 4 ,5	10 ,8	52 ,35	20.47,0
260	70 .37 . 0 ,2	1 . 7 ,1	11 ,2	54 ,44	21.36,9
270	73 . 19 .57 ,9	1 . 9 ,6	11 ,6	56 ,54	22.26,6
280	76 . 2 .55 ,6	1 . 12 ,2	12 ,0	58 ,63	23 16,5
290	78 .45 .53 ,3	1 . 14 ,8	12 ,5	60 ,73	24. 6,4
300	81 .28 .51 ,0	1 . 17 ,4	12 ,9	62 ,82	24 56,3
310	84 . 11 .48 ,7	1 . 19 ,3	13 ,3	64 ,91	25 46;2
320	86 .54 .46 ,4	1 .22 ,6	13 ,8	67 ,01	26.36,0
330	89 .37 .44 ,1	1 .25 ,1	14 ,2	69 ,10	27.25,9
340	92 .20 .41 ,8	1 .27 ,7	14 ,6	71 ,20	28.15,8
350	95 . 3 .39 ,5	1 .30 ,3	15 ,0	73 ,29	29. 5,7
360	97 .46 .37 ,2	1 .32 ,9	15 ,5	75 ,38	29.55,6

Moti medi per le ore e minuti.			
Ore	⚶	♃	D
1	0'.40'',7	0',2	0',01
2	1 .21 ,5	0 ,4	0 ,02
3	2 . 2 ,2	0 ,6	0 ,03
4	2 .43 ,0	0 ,8	0 ,04
5	3 .23 ,7	1 ,0	0 ,04
6	4 . 4 ,4	1 ,2	0 ,05
7	4 .45 ,2	1 ,4	0 ,06
8	5 .25 ,9	1 ,7	0 ,07
9	6 . 6 ,7	1 ,9	0 ,08
10	6 .47 ,4	2 ,1	0 ,09
11	7 .28 ,1	2 ,3	0 ,10
12	8 . 8 ,9	2 ,5	0 ,10
13	8 .49 ,6	2 ,7	0 ,11
14	9 .30 ,4	2 ,9	0 ,12
15	10 . 11 ,1	3 ,1	0 ,13
16	10 .51 ,8	3 ,3	0 ,14
17	11 .32 ,6	3 ,5	0 ,15
18	12 . 13 ,3	3 ,7	0 ,16
19	12 .54 ,1	3 ,9	0 ,17
20	13 .34 ,8	4 ,1	0 ,18
21	14 . 15 ,5	4 ,4	0 ,19
22	14 .56 ,3	4 ,6	0 ,19
23	15 .37 ,0	4 ,8	0 ,20
24	16 . 17 ,8	5 ,0	0 ,20
Minuti	Moto di ⚶		
2	1'',3		
4	2 ,7		
6	4 ,1		
8	5 ,4		
10	6 ,8		
12	8 ,2		
14	9 ,5		
16	10 ,9		
18	12 ,2		
20	13 ,6		
22	15 ,0		
24	16 ,3		
26	17 ,6		
28	19 ,0		
30	20 ,4		
32	21 ,7		
34	23 ,1		
36	24 ,4		
38	25 ,8		
40	27 ,2		
42	28 ,5		
44	29 ,9		
46	31 ,3		
48	32 ,6		
50	33 ,9		
52	35 ,3		
54	36 ,7		
56	38 ,0		
58	39 ,4		
60	40 ,7		

	Giorni dell' anno	
	Comune	Bisestile
0 Gennajo	0	0
0 Febbrajo	31	31
0 Marzo	59	60
0 Aprile	90	91
0 Maggio	120	121
0 Giugno	151	152
0 Luglio	181	182
0 Agosto	212	213
0 Settemb.	243	244
0 Ottobre	273	274
0 Novemb.	304	305
0 Dicemb.	334	335

TAVOLA II.

Argomento = Long. med. ♅ — Perielio . ♅

Argom.	Equazione del centro +	Differ.	$\left(\frac{dE}{d\phi}\right) . 1'$	Raggio vettore	Differ.	$\left(\frac{dr}{d\phi}\right) . 1'$	Argom.
0 . 0	0°. 0'. 0",0	5'.58",0	0', 00	2 , 152675	10	— 687 , 4	360. 0
0 . 30	5 .58 , 0	57 , 9	1 , 32	2 , 152685	29	687 , 0	359.30
1 . 0	11 .55 , 9	57 , 8	2 , 63	2 , 152714	48	686 , 9	359. 0
1 . 30	17 .53 , 7	57 , 7	3 , 95	2 , 152762	67	686 , 7	358.30
2 . 0	23 .51 , 4	57 , 6	5 , 27	2 , 152829	86	686 , 4	358. 0
2 . 30	29 .49 , 0	57 , 5	6 , 58	2 , 152915	105	686 , 1	357.30
3 . 0	35 .46 , 5	57 , 2	7 , 89	2 , 153020	125	685 , 7	357. 0
3 . 30	41 .43 , 7	56 , 9	9 , 20	2 , 153145	143	685 , 2	356.30
4 . 0	47 .40 , 6	56 , 5	10 , 51	2 , 153288	163	684 , 6	356. 0
4 . 30	53 .37 , 1	56 , 2	11 , 82	2 , 153451	181	683 , 9	355.30
5 . 0	59 .33 , 3	56 , 0	13 , 13	2 , 153632	201	— 683 , 2	355. 0
5 . 30	1 . 5 .29 , 3	55 , 5	14 , 44	2 , 153833	220	— 682 , 4	354.30
6 . 0	11 .24 , 8	55 , 0	15 , 74	2 , 154053	239	681 , 6	354. 0
6 . 30	17 .19 , 8	54 , 5	17 , 04	2 , 154292	258	680 , 6	353.30
7 . 0	23 .14 , 3	53 , 9	18 , 33	2 , 154550	276	679 , 6	353. 0
7 . 30	29 .18 , 2	53 , 4	19 , 62	2 , 154826	295	678 , 5	352.30
8 . 0	35 . 1 , 6	52 , 8	20 , 92	2 , 155121	315	677 , 3	352. 0
8 . 30	40 .54 , 4	52 , 1	21 , 21	2 , 155436	333	676 , 1	351.30
9 . 0	46 .46 , 5	51 , 4	23 , 50	2 , 155769	352	674 , 8	351. 0
9 . 30	52 .37 , 9	50 , 8	24 , 79	2 , 156121	362	673 , 4	350.30
10 . 0	58 .28 , 7	50 , 1	26 , 08	2 , 156490	390	— 672 , 0	350. 0
10 . 30	2 . 4 .18 , 8	49 , 0	27 , 36	2 , 156880	408	— 670 , 4	349.30
11 . 0	10 . 7 , 8	48 , 3	28 , 63	2 , 157288	426	668 , 8	349. 0
11 . 30	15 .56 , 1	47 , 5	29 , 90	2 , 157714	445	667 , 1	348.30
12 . 0	21 .43 , 6	46 , 6	31 , 17	2 , 158159	464	665 , 3	348. 0
12 . 30	27 .30 , 2	45 , 7	32 , 43	2 , 158623	482	663 , 5	347.30
13 . 0	33 .15 , 9	44 , 7	33 , 68	2 , 159105	501	661 , 6	347. 0
13 . 30	39 . 0 , 6	43 , 6	34 , 93	2 , 159606	517	659 , 6	346.30
14 . 0	44 .44 , 2	42 , 6	36 , 18	2 , 160123	536	657 , 6	346. 0
14 . 30	50 .26 , 8	41 , 5	37 , 43	2 , 160659	555	655 , 5	345.30
15 . 0	56 . 8 , 3	40 , 4	38 , 68	2 , 161214	573	— 653 , 4	345. 0
15 . 30	3 . 2 .48 , 7	39 , 2	39 , 90	2 , 161787	592	— 651 , 2	344.30
16 . 0	7 .27 , 9	38 , 2	41 , 12	2 , 162379	609	648 , 8	344. 0
16 . 30	13 . 6 , 1	36 , 9	42 , 34	2 , 162988	626	646 , 4	343.30
17 . 0	18 .43 , 0	35 , 5	43 , 56	2 , 163614	644	643 , 9	343. 0
17 . 30	24 .18 , 5	33 , 3	44 , 77	2 , 164258	662	641 , 3	342.30
18 . 0	29 .52 , 8	33 , 0	45 , 97	2 , 164920	680	638 , 7	342. 0
18 . 30	35 .25 , 8	31 , 6	47 , 17	2 , 165600	698	636 , 1	341.30
19 . 0	40 .57 , 4	30 , 3	48 , 36	2 , 166298	724	633 , 4	341. 0
19 . 30	46 .27 , 7	28 , 9	49 , 54	2 , 167022	732	630 , 6	340.30
20 . 0	51 .56 , 6	27 , 3	50 , 72	2 , 167744	750	— 627 , 8	340. 0
20 . 30	57 .23 , 9	25 , 8	51 , 90	2 , 168494	767	— 624 , 9	339.30
21 . 0	4 . 2 .49 , 7	24 , 4	53 , 07	2 , 169261	784	621 , 9	339. 0
21 . 30	8 .14 , 1	22 , 8	54 , 22	2 , 170045	800	618 , 8	338.30
22 . 0	13 .36 , 9	21 , 2	55 , 36	2 , 170845	818	615 , 7	338. 0
22 . 30	18 .58 , 1	19 , 7	56 , 50	2 , 171663	834	612 , 5	337.30
23 . 0	24 .17 , 8	17 , 9	57 , 64	2 , 172497	852	609 , 3	337. 0
23 . 30	29 .35 , 7	16 , 2	58 , 77	2 , 173349	868	606 , 0	336.30
24 . 0	34 .51 , 9	14 , 5	59 , 89	2 , 174217	883	602 , 6	336. 0
24 . 30	40 . 6 , 4	5 .12 , 9	61 , 00	2 , 175100	901	599 , 2	335.30
25 . 0	45 .19 , 3		62 , 10	2 , 176001		— 595 , 7	335. 0
	—						

Continuazione della TAVOLA *II.*

Argomento = Long. med. ⚶ — Perielio. ⚶

Argom.	Equazione del centro +	Differ.	$\left(\frac{dE}{d\phi}\right).1'$	Raggio vettore	Differ.	$\left(\frac{dr}{d\phi}\right).1'$	Argom.
25. 0	4°.45'.19'',3		62, 10	2, 176001		— 595, 7	335. 0
25.30	50.30, 5	5'.11'',2	63, 18	2, 176918	917	592, 1	334.30
26. 0	55.39, 8	9, 3	64, 26	2, 177350	932	588, 5	334. 0
26.30	5. 0.47, 1	7, 3	65, 34	2, 178800	950	584, 8	333.30
27. 0	5.52, 7	5, 6	66, 42	2, 179765	965	581, 1	333. 0
27.30	10.56, 6	3, 9	67, 48	2, 180746	981	577, 3	332.30
28. 0	15.58, 4	1, 8	68, 53	2, 181742	996	573, 5	332. 0
28.30	20.58, 2	4.59, 8	69, 57	2, 182754	1012	569, 6	331.30
29. 0	25.56, 1	57, 9	70, 61	2, 183782	1028	565, 7	331. 0
29.30	30.52, 1	56, 0	71, 64	2, 184824	1042	561, 7	330.30
30. 0	35.46, 1	54, 0	72, 66	2, 185883	1059	— 557, 6	330. 0
30.30	40.38, 0	51, 9	73, 66	2, 186956	1073	— 553, 5	329.30
31. 0	45.27, 8	49, 8	74, 66	2, 188045	1089	549, 4	329. 0
31.30	50.15, 7	47, 9	75, 65	2, 189148	1103	545, 2	328.30
32. 0	55. 1, 3	45, 6	76, 63	2, 190266	1118	540, 9	328. 0
32.30	59.44, 6	43, 3	77, 59	2, 191399	1133	536, 6	327.30
33. 0	6. 4.25, 7	41, 1	78, 54	2, 192545	1146	532, 2	327. 0
33.30	9. 5, 1	39, 4	79, 49	2, 193706	1161	527, 8	326.30
34. 0	13.42, 1	37, 0	80, 43	2, 194882	1176	523, 3	326. 0
34.30	18.16, 9	34, 8	81, 36	2, 196071	1189	518, 8	326.30
35. 0	22.49, 3	32, 4	82, 29	2, 197275	1204	— 514, 2	325. 0
35.30	27.19, 2	29, 9	83, 20	2, 198492	1217	— 509, 6	324.30
36. 0	31.46, 9	27, 7	84, 10	2, 199723	1231	505, 0	324. 0
36.30	36.12, 5	25, 6	84, 98	2, 200968	1245	500, 3	323.30
37. 0	40.35, 7	23, 2	85, 86	2, 202226	1258	495, 5	323. 0
37.30	44.56, 5	20, 8	86, 73	2, 203497	1271	490, 7	322.30
38. 0	49.14, 9	18, 4	87, 59	2, 204781	1284	485, 9	322. 0
38.30	53.30, 8	15, 9	88, 44	2, 206079	1298	481, 0	321.30
39. 0	57.44, 5	13, 7	89, 28	2, 207388	1309	476, 1	321. 0
39.30	7. 1.55, 6	11, 1	90, 10	2, 208711	1323	471, 2	320.30
40. 0	6. 4, 3	8, 7	90, 92	2, 210047	1336	— 466, 2	320. 0
40.30	10.10, 3	6, 0	91, 72	2, 211394	1347	— 461, 2	319.30
41. 0	14.13, 9	3. 3, 6	92, 52	2, 212754	1360	456, 1	319. 0
41.30	18.15, 2	1, 3	93, 30	2, 214125	1371	451, 0	318.30
42. 0	22.13, 8	58, 6	94, 08	2, 215509	1384	445, 8	318. 0
42.30	26. 9, 8	56, 0	94, 84	2, 216905	1396	440, 6	317.30
43. 0	30. 3, 2	53, 4	95, 59	2, 218311	1406	435, 4	317. 0
43.30	33.54, 1	50, 9	96, 32	2, 219730	1419	430, 2	316.30
44. 0	37.42, 4	48, 3	97, 05	2, 221161	1431	424, 9	316. 0
44.30	41.28, 0	45, 6	97, 77	2, 222601	1440	419, 6	315.30
45. 0	45.11, 0	43, 0	98, 48	2, 224054	1453	— 414, 6	315. 0
45.30	48.51, 6	40, 6	99, 17	2, 225517	1463	— 408, 8	314.30
46. 0	52.29, 3	37, 7	99, 86	2, 226991	1474	403, 4	314. 0
46.30	56. 4, 3	35, 0	100, 52	2, 228475	1484	398, 0	313.30
47. 0	59.36, 5	32, 2	101, 18	2, 229969	1494	392, 5	313. 0
47.30	8. 3. 6, 2	29, 7	101, 83	2, 231474	1505	387, 0	312.30
48. 0	6.33, 1	26, 9	102, 48	2, 232990	1516	381, 4	312. 0
48.30	9.57, 3	24, 2	103, 10	2, 234514	1524	375, 8	311.30
49. 0	13.18, 7	21, 4	103, 72	2, 236049	1535	370, 2	311. 0
49.30	16.37, 4	18, 7	104, 33	2, 237594	1545	364, 6	310.30
50. 0	19.53, 2	3.15, 8	104, 93	2, 239147	1553	— 358, 9	310. 0
	—						

Continuazione della TAVOLA *II.*

Argomento = Long. med. ♅ — Perielio . ♅

Argom.	Equazione del centro +	Differ.	$\left(\frac{dE}{d\phi}\right) . 1'$	Raggio vettore	Differ.	$\left(\frac{dr}{d\phi}\right) . 1'$	Argom.
50. 0	8°. 19'. 53", 2	3'. 13", 1	104, 93	2, 239147	1564	— 358, 9	310. 0
50. 30	23. 6, 3	10, 4	105, 51	2, 240711	1571	353, 3	309. 30
51. 0	26. 16, 7	7, 6	106, 08	2, 242282	1582	347, 6	309. 0
51. 30	29. 24, 3	4, 8	106, 64	2, 243864	1590	341, 9	308. 30
52. 0	32. 29, 1	1, 8	107, 18	2, 245454	1598	336, 1	308. 0
52. 30	35. 30, 9	2. 59, 1	107, 72	2, 247052	1608	330, 3	307. 30
53. 0	38. 30, 0	56, 3	108, 25	2, 248660	1615	324, 5	307. 0
53. 30	41. 26, 3	53, 4	108, 77	2, 250275	1624	318, 7	306. 30
54. 0	44. 19, 7	50, 7	109, 28	2, 251899	1631	312, 9	306. 0
54. 30	47. 10, 4	47, 8	109, 77	2, 253530	1638	307, 1	305. 30
55. 0	49. 58, 2	44, 8	110, 24	2, 255168	1647	— 301, 2	305. 0
55. 30	52. 43, 0	42, 0	110, 70	2, 256815	1657	— 295, 3	304. 30
56. 0	55. 25, 0	39, 1	111, 16	2, 258472	1662	289, 4	304. 0
56. 30	58. 4, 1	36, 2	111, 61	2, 260134	1669	283, 5	303. 30
57. 0	9. 0. 40, 3	33, 3	112, 05	2, 261803	1677	277, 5	303. 0
57. 30	3. 13, 6	30, 5	112, 47	2, 263480	1682	271, 6	302. 30
58. 0	5. 44, 1	27, 4	112, 89	2, 265162	1691	265, 6	302. 0
58. 30	8. 11, 5	24, 7	113, 29	2, 266853	1696	259, 7	301. 30
59. 0	10. 36, 2	21, 7	113, 68	2, 268549	1702	253, 7	301. 0
59. 30	12. 57, 9	18, 7	114, 05	2, 270252	1709	247, 7	300. 30
60. 0	15. 16, 6	15, 9	114, 42	2, 271961	1716	— 241, 6	300. 0
60. 30	17. 32, 5	13, 0	114, 78	2, 273677	1721	— 235, 6	299. 30
61. 0	19. 45, 5	10, 1	115, 13	2, 275398	1728	229, 6	299. 0
61. 30	21. 55, 6	7, 1	115, 46	2, 277126	1733	223, 5	298. 30
62. 0	24. 2, 7	4, 1	115, 79	2, 278859	1737	217, 4	298. 0
62. 30	26. 6, 8	2. 1, 2	116, 10	2, 280596	1744	211, 4	297. 30
63. 0	28. 8, 0	1. 58, 3	116, 41	2, 282440	1748	205, 3	297. 0
63. 30	30. 5, 3	55, 3	116, 70	2, 284088	1753	199, 2	296. 30
64. 0	32. 1, 6	52, 4	116, 99	2, 285841	1757	193, 1	296. 0
64. 30	33. 54, 0	49, 4	117, 25	2, 287598	1763	187, 0	295. 30
65. 0	35. 43, 4	46, 5	117, 51	2, 289361	1769	— 180, 9	295. 0
65. 30	37. 29, 9	43, 6	117, 75	2, 291130	1773	— 174, 8	294. 30
66. 0	39. 13, 5	40, 7	117, 99	2, 292903	1777	168, 7	294. 0
66. 30	40. 54, 2	37, 8	118, 22	2, 294680	1779	162, 6	293. 30
67. 0	42. 32, 0	34, 7	118, 44	2, 296458	1783	156, 4	293. 0
67. 30	44. 6, 7	31, 8	118, 64	2, 298242	1788	150, 3	292. 30
68. 0	45. 38, 5	28, 8	118, 83	2, 300030	1791	144, 2	292. 0
68. 30	47. 7, 3	26, 0	119, 01	2, 301821	1794	138, 1	291. 30
69. 0	48. 33, 3	22, 9	119, 19	2, 303615	1798	131, 9	291. 0
69. 30	49. 56, 2	20, 0	119, 35	2, 305413	1802	125, 8	290. 30
70. 0	51. 16, 2	17, 2	119, 50	2, 307215	1803	— 119, 6	290. 0
70. 30	52. 33, 4	14, 2	119, 65	2, 309018	1807	— 113, 5	289. 30
71. 0	53. 47, 6	11, 2	119, 80	2, 310825	1809	107, 4	289. 0
71. 30	54. 58, 8	8, 3	119, 91	2, 312634	1812	101, 4	288. 30
72. 0	56. 7, 1	5, 5	120, 02	2, 314446	1814	95, 3	288. 0
72. 30	57. 12, 6	1. 2, 5	120, 11	2, 316260	1817	89, 2	287. 30
73. 0	58. 15, 1	0. 59, 5	120, 20	2, 318077	1818	83, 0	287. 0
73. 30	59. 14, 6	56, 6	120, 28	2, 319895	1820	76, 8	286. 30
74. 0	10. 0. 11, 2	53, 8	120, 36	2, 321715	1822	70, 6	286. 0
74. 30	1. 5, 0	50, 8	120, 42	2, 323537	1823	64, 5	285. 30
75. 0	1'. 55, 8		120, 47	2, 325360		— 58, 4	285. 0
	—						

Continuazione della TAVOLA *II.*

Argomento = Long. med. ⚶ — Perielio . ⚶

Argom.	Equazione del centro +	Differ.	$\left(\frac{dE}{d\phi}\right).1'$	Raggio vettore	Differ.	$\left(\frac{dr}{d\phi}\right).1'$	Argom.
75. 0	10°. 1'.55",8		120,47	2,325360		− 58,4	285. 0
75.30	2.43,7	0'.47",9	120,51	2,327185	1825	52,3	284.30
76. 0	3.28,7	45,0	120,55	2,239011	1826	46,2	284. 0
76.30	4.10,9	42,2	120,57	2,330839	1828	40,1	283.30
77. 0	4.50,2	39,3	120,58	2,332667	1828	34,0	283. 0
77.30	5.26,4	36,2	120,59	2,334496	1829	27,9	282.30
78. 0	5.59,9	33,5	120,58	2,336325	1829	21,9	282. 0
78.30	6.30,6	30,7	120,56	2,338156	1831	15,9	281.30
79. 0	6.58,4	27,8	120,54	2,339987	1831	10,0	281. 0
79.30	7.23,3	24,9	120,51	2,341817	1830	− 3,9	280.30
80. 0	7.45,3	22,0	120,46	2,343649	1832	+ 2,2	280. 0
80.30	8. 4,5	19,2	120,40	2,345479	1830	+ 8,3	279.30
81. 0	8.21,0	15,5	120,32	2,347310	1831	14,3	279. 0
81.30	8.34,4	13,4	120,25	2,349141	1831	20,3	278.30
82. 0	8.45,1	10,7	120,18	2,350971	1830	26,3	278. 0
82.30	8.53,0	7,9	120,09	2,352801	1830	32,3	277.30
83. 0	8.58,2	5,2	120,00	2,354629	1828	38,3	277. 0
83.30	9. 0,4	0. 2,2	119,89	2,356457	1828	44,3	276.30
84. 0	8.59,9	0. 5,5	119,77	2,358284	1827	50,2	276. 0
84.30	8.56,6	1. 3,3	119,64	2,360110	1826	56,1	275.30
85. 0	8.50,5	6,1	119,51	2,361935	1825	+ 62.0	275. 0
85.30	8.41,7	8,8	119,36	2,363758	1823	+ 67,9	274.30
86. 0	8.30,1	11,6	119,21	2,365579	1821	73,8	274. 0
86.30	8.15,9	14,2	119,05	2,367399	1820	79,7	273.30
87. 0	7.58,9	17,0	118,88	2,369216	1817	85,5	273. 0
87.30	7.38,9	20,0	118,70	2,371032	1816	91,4	272.30
88. 0	7.16,3	22,6	118,52	2,372846	1814	97,2	272. 0
88.30	6.51,2	25,1	118,32	2,374657	1811	103,0	271.30
89. 0	6.23,2	28,0	118,12	2,376466	1809	108,8	271. 0
89.30	5.52,6	30,6	117,91	2,378272	1806	114,6	270.30
90. 0	5.19,2	33,4	117,69	2,380073	1801	+ 120,4	270. 0
90.30	4.43,2	36,0	117,45	2,381872	1799	+ 126,1	269.30
91. 0	4. 4,3	38,9	117,22	2,383668	1796	131,8	269. 0
91.30	3.23,2	41,1	116,98	2,385462	1794	137,5	268.30
92. 0	2.39,2	44,0	116,74	2,387257	1795	143,2	268. 0
92.30	1.52,5	46,7	116,48	2,389045	1788	148,9	267.30
93. 0	1. 3,2	49,3	116,22	2,390832	1787	154,6	267. 0
93.30	0.11,5	51,7	115,94	2,392614	1782	160,2	266.30
94. 0	9.59.17,0	54,5	115,65	2,394393	1779	165,7	266. 0
94.30	58.20,1	56,9	115,36	2,396168	1775	171,3	265.30
95. 0	57.20,5	0.59,6	115,07	2,397939	1771	+ 176,9	265. 0
95.30	56.18,3	1. 2,2	114,76	2,399706	1767	+ 182,5	264.30
96. 0	55.13,5	4,8	114,45	2,401469	1763	188,0	264. 0
96.30	54. 6,2	7,3	114,13	2,403228	1759	193,5	263.30
97. 0	52.56,4	9,8	113,80	2,404984	1756	199,0	263. 0
97.30	51.44,1	12,3	113,46	2,406733	1749	204,5	262.30
98. 0	50.29,4	14,7	113,12	2,408479	1746	209,9	262. 0
98.30	49.12,0	17,4	112,76	2,410221	1742	215,3	261.30
99. 0	47.52,2	19,8	112,40	2,411956	1735	220,7	261. 0
99.30	46.29,9	22,3	112,02	2,413687	1731	226,1	260.30
100. 0	45. 5,2	0'.24,7	111,68	2,415413	1726	+ 231,4	260. 0
	−						

Continuazione della Tavola II.

Argomento = Long. med. ☿ — Perielio . ☿

Argom.	Equazione del centro +	Differ.	$\left(\frac{dE}{d\phi}\right).1'$	Raggio vettore	Differ.	$\left(\frac{dr}{d\phi}\right).1'$	Argom.
100 . 0	9°.45′. 5″,2		111 , 68	2 , 415413		+ 231 , 4	260. 0
100 . 30	43 .38 , 1	1′.27″,1	111 , 28	2 , 417135	1722	236 , 8	259.30
101 . 0	42. 8 , 5	29 , 6	110 , 92	2 , 418851	1716	242 , 1	259. 0
101 . 30	40 .36 , 3	32 , 2	110 , 52	2 , 420561	1710	247 , 3	258.30
102 . 0	39. 1 , 9	34 , 4	110 , 14	2 , 422267	1706	252 , 6	258. 0
102 . 30	37 .25 , 0	36 , 9	109 , 72	2 , 423966	1699	257 , 9	257.30
103 . 0	35 .45 , 8	39 , 2	109 , 34	2 , 425660	1694	263 , 1	257. 0
103 . 30	34. 4 , 4	41 , 4	108 , 90	2 , 427349	1689	268 , 3	256.30
104 . 0	32 .20 , 4	44 , 0	108 , 51	2 , 429032	1683	273 , 4	256. 0
104 . 30	30 .34 , 1	46 , 3	107 , 87	2 , 430708	1676	278 , 5	255.30
105 . 0	28 .45 , 5	48 , 6	107 , 63	2 , 432377	1669	+ 283 , 6	255. 0
105 . 30	26 .54 , 5	51 , 0	107 , 18	2 , 434039	1662	+ 288 , 7	254.30
106 . 0	25. 1 , 2	53 , 3	106 , 74	2 , 435697	1658	293 , 8	254. 0
106 . 30	23. 5 , 7	55 , 5	106 , 27	2 , 437347	1650	298 , 9	253.30
107 . 0	21. 7 , 9	1 . 57 , 8	105 , 84	2 , 438993	1646	303 , 9	253. 0
107 . 30	19. 7 , 8	2. 0 , 1	105 , 36	2 , 440631	1638	308 , 8	252.30
108 . 0	17. 5 , 6	2 , 2	104 , 90	2 , 442262	1629	313 , 7	252. 0
108 . 30	15. 1 , 1	4 , 5	104 , 41	2 , 443886	1624	318 , 6	251.30
109 . 0	12 .54 , 3	6 , 8	103 , 94	2 , 445504	1618	323 , 5	251. 0
109 . 30	10 .45 , 4	8 , 9	103 , 44	2 , 447114	1610	328 , 4	250.30
110 . 0	8 .34 , 2	11 , 2	102 , 96	2 , 448718	1604	+ 333 , 2	250. 0
110 . 30	6 .20 , 9	13 , 3	102 , 45	2 , 450314	1596	+ 338 , 1	249.30
111 . 0	4. 5 , 4	15 , 5	101 , 95	2 , 451902	1588	342 , 9	249. 0
111 . 30	1 .47 , 8	17 , 6	101 , 44	2 , 453483	1581	347 , 6	248.30
112 . 0	8 . 59 .27 , 9	19 , 9	100 , 93	2 , 455058	1575	352 , 3	248. 0
112 . 30	57. 6 , 0	21 , 9	100 , 40	2 , 456624	1566	357 , 0	247.30
113 . 0	54 .41 , 9	24 , 1	99 , 88	2 , 458182	1558	361 , 7	247. 0
113 . 30	52 .15 , 5	26 , 4	99 , 33	2 , 459733	1551	366 , 4	246.30
114 . 0	49 .47 , 1	28 , 4	98 , 81	2 , 461275	1542	371 , 0	246. 0
114 . 30	47 .17 , 1	30 , 0	98 , 27	2 , 462810	1533	375 , 6	245.30
115 . 0	44 .45 , 2	31 , 9	97 , 73	2 , 464340	1530	+ 380 , 1	245. 0
115 . 30	42 .10 , 8	34 , 4	97 , 17	2 , 465857	1517	+ 384 , 6	244.30
116 . 0	39 .34 , 4	36 , 4	96 , 61	2 , 467366	1509	389 , 2	244. 0
116 . 30	36 .56 , 1	38 , 3	96 , 04	2 , 468868	1502	393 , 7	243.30
117 . 0	34 .15 , 7	40 , 4	95 , 47	2 , 470362	1494	398 , 1	243. 0
117 . 30	31 .33 , 5	42 , 2	94 , 40	2 , 461848	1486	402 , 5	242.30
118 . 0	28 .49 , 2	44 , 3	94 , 33	2 , 473325	1477	406 , 9	242. 0
118 . 30	26. 3 , 0	46 , 2	93 , 74	2 , 474792	1467	411 , 2	241.30
119 . 0	23 .14 , 7	48 , 3	93 , 15	2 , 476252	1460	415 , 5	241. 0
119 . 30	20 .24 , 6	50 , 1	92 , 55	2 , 477702	1450	419 , 8	240.30
120 . 0	17 .32 , 6	52 , 0	91 , 96	2 , 479143	1441	+ 424 , 1	240. 0
120 . 30	14 .38 , 7	53 , 9	91 , 36	2 , 480574	1431	+ 428 , 3	239.30
121 . 0	11 .43 , 1	55 , 6	90 , 76	2 , 481997	1423	432 , 5	239. 0
121 . 30	8 .45 , 3	57 , 8	90 , 14	2 , 483414	1417	436 , 7	238.30
122 . 0	5 .45 , 8	2 . 59 , 5	89 , 53	2 , 484820	1406	440 , 8	238. 0
122 . 30	2 .44 , 5	3 . 1 , 3	88 , 91	2 , 486216	1396	444 , 9	237.30
123 . 0	7 . 59 .41 , 4	3 , 1	88 , 29	2 , 487602	1386	449 , 0	237. 0
123 . 30	56 .36 , 7	4 , 7	87 , 66	2 , 488979	1377	453 , 0	236.30
124 . 0	53 .30 , 1	6 , 6	87 , 02	2 , 490347	1368	457 , 0	236. 0
124 . 30	50 .21 , 7	8 , 4	86 , 38	2 , 491707	1360	461 , 0	235.30
125 . 0	47 .11 , 4	3 . 10 , 3	85 , 74	2 , 493055	1348	+ 464 , 9	235. 0
	—						

Continuazione della TAVOLA *II.*

Argomento = Long. med. ⚶ — Perielio . ⚶

Argom.	Equazione del centro +	Differ.	$\left(\frac{dE}{d\phi}\right).1'$	Raggio vettore	Differ.	$\left(\frac{dr}{d\phi}\right).1'$	Argom.
125. 0	7°.47'.11",4	3'.11",9	85 , 74	2 , 493055	1338	+ 464 , 9	235. 0
125.30	43.59 , 5	13 , 7	85 , 10	2 , 454393	1328	468 , 8	234.30
126. 0	40.45 , 8	15 , 3	84 , 46	2 , 495721	1319	472 , 7	234. 0
126.30	37.30 , 5	17 , 0	83 , 81	2 , 497040	1309	476 , 6	233.30
127. 0	34.13 , 5	18 , 7	83 , 15	2 , 498349	1299	480 , 4	233. 0
127.30	30.54 , 8	20 , 4	82 , 49	2 , 499648	1290	484 , 2	232.30
128. 0	27.34 , 4	21 , 9	81 , 82	2 , 500938	1279	488 , 0	232. 0
128.30	24.12 , 5	23 , 7	81 , 16	2 , 502217	1268	491 , 7	231.30
129. 0	20.48 , 8	25 , 3	80 , 50	2 , 503485	1258	495 , 4	231. 0
129.30	17.23 , 5	26 , 8	79 , 84	2 , 504743	1249	499 , 1	230.30
130. 0	13.56 , 7	28 , 2	79 , 15	2 , 505992	1238	+ 502 , 7	230. 0
130.30	10.28 , 5	29 , 9	78 , 48	2 , 507230	1227	+ 506 , 3	229.30
131. 0	6.58 , 6	31 , 5	77 , 78	2 , 508457	1217	509 , 8	229. 0
131.30	3.27 , 1	33 , 1	77 , 10	2 , 509674	1206	513 , 4	228.30
132. 0	6 . 59.54 , 0	34 , 5	76 , 40	2 , 510880	1196	516 , 9	228. 0
132.30	56.19 , 5	36 , 1	75 , 70	2 , 512076	1184	520 , 4	227.30
133. 0	52.43 , 4	37 , 5	75 , 00	2 , 513260	1175	523 , 8	227. 0
133.30	49. 5 , 9	39 , 1	74 , 30	2 , 514435	1163	527 , 2	226.30
134. 0	45.26 , 8	40 , 4	73 , 60	2 , 515598	1152	530 , 5	226. 0
134.30	41.46 , 4	42 , 1	72 , 89	2 , 516750	1141	533 , 8	225.30
135. 0	38. 4 , 3	43 , 3	72 , 18	2 , 517891	1131	+ 537 , 1	225. 0
135.30	34.21 , 0	44 , 7	71 , 47	2 , 519022	1120	+ 540 , 4	224.30
136. 0	30.36 , 3	46 , 1	70 , 75	2 , 520142	1109	543 , 6	224. 0
136.30	26.50 , 2	47 , 7	70 , 02	2 , 521251	1097	546 , 8	223.30
137. 0	23. 2 , 5	48 , 9	69 , 29	2 , 522348	1086	549 , 9	223. 0
137.30	19.13 , 6	50 , 1	68 , 57	2 , 523434	1075	553 , 0	222.30
138. 0	15.23 , 5	51 , 5	67 , 84	2 , 524509	1064	556 , 1	222. 0
138.30	11.32 , 0	53 , 0	67 , 11	2 , 525573	1052	559 , 2	221.30
139. 0	7.39 , 0	54 , 1	66 , 38	2 , 526625	1041	562 , 2	221. 0
139.30	3.44 , 9	55 , 4	65 , 64	2 , 527666	1029	565 , 2	220.30
140. 0	5 . 59.49 , 5	56 , 6	64 , 90	2 , 528695	1018	+ 568 , 1	220. 0
140.30	55.52 , 9	58 , 2	64 , 17	2 , 529713	1006	+ 571 , 0	219.30
141. 0	51.54 , 7	3 . 59 , 1	63 , 43	2 , 530719	995	573 , 9	219. 0
141.30	47.55 , 6	4 . 0 , 5	62 , 67	2 , 531714	982	576 , 8	218.30
142. 0	43.55 , 1	1 , 7	61 , 91	2 , 532696	972	579 , 6	218. 0
142.30	39.53 , 4	2 , 9	61 , 16	2 , 533668	960	582 , 4	217.30
143. 0	35.50 , 5	3 , 8	60 , 40	2 , 534628	948	585 , 1	217. 0
143.30	31.46 , 7	5 , 1	59 , 64	2 , 535576	936	587 , 8	216.30
144. 0	27.41 , 6	6 , 5	58 , 88	2 , 536512	913	590 , 4	216. 0
144.30	23.35 , 1	7 , 4	58 , 12	2 , 537435	914	593 , 1	215.30
145. 0	19.27 , 7	8 , 4	57 , 35	2 , 538349	901	+ 595 , 7	215. 0
145.30	15.19 , 3	9 , 6	56 , 58	2 , 539250	887	+ 598 , 3	214.30
146. 0	11. 9 , 7	10 , 8	55 , 81	2 , 540137	877	600 , 8	214. 0
146.30	6.58 , 9	11 , 7	55 , 04	2 , 541014	863	603 , 3	213.30
147. 0	2.47 , 2	12 , 7	54 , 26	2 , 541877	852	605 , 7	213. 0
147.30	4 . 58.34 , 5	13 , 9	53 , 49	2 , 542729	840	608 , 1	212.30
148. 0	54.20 , 6	15 , 0	52 , 71	2 , 543569	828	610 , 5	212. 0
148.30	50. 5 , 6	15 , 7	51 , 93	2 , 544397	816	612 , 9	211.30
149. 0	45.49 , 9	16 , 6	51 , 14	2 , 545213	803	615 , 2	211. 0
149.30	41.33 , 3	4 . 18 , 0	50 , 35	2 , 546016	790	617 , 5	210.30
150. 0	37.15 , 3		49 , 56	2 , 546806		+ 619 , 7	210. 0
	−						

Continuazione della Tavola II.

Argomento = Long. med. ♅ — Perielio . ♅

Argom.	Equazione del centro +	Differ.	$\left(\frac{dE}{d\phi}\right).1'$	Raggio vettore	Differ.	$\left(\frac{dr}{d\phi}\right).1'$	Argom.
150. 0	4°.37'.15",3	4'.18",5	49,56	2,546806	779	+ 619,7	210. 0
150.30	32.56,8	19,6	48,77	2,547585	767	621,9	209.30
151. 0	28.37,2	29,7	47,99	2,548352	754	624,1	209. 0
151.30	24.16,5	21,5	47,19	2,549106	741	626,2	208.30
152. 0	19.55,0	22,5	46,39	2,549847	729	628,3	208. 0
152.30	15.32,5	23,2	45,59	2,550576	717	630,4	207.30
153. 0	11. 9,3	24,1	44,80	2,551293	703	632,4	207. 0
153.30	6.45,2	24,9	44,00	2,551996	691	634,4	206.30
154. 0	2.20,3	25,8	43,20	2,552687	679	636,4	206. 0
154.30	3.57.54,5	26,5	42,40	2,553366	666	638,3	205.30
155. 0	53.28,0	27,4	41,60	2,554032	653	+ 640,2	205. 0
155.30	49. 0,6	28,2	40,80	2,554685	641	+ 642,0	204.30
156. 0	44.32,4	28,9	39,99	2,555326	628	643,8	204. 0
156.30	40. 3,5	29,8	39,18	2,555954	614	645,6	203.30
157. 0	35.33,7	30,3	38,36	2,556568	602	647,3	203. 0
157.30	31. 3,4	30,9	37,55	2,557170	590	649,0	202.30
158. 0	26.32,5	31,9	36,74	2,557760	577	650,7	202. 0
158.30	22. 0,6	32,4	35,92	2,558337	564	652,3	201.30
159. 0	17.28,2	33,2	35,11	2,558901	551	653,9	201. 0
159.30	12.55,0	33,7	34,29	2,559452	538	655,5	200.30
160. 0	8.21,3	34,4	33,46	2,559990	525	+ 657,0	200. 0
160.30	3.46,9	35,1	32,64	2,560515	512	+ 658,5	199.30
161. 0	2.59.11,8	35,5	31,82	2,561027	499	659,9	199. 0
161.30	54.36,3	36,2	31,00	2,561526	486	661,4	198.30
162. 0	50. 0,1	36,8	30,17	2,562012	473	662,8	198. 0
162.30	45.23,3	37,4	29,35	2,562485	460	664,1	197.30
163. 0	40.45,9	38,0	28,52	2,562945	446	665,3	197. 0
163.30	36. 7,9	38,3	27,69	2,563391	433	666,6	196.30
164. 0	31.29,6	39,0	26,86	2,563824	422	667,8	196. 0
164.30	26.50,6	39,3	26,03	2,564246	408	669,0	195.30
165. 0	22.11,3	39,8	25,20	2,564654	394	+ 670,1	195. 0
165.30	17.31,5	40,3	24,37	2,565048	381	+ 671,2	194.30
166. 0	12.51,2	40,8	23,54	2,565429	368	672,3	194. 0
166.30	8.10,4	41,3	22,71	2,565797	355	673,3	193.30
167. 0	3.29,1	41,5	21,88	2,566152	340	674,2	193. 0
167.30	1.58.47,6	41,9	21,05	2,566492	328	675,2	192.30
168. 0	54. 5,7	42,4	20,21	2,566820	315	676,1	192. 0
168.30	49.23,3	42,9	19,37	2,567135	302	677,0	191.30
169. 0	44.40,4	43,2	18,53	2,567437	288	677,9	191. 0
169.30	39.57,2	43,4	17,69	2,567725	275	678,7	190.30
170. 0	35.13,8	43,7	16.86	2,568000	262	+ 679,5	190. 0
170.30	30.30,1	44,1	16,02	2,568262	248	+ 680,2	189.30
171. 0	25.46,0	44,2	15,18	2,568510	235	680,9	189. 0
171.30	21. 1,8	44,3	14,34	2,568745	222	681,6	188.30
172. 0	16.17,5	44,7	13,50	2,568967	207	682,2	188. 0
172.30	11.32,8	45,4	12,66	2,569174	193	682,8	187.30
173. 0	6.47,4	45,4	11,81	2,569367	181	683,3	187. 0
173.30	2. 2,0	45,6	10,97	2,569550	169	683,8	186.30
174. 0	0.57.16,4	45,7	10,14	2,569719	155	684,3	186. 0
174.30	0.52.30,7	4.45,7	9,30	2,569874	141	684,7	185.30
175. 0	47.45,0		8,45	2,570015		+ 685,1	185. 0
	−						

Continuazione della TAVOLA *II.*

Argomento = Long. med. ⚶ — Perielio . ⚶

Argom.	Equazione del centro +	Differ.	$\left(\frac{dE}{d\phi}\right) . 1'$	Raggio vettore	Differ.	$\left(\frac{dr}{d\phi}\right) . 1'$	Argom.
175. 0	0°.47'.45",0	4'.45",9	8,45	2,570015	127	+ 685,1	185. 0
175.30	42.59,1	46,2	7,60	2,570142	115	685,5	184.30
176. 0	38.12,9	46,4	6,76	2,570257	101	685,8	184. 0
176.30	33.26,5	46,6	5,92	2,570358	87	686,1	183.30
177. 0	28.39,9	46,5	5,07	2,570445	74	686,4	183. 0
177.30	23.53,4	46,6	4,22	2,570519	71	686,6	182.30
178. 0	19. 6,8	46,7	3,37	2,570580	47	686,7	182. 0
178.30	14.20,1	46,5	2,52	2,570627	33	686,9	181.30
179. 0	9.33,6	46,8	1,69	2,570660	21	687,0	181. 0
179.30	4.46,8	4.46,8	0,84	2,570681	7	687,0	180.30
180. 0	0. 0,0		0,00	2,570688		+ 687,0	180. 0
	—						

TAVOLA III.

Argomento = Long. in orbita corretta dalle perturbazioni — Nodo.

gradi	0^s. Lat. Bor. VI^s. Lat. Aust.	Diff.	$\left(\frac{d\beta}{di}\right).10''$	I^s. Lat. Bor. VII^s. Lat. Aust.	Diff.	$\left(\frac{d\beta}{di}\right).10''$	II^s. Lat. Bor. $VIII^s$. Lat. Aust.	Diff.	$\left(\frac{d\beta}{di}\right).10''$	Gradi
0	0°. 0'. 0'',0	7'.27'',0	0'', 00	3°.33'.36'',3	6'.25'',9	4, 97	6°.10'.27'',2	3'.41'',5	8, 66	30
1	0. 7.27,0	26,9	0, 17	3.40. 2,2	22,1	5, 13	6.14. 8,7	34,6	8, 75	29
2	0.14.53,9	26,8	0, 35	3.46.24,3	17,9	5, 28	6.17.43,3	27,6	8, 83	28
3	0.22.20,7	26,2	0, 52	3.52.42,2	13,7	5, 43	6.21.10,9	20,9	8, 90	27
4	0.29.46,9	25,7	0, 70	3.58.55,9	9,4	5, 57	6.24.31,8	13,6	8, 98	26
5	0.37.12,6	25,1	0, 86	4. 5. 5,3	4,8	5, 71	6.27.45,4	3. 6,6	9, 05	25
6	0.44.37,7	24,2	1, 03	4.11.10,1	6. 0,4	5, 86	6.30.52,0	2.59,4	9, 13	24
7	0.52. 1,9	23,2	1, 21	4.17.10,5	5.55,7	6, 00	6.33.51,4	52,3	9, 19	23
8	0.59.25,1	22,4	1, 38	4.23. 6,2	51,0	6, 13	6.36.43,7	44,8	9, 25	22
9	1. 6.47,5	21,0	1, 55	4.28.57,2	46,1	6, 27	6.39.28,5	37,7	9, 31	21
10	1.14. 8,5	19,8	1, 72	4.34.43,3	41,0	6, 42	6.42. 6,2	30,2	9, 37	20
11	1.21.28,3	18,1	1, 89	4.40.24,3	36,0	6, 56	6.45.36,4	23,0	9, 43	19
12	1.28.46,4	16,7	2, 07	4.46. 0,3	30,8	6, 69	6.46.59,4	15,3	9, 49	18
13	1.36. 3,1	14,9	2, 22	4.51.31,1	25,6	6, 82	6.49.14,7	7,9	9, 54	17
14	1.43.18,0	13,0	2, 39	4.56.56,7	20,1	6, 94	6.51.22,6	2. 0,3	9, 59	16
15	1.50.31,0	11,1	2, 56	5. 2.16,8	14,5	7, 07	6.53.22,9	1.52,7	9, 63	15
16	1.57.42,1	8,9	2, 73	5. 7.31,3	9,0	7, 19	6.55.15,6	45,2	9, 68	14
17	2. 4.51,0	6,7	2, 90	5.12.40,3	5. 3,3	7, 32	6.57. 0,8	37,5	9, 71	13
18	2.11.57,7	4,3	3, 06	5.17.43,6	4.57,6	7, 44	6.58.38,3	29,9	9, 75	12
19	2.19. 2,0	7. 1,8	3, 23	5.22.41,2	51,6	7, 55	7. 0. 8,2	22,0	9, 79	11
20	2.26. 3,8	6.59,2	3, 39	5.27.32,8	45,8	7, 67	7. 1.30,2	14,4	9, 82	10
21	2.33. 3,0	56,3	3, 56	5.32.18,6	39,5	7, 78	7. 2.44,6	1. 6,6	9, 84	9
22	2.39.59,3	53,6	3, 72	5.36.58,1	33,6	7, 89	7. 3.51,2	0.58,6	9, 87	8
23	2.46.52,9	50,5	3, 88	5.41.31,7	27,2	7, 99	7. 4.50,0	51,0	9, 89	7
24	2.53.43,4	47,4	4, 04	5.45.58,9	20,8	8, 10	7. 5.41,0	43,1	9, 90	6
25	3. 0.30,8	44,1	4, 21	5.50.19,8	14,3	8, 19	7. 6.24,1	35,3	9, 92	5
26	3. 7.14,9	40,8	4, 36	5.54.34,1	8,3	8, 29	7. 6.59,4	27,6	9, 93	4
27	3.13.55,7	37,1	4, 52	5.58.42,4	4. 1,5	8, 39	7. 7.27,0	19,6	9, 95	3
28	3.20.32,8	33,6	4, 67	6. 2.43,9	3.55,0	8, 48	7. 7.46,6	11,9	9, 95	2
29	3.27. 6,4	29,9	4, 83	6. 6.38,9	48,3	8, 57	7. 7.58,5	3,9	9, 96	1
30	3.33.36,3		4, 97	6.10.27,2		8, 66	7. 8. 2,4		9, 96	0
	XI^s. Lat. Aust. V^s. Lat. Bor.			X^s. Lat. Aust. IV^s. Lat. Bor.			IX^s. Lat. Aust. III^s. Lat. Bor.			

Per ottenere le latitudini eliocentriche, si entri in questa Tavola coll'argomento Longitudine Eliocentrica in orbita corretta dalle perturbazioni seguenti meno la longitudine del Nodo; la Latitudine così trovata corrisponde all'inclinazione $7^\circ.\,8'.\,2'',4$. La colonna $\left(\frac{d\beta}{di}\right).10''$ indica la variazione della latitudine per un aumento di 10'' nell'inclinazione, e serve a trovare la latitudine per un'altra inclinazione poco diversa dalla precedente. Volendo tenere conto della variazione secolare dell'inclinazione, conviene moltiplicare i numeri di questa colonna $-0,012.t$, t rappresentando il numero degli anni al di sopra dal 1810.

TAVOLA IV.

Contenente la prima parte delle perturb. in Long. e nel rag. vet. espresse in millionesime parti dell' unità.

Arg. D	Arg. D	Perturbaz. in longitud.	Perturbaz. nel rag. vett.	Arg. D	Arg. D	Perturbaz. in longitud.	Perturbaz. nel rag. vett.
0	400	+ 0″,0 −	− 654 −	50	350	+ 61″,3 −	+ 413 +
1	399	3 ,2	653	51	349	59 , 2	440
2	398	6 ,5	651	52	348	57 , 0	467
3	397	9 ,8	648	53	347	54 , 7	493
4	396	13 , 1	644	54	346	52 , 4	519
5	395	16 , 3	639	55	345	49 , 9	544
6	394	19 , 6	632	56	344	47 , 2	569
7	393	22 , 8	624	57	343	44 , 4	593
8	392	25 ,9	616	58	342	41 , 6	617
9	391	28 ,9	605	59	341	38 , 7	639
10	390	+ 31 ,9 −	− 592 −	60	340	+ 35 , 7 −	+ 661 +
11	389	+ 34 , 8 −	− 579 −	61	339	+ 32 , 5 −	+ 683 +
12	388	37 ,7	566	62	338	29 , 2	703
13	387	40 ,5	551	63	337	25 , 8	723
14	386	43 ,3	535	64	336	22 , 4	743
15	385	45 ,9	518	65	335	18 , 9	761
16	384	48 ,5	501	66	334	15 , 3	779
17	383	51 ,0	482	67	333	11 , 6	796
18	382	53 ,4	462	68	332	7 , 9	812
19	381	55 , 6	441	69	331	4 , 1	827
20	380	+ 57 , 8 −	− 420 −	70	330	+ 0 , 3 −	+ 842 +
21	379	+ 59 ,8 −	− 397 −	71	329	− 3 , 7 +	+ 856 +
22	378	61 ,8	374	72	328	7 , 7	869
23	377	63 ,6	350	73	327	11 , 8	881
24	376	65 ,3	326	74	326	15 , 9	892
25	375	66 ,8	301	75	325	20 , 1	902
26	374	68 ,3	275	76	324	24 , 3	912
27	373	69 ,6	249	77	323	28 , 5	920
28	372	70 ,8	222	78	322	32 , 8	928
29	371	71 ,8	195	79	321	37 , 1	934
30	370	+ 72 , 8 −	− 167 −	80	320	− 41 , 4 +	+ 940 +
31	369	+ 73 , 6 −	− 139 −	81	319	− 45 , 8 +	+ 945 +
32	368	74 ,2	110	82	318	50 , 2	949
33	367	74 ,7	81	83	317	54 , 6	952
34	366	75 ,0	52	84	316	59 , 0	955
35	365	75 , 1	− 23 −	85	315	63 , 4	956
36	364	75 ,2	+ 7 +	86	314	67 , 8	956
37	363	75 ,0	37	87	313	72 , 2	955
38	362	74 ,7	66	88	312	76 , 6	954
39	361	74 ,3	95	89	311	81 , 0	951
40	360	+ 74 , 1 −	+ 125 +	90	310	− 85 , 4 +	+ 948 +
41	359	+ 73 ,4 −	+ 155 +	91	309	− 89 , 8 +	+ 944 +
42	358	72 ,6	185	92	308	94 , 1	939
43	357	71 ,6	214	93	307	98 , 4	933
44	356	70 ,6	243	94	306	102 , 7	926
45	355	69 ,4	272	95	305	107 , 0	918
46	354	68 ,0	301	96	304	111 , 3	909
47	353	66 ,4	330	97	303	115 , 0	899
48	352	64 ,8	358	98	302	119 , 6	889
49	351	63 ,0	386	99	301	123 , 7	878
50	350	+ 61 ,3 −	+ 413 +	100	300	−127 , 7 +	+ 866 +

Continuazione della Tavola IV.

Arg. D	Arg. D	Perturbaz. in longitud.	Perturbaz. nel rag. vett.	Arg. D	Arg. D	Perturbaz. in longitud.	Perturbaz. nel rag. vett.
100	300	− 127″,7 +	+ 866 +	150	250	− 204″,7 +	− 450 −
101	299	131 ,7	853	151	249	203 ,0	481
102	298	135 ,6	839	152	248	201 ,3	512
103	297	139 ,5	824	153	247	199 ,3	542
104	296	143 ,4	808	154	246	197 ,3	572
105	295	147 ,1	792	155	245	195 ,1	602
106	294	150 ,7	775	156	244	192 ,8	632
107	293	154 ,3	758	157	243	190 ,4	661
108	292	157 ,8	741	158	242	188 ,0	690
109	291	161 ,2	721	159	241	185 ,2	719
110	290	− 164 ,6 +	+ 700 +	160	240	− 182 ,4 +	− 747 −
111	289	− 167 ,8 +	+ 679 +	161	239	− 179 ,4 +	− 775 −
112	288	171 ,0	658	162	238	176 ,4	802
113	287	174 ,1	636	163	237	173 ,3	829
114	286	177 ,1	613	164	236	170 ,1	856
115	285	180 ,0	590	165	235	166 ,7	832
116	284	182 ,8	566	166	234	163 ,2	907
117	283	185 ,4	541	167	233	159 ,6	932
118	282	188 ,0	516	168	232	155 ,9	956
119	281	190 ,4	491	169	231	152 ,1	980
120	280	− 192 ,8 +	+ 465 +	170	230	− 148 ,3 +	− 1004 −
121	279	− 195 ,0 +	+ 438 +	171	229	− 144 ,3 +	− 1027 −
122	278	197 ,2	411	172	228	140 ,3	1049
123	277	199 ,2	383	173	227	136 ,1	1070
124	276	201 ,1	355	174	226	131 ,8	1091
125	275	202 ,8	327	175	225	128 ,5	1111
126	274	204 ,5	298	176	224	123 ,1	1131
127	273	206 ,0	269	177	223	118 ,6	1150
128	272	207 ,4	239	178	222	114 ,0	1168
129	271	208 ,7	209	179	221	109 ,3	1185
130	270	− 209 ,9 +	+ 179 +	180	220	− 104 ,6 +	− 1202 −
131	269	− 210 ,8 +	+ 149 +	181	219	− 99 ,8 +	− 1218 −
132	268	211 ,7	118	182	218	95 ,0	1233
133	267	212 ,4	88	183	217	90 ,1	1247
134	266	213 ,1	56	184	216	85 ,1	1261
135	265	213 ,6	+ 25 +	185	215	80 ,0	1274
136	264	214 ,0	− 6 −	186	214	74 ,9	1286
137	263	214 ,2	38	187	213	69 ,8	1297
138	262	214 ,3	70	188	212	64 ,6	1308
139	261	214 ,2	102	189	211	59 ,4	1318
140	260	− 214 ,0 +	− 134 −	190	210	− 54 ,1 +	− 1327 −
141	259	− 213 ,6 +	− 166 −	191	209	− 48 ,8 +	− 1335 −
142	258	213 ,2	198	192	208	43 ,5	1343
143	257	212 ,6	230	193	207	38 ,1	1349
144	256	212 ,0	261	194	206	32 ,7	1354
145	255	211 ,1	293	195	205	27 ,3	1359
146	254	210 ,1	325	196	204	21 ,9	1363
147	253	208 ,9	357	197	203	16 ,4	1366
148	252	207 ,6	388	198	202	10 ,9	1368
149	251	206 ,2	419	199	201	5 ,5	1369
150	250	− 204 ,7 +	− 450 −	200	200	− 0 ,0 +	− 1370 −

TAVOLA V.

Per calcolare la seconda parte delle perturbaz. in longit. e nel raggio vettore.

Arg. D	A	B	A′	B′	Arg. D	A	B	A′	B′
0	−177″,1	+61″,2	−925	−1251	50	+132″,8	+94″,8	−1063	+1252
1	172,1	67,8	971	1210	51	136,5	88,0	1018	1286
2	167,0	74,3	1016	1168	52	139,9	81,4	972	1318
3	161,6	80,5	1060	1124	53	143,1	74,8	924	1349
4	156,1	86,5	1102	1078	54	146,0	67,9	875	1378
5	150,3	92,4	1143	1032	55	148,6	60,8	824	1406
6	144,5	98,2	1182	985	56	151,0	53,6	773	1432
7	138,3	103,7	1220	936	57	153,2	46,2	720	1457
8	132,0	109,1	1257	886	58	155,4	38,6	667	1480
9	125,7	114,3	1292	835	59	157,2	30,9	612	1501
10	−119,3	+119,2	−1326	−784	60	+158,8	+23,0	−556	+1521
11	−112,7	+123,8	−1358	−732	61	+160,0	+14,9	−499	+1539
12	105,9	128,2	1387	679	62	161,1	+6,6	442	1556
13	99,1	132,4	1415	625	63	161,8	−1,8	384	1571
14	92,1	136,4	1442	571	64	162,4	10,3	326	1584
15	85,1	140,2	1467	516	65	162,7	18,8	266	1595
16	78,0	143,9	1490	460	66	162,9	27,4	206	1606
17	71,0	147,2	1510	404	67	162,6	36,1	145	1614
18	63,9	150,0	1529	348	68	162,2	44,9	84	1621
19	56,7	152,6	1545	292	69	161,5	53,7	−23	1626
20	−49,4	+155,1	−1560	−235	70	+160,6	−62,6	+38	+1630
21	−42,2	+157,3	−1573	−179	71	+159,5	−72,5	+99	+1631
22	35,0	159,2	1584	121	72	158,1	80,5	161	1631
23	27,7	160,9	1592	64	73	156,4	89,4	223	1629
24	20,4	162,4	1599	−7	74	154,5	98,3	285	1626
25	13,2	163,4	1604	+49	75	152,3	107,2	346	1621
26	−5,9	164,1	1606	106	76	149,9	116,1	408	1615
27	+1,1	164,4	1606	162	77	147,2	125,0	469	1607
28	8,1	164,6	1605	218	78	144,4	133,8	530	1597
29	15,1	164,4	1602	274	79	141,4	142,6	591	1585
30	+22,1	+163,9	−1596	+329	80	+138,1	−151,3	+651	+1572
31	+28,9	+163,2	−1588	+383	81	+134,7	−160,0	+711	+1558
32	35,6	162,2	1578	437	82	131,0	168,5	771	1542
33	42,3	160,8	1566	490	83	127,0	176,9	830	1524
34	49,0	159,1	1552	543	84	122,8	185,1	887	1505
35	55,4	157,1	1536	595	85	118,4	193,3	944	1484
36	61,7	155,1	1517	646	86	113,8	201,1	1000	1462
37	67,7	152,6	1496	696	87	109,0	209,3	1055	1439
38	73,6	149,7	1474	746	88	104,1	217,0	1109	1415
39	79,5	146,6	1450	794	89	99,0	224,6	1162	1388
40	+85,4	+143,3	−1424	+842	90	+93,7	−232,1	+1215	+1360
41	+90,9	+139,5	−1396	+888	91	+88,1	−239,3	+1266	+1331
42	96,4	135,5	1366	934	92	82,3	246,2	1317	1301
43	101,6	131,2	1334	978	93	76,4	253,0	1366	1270
44	106,8	126,6	1301	1021	94	70,3	259,6	1414	1237
45	111,6	121,8	1266	1062	95	64,1	266,0	1460	1203
46	116,3	116,8	1228	1103	96	57,7	272,2	1505	1168
47	120,6	111,5	1189	1142	97	51,1	278,0	1549	1131
48	124,8	106,0	1149	1180	98	44,3	283,5	1592	1094
49	128,8	100,3	1107	1216	99	37,4	289,0	1633	1055
50	+132,8	+94,3	−1063	+1252	100	+30,5	294.3	+1673	+1016

Pert. in Long. = A sen. 2♃ + B cos. 2♃

Continuazione della TAVOLA *V.*

Arg. D	A	B	A′	B′	Arg. D	A	B	A′	B′
100	+ 30″,5	− 294″,3	+ 1673	+ 1016	150	− 365″,6	− 147″,1	+ 1363	− 1402
101	23,4	299,2	1711	975	151	371,4	136,8	1314	1440
102	16,1	303,7	1748	934	152	377,2	126,4	1263	1477
103	8,7	307,9	1783	891	153	382,7	115,7	1211	1513
104	+ 1,3	312,0	1816	847	154	388,1	104,8	1158	1547
105	− 6,3	315,8	1847	803	155	393,2	93,7	1104	1580
106	14,1	319,2	1876	758	156	398,0	82,6	1049	1613
107	22,0	322,2	1904	712	157	402,5	71,3	993	1644
108	29,9	325,0	1930	665	158	406,8	59,9	937	1673
109	38,0	327,5	1955	618	159	410,8	48,3	880	1701
110	− 46,1	− 329,7	+ 1978	+ 570	160	− 414.8	− 36,7	+ 821	− 1728
111	− 54,4	− 331,4	+ 1999	+ 521	161	− 418,4	− 24,8	+ 761	− 1754
112	62,7	332,8	2018	472	162	421,8	12,9	701	1778
113	71,1	333,9	2035	422	163	424,9	− 0,9	640	1800
114	79,5	334,8	2050	372	164	427,8	+ 11,1	578	1821
115	88,0	335,2	2064	321	165	430,4	23,3	516	1841
116	96,5	335,5	2076	270	166	432,9	35,5	454	1859
117	105,0	335,2	2086	218	167	435,0	47,4	392	1876
118	113,6	334,7	2093	166	168	436,8	60,0	329	1891
119	122,2	333,7	2098	114	169	438,3	72,2	266	1904
120	− 130,8	− 332,5	+ 2102	+ 61	170	− 439,5	+ 84,5	+ 202	− 1916
121	− 139,5	− 330,9	+ 2103	+ 9	171	− 440,3	+ 96,7	+ 138	− 1926
122	148,2	329,0	2104	− 44	172	440,9	109,0	74	1935
123	156,9	326,8	2101	96	173	441,3	121,2	+ 10	1942
124	165,5	324,3	2098	149	174	441,5	133,5	− 55	1947
125	174,1	321,4	2092	202	175	441,3	145,6	119	1951
126	182,7	318,1	2085	255	176	440,8	157,8	183	1953
127	191,3	314,4	2075	308	177	439,9	169,8	247	1953
128	199,9	310,3	2064	361	178	438,8	181,8	310	1952
129	208,5	306,0	2051	414	179	437,3	193,7	373	1949
130	− 217,0	− 301.6	+ 2035	− 466	180	− 435,6	+ 205,5	− 436	− 1944
131	− 225,5	− 296,5	+ 2018	− 518	181	− 433,5	+ 217,2	− 498	− 1937
132	233,9	291,3	1998	570	182	431,3	228,8	560	1929
133	242,2	285,6	1977	621	183	428,7	240,3	621	1919
134	250,4	279,8	1955	671	184	425,8	251,7	681	1908
135	258,4	273,5	1930	722	185	422,6	262,7	741	1895
136	266,4	266,9	1903	772	186	419,1	273,8	801	1880
137	274,3	260,1	1875	822	187	415,2	284,8	860	1863
138	282,1	253,2	1845	871	188	410,9	295,6	918	1845
139	289,8	245,7	1813	920	189	406,5	306,0	975	1825
140	− 297,4	− 238,0	+ 1780	+ 968	190	− 401,9	+ 316,2	− 1031	− 1803
141	− 304,8	− 230,4	+ 1745	− 1015	191	− 396,8	+ 326,3	− 1086	− 1780
142	312,2	222,8	1709	1061	192	391,6	336,3	1139	1755
143	319,4	213,8	1671	1107	193	386,1	346,0	1191	1729
144	326,6	204,8	1632	1152	194	380,3	355,6	1243	1701
145	333,6	195,7	1591	1196	195	374,2	364,8	1294	1671
146	340,4	186,5	1548	1239	196	367,7	373,9	1343	1640
147	347,0	176,9	1504	1281	197	361,0	382,5	1391	1607
148	353,5	167,2	1458	1322	198	354,0	391,1	1438	1573
149	349,7	157,2	1411	1362	199	346,8	399,3	1483	1538
150	− 365,6	− 147,1	+ 1363	− 1402	200	− 339,5	+ 407,4	− 1527	− 1501

Pert. in rag. vett. espressa in millionesimi = A′ sen 2♃ + B′ cos 2♃

Continuazione della Tavola *V.*

Arg. D	A	B	A′	B′	Arg. D	A	B	A′	B′
200	−339″,5	+407″,0	−1527	−1501	250	+207″,8	+399″,9	−1543	+1266
201	331,8	415,1	1569	1462	251	218,4	392,0	1502	1317
202	323,8	422,5	1610	1422	252	228,7	383,8	1460	1368
203	315,5	429,7	1649	1381	253	238,8	375,5	1415	1417
204	306,9	436,7	1687	1339	254	248,8	367,1	1370	1464
205	298,2	443,3	1724	1295	255	258,6	358,4	1324	1510
206	289,3	449,6	1759	1250	256	268,2	349,4	1278	1556
207	280,2	455,4	1792	1204	257	277,6	340,3	1230	1600
208	270,8	460,9	1823	1156	258	286,8	331,2	1181	1643
209	261,2	466,0	1853	1107	259	295,8	321,7	1131	1686
210	−251,5	+471,2	−1881	−1057	260	+304,6	+312,2	−1080	+1729
211	−241,6	+476,0	−1907	−1006	261	+313,0	+302,4	−1028	+1768
212	231,5	480,4	1932	955	262	321,3	292,6	975	1805
213	221,2	484,5	1955	902	263	329,3	282,6	922	1840
214	210,7	488,2	1977	848	264	337,0	272,5	869	1874
215	200,1	491,4	1966	793	265	344,4	262,3	814	1906
216	189,4	494,3	2013	738	266	351,5	252,0	758	1935
217	178,5	497,0	2038	682	267	358,3	241,6	703	1963
218	167,3	499,4	2042	625	268	364,9	231,1	648	1991
219	166,0	501,3	2054	567	269	371,1	220,5	592	2017
220	−144,6	+502,9	−2064	− 509	270	+377,1	+209,8	− 535	+2041
221	−133,1	+504,2	−2072	− 450	271	+382,8	+199,1	− 478	+2063
222	121,6	505,2	2078	391	272	388,1	188,3	420	2085
223	109,9	505,7	2082	331	273	393,2	177,5	363	2104
224	98,2	506,0	2085	271	274	398,1	166,7	305	2121
225	86,3	505,9	2085	210	275	402,3	155,8	247	2136
226	74,3	505,5	2085	149	276	406,3	144,9	188	2150
227	62,3	504,7	2082	88	277	409,9	134,0	130	2161
228	50,3	503,6	2078	− 27	278	413,4	123,0	72	2172
229	48,3	502,2	2071	+ 35	279	416,4	112,1	− 13	2180
230	− 26,3	+500,5	−2062	97	280	+419,2	+101,3	+ 46	+2186
231	− 14,2	+498,4	−2051	+ 159	281	+421,6	+ 90,4	+ 104	+2190
232	− 2,0	496,0	2039	220	282	423,6	79,5	161	2192
233	+ 10,1	493,1	2025	282	283	425,2	78,8	218	2193
234	22,3	489,9	2010	343	284	426,6	58,1	276	2192
235	34,5	486,4	1993	405	285	427,6	47,4	333	2188
236	46,6	482,7	1974	466	286	428,2	36,8	390	2183
237	58,6	478,7	1953	527	287	428,4	26,4	446	2176
238	70,2	474,3	1931	587	288	428,5	16,0	502	2167
239	82,5	469,7	1907	647	289	428,4	+ 5,6	557	2156
240	+ 94,4	+464,7	−1881	+ 707	290	+427,3	− 4,7	+ 610	+2144
241	+106,1	+459,4	−1854	+ 766	291	+425,0	− 14,9	+ 662	+2129
242	117,8	453,9	1825	824	292	424,5	25,0	718	2112
243	129,4	448,1	1795	882	293	422,6	34,8	770	2094
244	141,0	442,0	1763	940	294	420,3	44,6	822	2074
245	152,3	435,6	1730	996	295	417,7	54,2	872	2052
246	163,7	429,0	1696	1057	296	414,9	63,8	922	2028
247	174,9	422,1	1659	1107	297	411,7	73,2	971	2002
248	186,0	414,8	1621	1161	298	408,1	82,5	1020	1975
249	196,9	407,4	1582	1214	299	404,2	91,6	1068	1946
250	+207,8	+399,9	−1543	+1266	300	+400,1	−100,7	+1115	+1915

Continuazione della Tavola *V.*

Arg. D	A	B	A′	B′	Arg. D	A	B	A′	B′
300	+400″,1	−100″,7	+1115	+1915	350	−54″,6	−260″,7	+1587	−855
301	395,6	109,4	1160	1882	351	63,9	257,4	1556	908
302	390,7	117,9	1204	1848	352	73,0	254,0	1523	960
303	385,5	126,4	1247	1812	353	81,9	250,4	1488	1010
304	380,1	134,8	1289	1775	354	90,7	246,6	1452	1060
305	375,4	142,8	1330	1736	355	99,2	242,6	1415	1108
306	368,3	150,6	1370	1695	356	107,4	238,4	1377	1154
307	361,9	158,2	1408	1653	357	115,4	233,9	1337	1199
308	355,2	165,8	1445	1609	358	123,4	229,1	1296	1242
309	348,2	173,0	1481	1564	359	130,9	224,2	1254	1283
310	+340,9	−179,9	+1515	+1517	360	−138,2	−219,3	+1210	−1323
311	+333,4	−186,7	+1547	+1469	361	−145,2	−214,1	+1165	−1361
312	325,7	193,4	1579	1420	362	151,8	208,7	1120	1398
313	317,8	199,7	1609	1370	363	158,2	203,1	1073	1432
314	309,6	205,8	1638	1318	364	164,3	197,3	1025	1464
315	301,2	211,7	1665	1265	365	170,3	191,4	976	1494
316	292,6	217,5	1691	1211	366	176,0	185,3	926	1523
317	283,7	223,0	1716	1156	367	181,1	179,0	875	1549
318	274,6	228,3	1739	1099	368	186,0	172,6	824	1579
319	265,3	233,2	1760	1042	369	190,7	166,0	771	1596
320	+256,0	−237,9	+1779	+984	370	−195,1	−159,3	+718	−1617
321	+245,3	−242,4	+1796	+925	371	−198,8	−152,5	665	−1635
322	236,4	246,6	1812	866	372	202,5	145,6	611	1651
323	226,5	250,6	1827	806	373	205,9	138,6	556	1665
324	216,5	254,5	1840	745	374	209,1	131,5	500	1677
325	206,4	257,9	1851	683	375	211,9	124,3	444	1687
326	196,1	261,1	1861	621	376	214,2	117,0	387	1694
327	185,7	264,0	1869	558	377	216,1	109,6	331	1699
328	175,3	266,7	1875	495	378	217,8	106,2	274	1702
329	164,7	269,0	1879	432	379	219,2	94,7	220	1703
330	+154,0	−271,2	+1882	+368	380	−220,4	−87,1	+160	−1702
331	+143,3	−273,1	+1883	+304	381	−221,0	−79,5	+103	+1699
332	132,6	274,9	1884	240	382	221,3	71,8	+45	1693
333	121,8	276,4	1882	176	383	221,3	64,1	−13	1685
334	110,9	277,6	1878	111	384	221,2	56,3	70	1675
335	100,1	278,4	1872	+47	385	220,6	48,7	127	1663
336	89,4	278,9	1864	−16	386	219,7	41,2	184	1649
337	78,6	279,3	1855	80	387	218,4	33,5	241	1633
338	67,7	279,6	1844	143	388	216,9	25,8	297	1615
339	57,0	279,2	1832	206	389	215,2	18,2	353	1595
340	+46,4	−278,8	+1818	−269	390	−213,3	−10,6	−408	−1572
341	+35,9	−278,0	+1802	−331	391	−210,8	−3,0	−463	−1547
342	25,4	277,0	1785	393	392	208,0	+4,5	518	1522
343	15,1	275,8	1766	453	393	205,5	12,0	571	1494
344	+4,7	274,6	1746	513	394	202,9	19,4	624	1465
345	−5,5	272,8	1723	572	395	198,7	26,6	676	1434
346	15,6	270,9	1699	631	396	194,5	33,7	728	1400
347	25,5	268,8	1673	689	397	190,5	40,7	778	1365
348	35,3	266,4	1646	746	398	186,4	47,7	828	1329
349	45,0	263,7	1617	801	399	181,8	54,5	877	1290
350	−54,6	260,7	+1587	−855	400	−177,1	+61,2	−925	1251

TAVOLA VI.

Per calcolare le perturbazioni nella latitudine eliocentrica.

Arg. D	A″	diff.	B″	diff.	Arg. D	A″	diff.	B″	diff.
0	− 1″,87	1″,56	− 7″,44	0,60	200	− 3,95	2,18	− 15″,62	0,72
5	3,43	1,41	6,84	0,94	205	6,13	2,03	14,90	1,06
10	4,34	1,21	5,90	1,24	210	8,16	1,89	13,84	1,38
15	6,05	1,00	4,66	1,52	215	10,05	1,66	12,46	1,60
20	− 7,05	0,77	− 3,14	1,82	220	11,71	1,39	10,86	1,84
25	− 7,82	0,47	− 1,32	1,99	225	− 13,12	1,15	− 8,92	2,09
30	8,29	0,20	+ 0,67	2,09	230	− 14,27	0,35	− 6,83	2,28
35	8,49	0,14	2,76	2,19	235	15,12	0,51	4,55	2,38
40	8,35	0,43	4,95	2,16	240	15,63	0,21	− 2,17	2,46
45	− 7,92	0,72	+ 7,11	2,11	245	15,84	0,12	+ 0,29	2,49
50	− 7,20	0,99	+ 9,22	1,96	250	− 15,72	0,45	+ 2,78	2,48
55	6,21	1,27	11,18	1,78	255	− 15,27	0,85	+ 5,26	2,40
60	4,94	1,47	12,96	1,56	260	14,42	0,95	7,66	2,26
65	3,47	1,66	14,52	1,28	265	13,47	1,32	9,92	2,08
70	− 1,81	1,78	+ 15,80	0,95	270	12,15	1,56	12,00	1,87
75	− 0,03	1,92	+ 16,75	0,54	275	− 10,59	1,74	+ 13,87	1,56
80	+ 1,89	1,96	17,29	0,29	280	− 8,85	1,90	+ 15,43	1,35
85	3,85	1,97	17,58	0,16	285	6,95	2,01	16,78	0,98
90	5,82	1,93	17,42	0,51	290	4,94	2,07	17,76	0,63
95	+ 7,75	1,83	+ 16,91	0,88	295	2,87	2,07	18,39	0,28
100	+ 9,58	1,71	+ 16,03	1,22	300	− 0,80	2,03	+ 18,67	0,10
105	11,29	1,51	14,81	1,53	305	+ 1,23	1,93	+ 18,57	0,47
110	12,80	1,29	13,28	1,82	310	3,16	1,81	18,10	0,80
115	14,09	1,06	11,46	2,03	315	4,97	1,60	17,30	1,10
120	+ 15,15	0.78	+ 9,43	2,28	320	6,57	1,40	16,21	1,50
125	+ 15,93	0,48	+ 7,15	2,37	325	+ 7,97	1,14	+ 14,71	1,69
130	16,41	0,16	4,78	2,46	330	+ 9,11	0,86	+ 13,02	1,90
135	16,57	0,15	+ 2,32	2,50	335	9,97	0,55	11,12	2,08
140	16,42	0,47	− 0,18	2,46	340	10,52	0,25	9,04	2,16
145	+ 15,95	0,77	− 2,64	2,38	345	10,77	0,07	6,88	2,22
150	+ 15,18	1,08	− 5,02	2,25	350	+ 10,70	0,36	+ 4,66	2,19
155	14,10	1,37	7,27	2,08	355	+ 10,34	0,65	+ 2,47	2,10
160	12,73	1,60	9,35	1,85	360	9,69	0,90	+ 0,37	1,97
165	11,13	1,82	11,20	1,59	365	8,79	1,18	− 1,60	1,67
170	9,31	1,99	− 12,79	1,31	370	7,61	1,35	3,37	1,49
175	7,32	2,15	− 14,10	0,94	375	+ 6,26	1,51	− 4,86	1,18
180	5,17	2,24	15,04	0,70	380	+ 4,75	1,62	− 6,04	0,94
185	2,93	2,31	15,74	0,30	385	3,13	1,67	6,98	0,52
190	+ 0,62	2,28	16,04	0,04	390	+ 1,46	1,69	7,50	0,16
195	− 1,69	2,20	− 16,00	0,38	395	− 0,23	1,64	7,66	0,22
					400	− 1,87		− 7,44	

Perturb. in Latit. = A″ sen ♃ + B″ cos ♃

DEL MODO DI RENDERE MEN DIFETTOSA CHE ADESSO E PIU' COMODA LA STADERA VOLGARMENTE DETTA ROMANA

MEMORIA

Del Signor Pietro Ferroni.

Ricevuta li 31 *Dicembre* 1814.

Egli è fuor d'ogni dubbio che le *Stadere* Romane sono d'assai più comode delle Bilancie nel corso ordinario di quelle brevissime giornaliere contrattazioni, per rispetto alle quali abbia luogo la conoscenza del *Peso* delle materie da valutarsi a proporzione dei loro *prezzi* quandochè siano esposte in commercio. La riguardevole prerogativa della *Stadera*, di potersi cioè con un *Peso* solo, volgarmente chiamato *il Romano*, contrappesare dal minimo al massimo altri innumerevoli diversissimi *Pesi*, laddove nella Bilancia comune fa di mestieri contrapporre a ogni *Peso* il suo respettivo *Equipondio*, rende per universal sentimento, avvalorato dall'uso della più parte dei Popoli culti, preferibile all'ultima la precitata *Stadera* Romana, ed eziandio alla Teutonica, altramente detta *tascabile*, perchè questa con impiegare un *elastro*, o molla spirale, alla cui testata appendesi il *Peso*, ne misura la sua gravezza col più o meno distendersi della molla suddetta, ed è sottoposta perciò all'influenza delle moltiplici Cause fisiche, le quali mostrano chiaramente incerto, e variabile il grado di Forza dell'*elasticità* competente a tutti i Corpi terrestri.

Ha il suo fondamento, siccome ognun sa, la *Stadera* Romana nell'equilibrio della Leva, o del *Vette*, ch'è il principio unico, e saldo, cui s'appoggia la Statica universale; principio però intimamente collegato con quello della Bilancia (evidentissimo, ed anzi intuitivo di sua natura) posto che questa in vece di sole due braccia eguali situate nella medesima Linea retta sia composta di più braccia in qualunque numero o dispari o pari, ma però tutte eguali, e distribuite con angoli tutti eguali tra loro nel vertice, o centro comune a foggia di Stella più o meno raggiante (1). E dalla Bilancia medesima parimente dipende, come suo Corollario immediato, il Parallelogrammo o Triangolo risguardante la *composizione*, e la *risoluzion* delle Forze (2).

A fronte del maggior comodo, e dell'utilità maggiore, che nella vita civile ricavasi dalla *Stadera* Romana, la maniera ordinaria di costruirla, e d'usarla fa sì ch'essa sia soggetta nulladimeno ad alcuni difetti; laddovecchè la Bilancia per lo contrario, anche viziosa che fosse nella sua costruzione, si corregge di per sè stessa, o come dicesi in termini d'Arte „ ha la sua verificazione in sè medesima „ collo scambiare al *Peso*, ed all'*Equipondio* i Bacini, ed estrar poscia la *radice quadra* dal prodotto dei due Contrappesi. Non s'intende già qui di parlar degl'inganni, o delle frodi d'ogni maniera, che nascer mai possano, o nascan difatto dal maltalento, e dai giuochi di mano d'un suddolo Pesatore: imperocchè essendo simili trufferie comuni a tutti gl'Istrumenti possibili adoperati nel traffico, comunque sieno perfetti se si considerino dal lato della Meccanica, non c'è nessuno scampo o riparo per esimersi dalle medesime ad eccezion dell'accorgimento, e dell'avvedutezza e vigilanza istancabile dei Compratori.

Derivano spezialmente i mancamenti fisici, o per dir meglio *meccanici* delle volgari veglianti *Stadere* da tre diverse cagioni d'errore, e sono

---

(1) Volume X, Parte II delle nostre Memorie - Modena MDCCCIII dalla pag. 481 sino a 633 incl. - *I principj della Meccanica richiamati alla massima semplicità, ed evidenza. Ragionamento ec.*

(2) Vedasi nel Tomo IX degli Atti dell'Accademia delle Scienze detta *de' Fisiocritici* (Siena MDCCCVIII) la Dissertazione latina dalla pag. 241 a 254 incl. - *Compositio Virium unicum Mechanices fundamentum noviter positum etc.*

1.° La loro incongrua conformazione, avuto ancora riguardo al modo, col quale elle agiscono:

2.° L'imperfezione loro proveniente dal Fabbricatore od Artefice:

3.° La divisione e suddivisione per lo più erronee del maggior braccio, su cui passeggia il *Romano*.

Affin d'ovviare colle debite correzioni alle suddivisate sorgenti d'errori *meccanici* avendo avuta più volte occasione, passati ormai due Anni interi, o in quel torno, di tenerne insieme proposito col giovine amicissimo mio, ed espertissimo in tutte le Matematiche Discipline Capitano *Soalhat*, Uffiziale Francese dell'Imperial Corpo del Genio, ed essendoci scambievolmente comunicate le proprie idee, e quindi confermatele in pratica a grado per mezzo degli Sperimenti opportuni, concepimmo sino d'allora il pensiere di render pubblici colla stampa i reciprochi nostri divisamenti, come quelli, i quali miravano a conseguire lodevolmente il maggior perfezionamento possibile dell'utilissima *Stadera* Romana. E tantopiù volentieri, e tantopiù presto m'accingo a palesare in succinto il riuscimento di tali nostre iterate ricerche quantochè conservandole io manoscritte di carattere dell'Amico, che ne disegnò eziandio le Figure colla sua solita precisione, ed intelligenza, vengo col pubblicarle a pagargli, per quella parte, che giustamente a lui si compete, un tributo di grata, e perpetua rammemoranza dopo la sua morte avvenuta nel MDCCCXII. durante la terribil Campagna della Guerra di Francia contra la Russia, la qual tragica circostanza non che di Lapide lo privò forse per avventura anche d'onorevol Sepolcro. In capo al MS.°, che abbraccia i cambiamenti, e le aggiunte da noi immaginate in comune all'effetto di perfezionar la *Stadera* essendosi apposta dall'egregio Amico sunnominato l'Epigrafe sensatissima — *Il vaut mieux prevenir des abus que punir des délits* — mi giova ripeter talquale questa eccellente massima di Morale politica, che onora ad un tempo la mente, ed il cuore di chi l'ha scritta, e profondamente sentita, appunto perchè il togliere dalle contrattazioni degli uomini, se non tutti gli *abusi*, almeno quelli, che siano inerenti all'indole delle Macchine, e degli Strumenti, che s'usano andantemente pei *Pesi* e *Misure*, tendendo a diminuire i motivi, ed i mezzi d'una fraudolenta disuguaglianza delle permute, torna sempre a profitto della felicità universale.

ARTICOLO I.

Dei difetti causati dall' attual forma delle Stadere e dei loro rimedj.

Oltre alle Stadere *semplici* frequentemente per la maggiore comodità di *pesare* si costruiscono, e s'usano le *composte*. A differenza delle prime hanno l'ultime la particolarità d'aver disponibili a piacimento di chi le impieghi due diversi punti di sospensione, ed in vece d'una, come le *semplici*, hanno doppia divisione, ciascuna sul taglio o spigolo opposto della verga metallica, ossia del maggior braccio di leva. Il *Romano* o il contrappeso (*Sacoma*) resta sempre l'istesso, e solamente si rivolta la Verga all'effetto di sospenderla ora dall'uno ora dall'altro lato o punto soprindicato; dal primo e più ordinario pei Pesi *piccoli*, dal secondo pei Pesi *grossi*. Con siffatto ingegnoso compenso senza cambiare il *Romano* può un solo Istrumento destinatosi alla ricerca della diversa *gravezza* assoluta de' Corpi solidi o liquidi soddisfare a quest'uopo per due diverse *serie* di *Pesi* comprese tra due *limiti* differenti; e tal vantaggio potrebbe ugualmente estendersi mediante le convenevoli divisioni sopra i quattro spigoli della verga a tre e quattro *serie* quando vi fossero preparati altrettanti punti di sospensione. Facilissima cosa si è poi concepire sino d'adesso come trovando un *meccanismo* semplice per rivolger la Verga della stadera su ciascheduno de' suoi quattro taglj otterrebbesi una Macchina portatile *comparativa*, in virtù della quale senza nessuna necessità di calcolo o di già preparate *Tavole di riduzione* si paragonerebbero infra di loro i più celebri dei *Pesi* antichi, e moderni.

Quanto i Costruttori delle Bilancie, e specialmente delle *docimastĭche* per le materie preziose, come ancora di quelle dedicate agli sperimenti Fisico-chimici, ed alle Droghe medicinali o tintorie, son soliti d'esser cauti nel far sì che i due punti, dai quali pendono i due Bacini, ed il punto intermedio di sospensione, ovvero del centro di rotazione della Bilancia siano scrupolosamente disposti nella medesima linea retta affinchè l'Istrumento non riesca nè *sordo* nè *folle* a qualunquesiasi leggieri *trabocco* (1), altrettanto gli Staderaj nel lavorare le Stadere *semplici*, e moltopiù le *composte*, o per abitudine d'anticata ignoranza, o per effetto d'incuria sempre corrente sogliono non attendere a questo principio fondamentale dell'aggiustatezza e *stabilità* dell'equilibrio, ch'è dalla Statica magistralmente prescritto. Dato che i tre punti suddetti non fossero precisamente nella medesima dirittura, come non di rado addiviene, la Leva *diritta* sarebbe angolare, ed è quanto dire equivalente all'*inflessa*; ed allora si dà di soventi luogo, in vece d'un solo e verace, a diversi equilibrj possibili con Pesi *falsi*, cioè all'errore o all'inganno, il qual procedendo dal vizio intrinseco della Stadera, conosciuto tosto ch'e' sia per lunga pratica dal venditore, torna sempre a disavvantaggio del compratore, nè v'ha legge cotanto efficace, che mai potess'esser valevole a reprimere tal prevaricazione, ed abuso della pubblica confidenza.

---

(1) *Van Swinden* nel primo volume delle sue *Positiones Physicæ* stampato nel MDCCLXXXVI ad Harderwyck (Lib. III, Parte I, Sez. II, Cap. I, Art. IX dalla pag. 204 a 212 incl., e dal N.° 75 a tutto il 99 (si vedano specialmente i N.i 88 e 93) ha raccolto in compendio tutto ciò che sapevasi sulla Teoria, e sulla Pratica delle Bilancie. Per riguardo poi alle *Stadere* sia consultata l'Opera stessa sino alla pag. 216, ed al N.° 107 incl., e soprattutto si leggano i N.i 102, 105.

Ma d'altra parte nelle Stadere, che in sè riuniscono il Peso *grosso*, ed il *piccolo*, conforme alla foggia, in cui dagli artisti si lavorano comunemente, rendesi inevitabile questo difetto; laonde sarebbe assai commendevole rintracciare il modo di prevenirlo. Ecco dunque il rimedio più acconcio, che non difficilmente conduce al conseguimento della *correzione* desiderata.

La Figura I.^{ma} manifesta di subito con tutta chiarezza in una Stadera fornita del comodo di due punti di *sospensione* gl'inconvenienti, che accaderebbono ancora casochè per diminuire o *ragguagliare* l'errore si volesse aver l'avvertenza, la qual'è in uso presso alcuni artefici più accurati ed intelligenti degli altri, di collocare cioè ciascuno di quei due punti nella direzione dell'*asse*, o della linea centrale della verga *parallelepipeda rettangolare*, ovvero del *Giogo* su cui scorre il *Romano*, da un punto della qual linea penda altresì il capo raccomandatovi delle tre o più *catenelle* sostenenti il *Bacino*. Conciossiachè il predetto *Romano* obbligato a scorrere immancabilmente mediante l'*oncino* od anello tagliente, che lo sostiene, sul taglio, *costola*, o *spigolo* della verga, nel quale sono segnate ed incise le *divisioni*, rimarrebbe sempre a contatto con un punto di quello *spigolo* situato fuor della linea retta congiungente il punto di *sospensione*, e l'altro da cui pende il *Peso*, e tanto precisamente al di fuori quanto importa la metà della *diagonale*, che congiunge i due *spigoli* opposti. Conoscevasi a vero dire da molto tempo quella foggia special di Stadera denominata *Danese* o *Svedese*, ove il *Bacino* e il *Romano* restando fissi maisempre alle due estremità della *Verga* si conseguisce la notizia de' *Pesi* col cambiare e far iscorrere avanti o indietro sulla *Verga* medesima il *punto* mobile di *sospensione* (1); ma conoscenza siffatta non avea mai risvegliata l'idea d'approfittarne a vantaggio delle *Stadere* Romane. Ora all'effetto di tener sempre i due o più punti di *sospensione* nella medesima linea retta precisa, che congiugne quelli, dai quali pendono il *Bacino*, e il *Romano*, era ben facile divisare che ciò s'otteneva mediante un traforo rettangolo ABCD (*Fig. II.*) procurato nel sodo della testa della *Stadera*, e talmente sdrucito che l'orlo o il labbro superiore dell'apertura, o per dir meglio le sommità M, M, ec. degl'incavi in piccole lastre fermatevi d'acciajo ben temperato o di pietradura, dentro cui dee posarsi il taglio a coltello DE dell'*Oncino di sospensione* disegnato di faccia e di fianco nella III. Figura, tornassero appunto in dirittura degli altri due suddescritti. Il perchè, oltre a *sospendere* nel modo chiaramente indicato alla lettera F, ed in totalità rappresentato dalla Fig. VII. il *Bacino*, ed i *Pesi*, onde posta orizzontale la *Verga* della Stadera la direzion verticale della gravità *assoluta* degli ultimi colla pienezza della sua forza riesca sempre perpendicolare alla Leva, fa eziandio di mestieri costruire di tal maniera il *Romano* qual manifestanlo di prospetto, ed in istato d'azione la IV. e la II. Figura, e vale a dire unendolo ad un *bocciuolo* o cassetta vuota metallica GHIK, che abbracciando leggiermente le due faccie eguali del braccio lungo della Leva, lavorata *in quadro*, e disposta colla sua *diagonale* verticalmente, sia con pochissimo o morbido attrito scorrevole sul taglio o *spigolo* superiore del braccio predetto. Le *divisioni* corrispondenti alle due maniere di *pesare* or coll'uno or coll'altro *punto di sospensione* senza bisogno di rivoltar la *Stadera* possono incidersi sottilissime sulle due faccie della *Verga* con lasciar intatto il taglio intermedio, nel qual esse s'incontrano, ed aprire una rimula o fessura in L, punto di mezzo, sull'una e l'altra faccia della cassetta mobile per iscorgere i *segni* della duplice *divisione* mediante gli *Indici* respettivi.

---

(1) *Posit. Phys.* l. c. al Num.° 105.

Molti, e rilevantissimi sono i vantaggj, che nascerebbero da questo cambiamento di forma delle Stadere d'uso comune in commercio, a scanso dei loro inevitabili errori, che porta seco la costruzione attuale, ai quali intendesi adesso recar rimedio e facile ed opportuno. Accennerò solamente i più ovvj per non dilungarmi di troppo dal principale assunto propostomi.

1.° Si toglie primieramente il mancamento, che hanno, o sogliono avere tutte le *Stadere* comuni (ed in particolar modo, e più sensibilmente le Stadere men lunghe), delle *divisioni* cioè per solchi o *tacche* sul dosso della *Verga*, più o meno larghe, più o meno profonde, dentro di cui debba incastrarsi l'*oncino* reggente il *Romano*, che così vien obbligato di scorrere *a salti*. Intaccature di simil fatta, oltre a non esser giammai della stessa larghezza *in bocca*, ed a servire d'incastro ad un *oncino* grossolano o *lordo* e di taglio ottuso, impediscono l'incisione delle *suddivisioni* intermedie, e danno luogo a non potersi apprezzar tutte quelle, le quali sono occupate a vicenda dalla metà della larga *bocca* dei taglj, non sempre eguali, e scavati a mano senza regola e norma, per lo più colla *lima*. All'opposto adottandosi il nuovo metodo di costruzione, non solamente verrebbero ad essere chiare, precise, e sottilmente segnate tutte le *divisioni* e *suddivisioni assolute* più piccole, ma queste eziandio si potrebbero facilmente spartire col *virtuale* ajuto d'un *Nonio* o *Vernier* sino alle più minute frazioni. Ed il *Romano* con insensibile gradazione discorrendo allora tutti i punti dell'asta farebbe così apprezzar meglio i piccoli *Pesi*, darebbe campo di valutarli appuntino a causa del passaggio men rapido o men *saltuario* dagli uni agli altri vicini, e per rispetto ai *Pesi* maggiori verrebbe a crescere la *portata* delle Stadere.

2.° In secondo luogo risparmierebbesi, perchè inutile nella maniera proposta, il secondo *oncino* di sospensione delle Stadere ordinarie, che (come ho già detto) associandosi al primo fa sì che ambedue sieno ad un tempo una vicendevol sorgente d'errore. Nè poco è da valutarsi a mio senso per la giustezza del *pesare* le merci la *mastiettatura* data al *Romano*, ed all'ingegno che tien sospeso il *Bacino*, in virtù del

del quale artificio d'agevolissima pratica i medesimi si dispongono subito di per sè, a foggia d'una *Bussola* nautica ben imperniata sui *poli*, nella vera direzion della gravità, a scanso di deviazioni o d'impedimenti di sorte alcuna; lo che sovente addiviene lavorandogli della forma rozza e inesatta praticata nelle Stadere, che sono oggigiorno in commercio. Lavorata *in quadro* la verga, e per tutto il braccio più lungo tirata dell'istessa misura o dello stesso *calibro*, perchè vi scorra in ogni punto egualmente, e l'abbracci a contatto facile e morbido il *conduttor* del *Romano* (*Fig. IV.*), vengono ad esser posti gli artisti nell'obbligo d'usar di tutta l'attenzione possibile all'effetto che nella *Verga* non vi restino diseguaglianze, le quali disturbino, e falsino le *divisioni* della medesima avvegnachè riportatevi mediante un *Compasso* fedele dal *Campione* o dalla *Matrice*, verificata con ogni maggior premura per via di reiterate sperienze.

3.° Quanto sarebbe facile per un artista accurato la struttura d'un *Campione* esatto delle Stadere (piccole, grandi, e mezzane), e quanto il nuovo metodo esposto di costruirle, in apparenza difficile e laborioso, non oltrepasserebbe in sostanza il confine dell'ordinaria capacità d'un esperto fabbricatore di siffatti strumenti, altrettanto farebbe mestieri d'avvedutezza e bravura per conseguire un altro prezioso vantaggio, e vale a dire quel di comporre una Stadera *comparativa* dei principali *Pesi*, o antichi o moderni, ch'erano o sono in uso presso i popoli commercianti. Sarebbe questa non meno comoda di quei Bastoni *metrici* o Canne portatili, sulle quali si segnano le differenti Misure *lineali* più frequentemente adoprate in Europa, o in altre Regioni del Mondo. Più che dal discorso analitico intorno alle parti, che comporrebbero una forbita Stadera *comparativa*, se n'intenderà benissimo da chicchessia la conformazione gettando l'occhio sulle Figure V, VI e VII, le prime due delle quali sono delineate di grandezza naturale o effettiva, e l'ultima diminuita sino ad $\frac{1}{10}$ con una *Scala* di proporzione onde mostrasse nella sua integrità il congegnamento della *Stadera*. Essa così conformata avrebbe due *divisioni* diverse, corrispondenti da un lato e dall'altro a ciascuno dei quattro *spigoli* dell'Asta o *Verga* dell'Istrumento; di tal maniera che servirebbe alla *comparazione* di otto differenti *Pesi*, e *divisioni* e *multipli* loro particolari, compresovi il *metrico* o decimale, ch'era l'unico segnato per comodo a confronto del vecchio *Peso* in alcune delle più moderne Stadere. Tutta l'arte consiste nel far girare il capo rotondo della *Verga* parallelepipeda *per quarti* di cerchio da uno *spigolo* all'altro, e ciò mediante una *Vite* maschia impegnata nella sua femmina mobile C sul sodo cilindrico B, e nel fermarla a stretta col corredo solito degli appoggi o *guancialetti* A, *i* nel punto preciso (manifestato dalla coincidenza dei due *indici* *m*, *n*) per mezzo d'una *Vite* K, che volgarmente dicesi *di pressione*. Gli Accademici del Cimento (siccome apparisce dall'autentico loro *Diario* in data de'30 Agosto 1811) giudicarono, in linea di dubbio, difficile il caso che la detta *Stadera* rotatoria fosse dapprima così rigorosamente *centrata* che nel compire il suo giro affin di condurre sotto il *Romano* ora questo ora quel *cantovivo* dell'Asta mantenesse sempre in tutta l'intera rivoluzione il suo stesso ed unico *centro* di movimento, o dato ancora che così fosse all'uscir di mano all'Artefice si conservasse tal quale dipoi nel lungo uso ed attrito della medesima, e dopo d'essersi coordinata colla Vite *di pressione*, e coll'altre parti dell'Istrumento, suggette ancor desse ad assestarsi col tempo qualche poco diversamente a quel che erano state nell'Officina. Nulladimeno una Stadera *comparativa* o *universale* consimile costruita a proposito nell'Isola dell'Elba pel *Corpo del Genio*, e statavi in uso pel corso di più anni consecutivi non ha mostrata patentemente, a malgrado di ciò, la minima mutazione: tanto è vero che la puntualità e l'esattezza avutesi in mira nel lavorare sin dapprincipio una Macchina qualunque siasi sommamente contribuiscono alla durata del suo buon effetto, come si scorge nei Micrometri dilicatissimi, ed altrettali strumenti di molto maggior finezza, e d'assai più elaborata composizione delle Stadere, di cui ora si tratta. Potrebbe ancora riflettersi che il giudizio sul merito della durevole idoneità d'una Macchina non si fa mai, nè può farsi per avventura colla certezza medesima, che si pronunzia qualora si prenda in esame il pregio della materia trattata in un argomento di Scienze esatte. E di fatto gli stessi Fiorentini Accademici prenominati dietro all'invito dell'Autore (1) eletti Giudici della sua pretesa scoperta della soluzione dell'equazioni *cubiche*, e *biquadratiche* (le quali dalle prime dipendono, come ognun sa) al pari di quelle del second'ordine, e torna a dire mediante la linea retta, e la Periferia circolare, senza fermarsi sulla trasformazione del primo *membro*, e sul trovare tutte le tre *radici* reali nel caso *irriducibile* per mezzo dell'iscrizione del Triangolo equilatero in un Circolo (cose ovvie e notissime sino dal primo avanzamento dell'Algebra) viddero immantinente dove consisteva il *paralogismo* di toglier di mezzo per la costruzione *geometrica* la Parabola Apolloniana, ed era quello d'aver considerate diverse le due equazioni $x^3 - 3r^2x + 2ar^2 = 0$, $x^4 - 2ax^3 - 3r^2x^2 + 8ar^2x - 4a^2r^2 = 0$, mancando d'essersi accorto l'Autore che salvo la *radice* estrania *positiva* $2a$ introdotta nella seconda elleno sono sostanzialmente una medesima e sola equazione.

ARTICOLO II.

Dell'imperfezione delle Stadere procedente immediatamente dall'imperizia dei Costruttori.

Lasciata a parte pel seguente Articolo la considerazione importantissima riguardante i *limiti* da prescriversi nelle *Sta-*

---

(1) Capitano *Pasquale Navarro* - *Costruzione Geometrico-piana dell'equazioni di terzo, e quarto grado* - In Napoli MDCCCX, Operetta brevissima divisa in tre Articoli.

dere di questa o quella grandezza individuale, all'effetto che le *divisioni* sien tutte chiare e patenti, ed abbastanza distinte per intervalli l'una dall'altra, nè siavi il pericolo che indichin falso pel piegamento dell'asta atteso la troppa *portata* della *Stadera*, o la non serbata proporzion delle parti, e dei materiali, che la compongono, esaminiam più d'appresso i vizj dell'Istrumento, ai quali dà causa per abitudine antica l'ignoranza degli artigiani.

A ragione dei prezzi, o maggiori o minori, delle specie diverse delle derrate, che si misurano dal loro *Peso*, le *divisioni* della *Verga* dall'una all'altra dovrebbero avere maggiore o minor latitudine, onde poter segnare, e ben distinguere in quelle anche i *rotti* più piccoli. Ma per l'opposto addiviene che il solo arbitrio o capriccio dei Costruttori, senza curarsi di proporzione nessuna, assegni per ogni sorte di merci, o care o vili che siano, la *gradazione* stessa per tutte, e qualche volta la *gradazione* contraria all'intrinseca loro importanza. Bisogna dunque aver sempre presente che vi debb'essere un rapporto determinato dalla Teoria, e confermato dall'esperienza tra la lunghezza e grossezza dell'Asta, il peso del *Romano* della Stadera, la sua scempia o doppia *portata*, e la *gradazione* più o meno ristretta delle sue *divisioni*.

Un'altra comunissima inconseguenza si è quella di non partirsi nelle Stadere di doppia *portata*, o fornite di due punti di *sospensione*, dall'ultimo termine della prima serie de' *Pesi* ond'incominciare la serie della seconda, replicando cioè inutilmente per un certo intervallo i medesimi *Pesi*, ed impiegando più presto quell'inutile spazio a scapito dell'augumento notabile di *portata*, o del miglioramento delle *divisioni*, o della lunghezza superflua della *Verga*, perduta così senz'oggetto, e senza trarne il convenevol profitto.

Inconsideratezze di simil sorte nascono per lo più dall'erronea pratica degli Artisti, i quali a capriccio prendono una *Verga* qualunque di Ferro uscita dalla *Filiera*, e credono che null'altro rimanga per convertirla in una buona, e giusta *Stadera* se non che stabilire a piacimento loro, senza niun altro rispetto, i due punti di *sospensione*. Nè accade di rado che accompagnando ad una *Verga* arbitraria un *Romano* di peso parimente arbitrario, e forzando sino all'esorbitanza la *portata* della *Stadera*, questa pel carico sproporzionato alla sua resistenza s'incurvi, il maggior braccio della Leva s'accorci, e le *divisioni* diventin fallaci in pregiudizio dei compratori.

Il Problema dell'*equilibrio* considerato come puramente *analitico* è semplicissimo, e si risolve colla dottrina teorica de' *momenti*, fondamento di tutta la Statica, e immediatamente della Dinamica. Ma quando il Problema esiga il riguardo a tutte le circostanze *fisiche* della Materia cosicchè dall'astrazion matematica passi al concreto della natura delle cose corporee, cambia d'aspetto, e diventa assai complicato. Egli è allora il caso di domandar soccorso al magistero della Sperienza, interrogata non senza frutto in proposito del *soffregamento*, dell'adesione e coesione d'*affinità* chimica, della *rigidità* delle corde, ed altrettali particolarità, per cui la Meccanica *fisica* differisce moltissimo dall'*analitica*. Sarebbe veramente desiderevole che più sovente scendessero dalla sublimità dei lor calcoli gli Analisti, e si prestassero più volentieri di quello che facciano a coadiuvare le arti. Imperocchè il possibile perfezionamento di queste non può mai conseguirsi d'altronde che dal cospirare amichevolmente la Teoria colla Pratica, e tendere entrambe al medesimo ottimo fine, ch'è quello di non fermarsi ai soli ideali concepimenti, ma di tradurli col valutare quanto si possa le specialità o le *condizioni* della materia, talquale ella è, a vantaggio della vita civile, e riempire siffattamente l'ampia lacuna, che resta ancora tra l'Arti, e le Scienze. Isolate quanto lo sono per la massima parte l'ultime dalle prime, slegate come se fossero estranie una a riguardo dell'altra, tolte la continuità e cognazione, che vi dovrebb'essere naturalmente tra loro, non dee recar maraviglia se le principali invenzioni nell'arti siano state, come c'insegna la Storia, più l'effetto del caso che della dottrina, e se queste scoperte per la mancanza del soccorso *teorico* restino tuttavia incomplete, imperfette, e non quanto forse potrebbero essere avvalorate, e promosse. Dall'altro canto non può negarsi che alcune delle particolarità o essenziali o accidentali della materia non siansi ancora introdotte tra gli altri dati o elementi dei più astrusi calcoli dell'Analisi, ossia perchè manchi quel complesso, e novero d'esperienze, che sarebbono necessarie a tal uopo, ossia perchè l'Algebra non abbia ancor mezzi di porle insieme coll' altre *variabili* dell'*Equazioni*, o ponendole conducano a *Formule* o *Funzioni* intrattabili, o a quelle che diconsi *inesprimibili*. L'Analisi *fisica* in generale si trova adesso ben lontana dal segno, al quale è giunta l'Analisi *matematica*, e la prima dovrebbe, mirando alla pubblica utilità, traslatar l'espressioni dell'ultima in processi *grafici* alla portata di tutti gli artisti, onde servissero loro di scorta come i *Modelli* nelle Bell'Arti. Moltiplicate le Osservazioni, e gli Sperimenti, rintracciate le Leggi delle *variazioni* di quelli attributi *corporei* tralasciati sino al presente nel *calcolo*, trovati i *limiti* delle medesime, e le *Funzioni* acconcie a rappresentarle, e per mezzo dell'*interpolazione*, e dei prescelti *parametri* determinato approssimativamente lo stato intermedio tra detti *limiti* dipendente dalla *Teoria delle Inequazioni* (se così sia permesso chiamarle) verrebbe a formarsi un *Manuale* utilissimo a vantaggio dell'Arti segnatamente *meccaniche*, di cui n'abbiamo tra i pochi altri un esempio nella *Memoria* di *Prony* sulla spinta de'*Terrapieni*, ed in un MS.°, che serbo intitolato *Analisi fisica delle Volte*.

Dopo questa indispensabile digressione preparatoria torno all'assunto della lavorazione delle *Stadere*, ed osservo dapprima che niente sarebbe più facile quanto eseguirle perfette se ne dipendesse la *Pratica* dalla nuda, e sola Teoria de' *momenti*. Difatti, consultando la Statica, tre sole *condizioni* rappresentate da altrettante *Equazioni* semplicissime basterebbe che fossero soddisfatte, cioè quella dell'eguaglianza de' *momenti* contrarj per rapporto ai due *carichi* estremi nella Stadera *diritta*, e *rivolta*, e la terza dell'eguaglianza medesima riguardante i *pesi* intermedj. Di tutte le parti, che compongono la *Stadera*, lasciatene dunque *variabili* o *incognite* sole tre a piacimento, il Problema verrebbe ad essere sciolto *teoricamente* parlando; ma *praticamente* però risoluzione siffatta potrebbe condurre a metter in essere una *Stadera* difettosa nell'altre rimanenti sue parti, ed in certi casi eziandio ineseguibile. Posto che le quantità *date*, a causa d'esempio, siano la *Verga*, il *Romano*, e il *Bacino*, e prese per *incognite* le distanze dei tre punti di *sospensione* dall'origine delle *divisioni*, s'ovvierebbe per un lato al pericolo che s'incurvasse la *Verga*, ma per l'altro lato mancherebbe ogni mezzo di regolare a volontà, e nel modo più convenevole il procedimento delle *divisioni* predette. Aggiungo che si potrebbe anche correre il rischio che gli *occhj*, i *perai*, il *Romano*, il *Bacino* dovendo avere dimensioni bastanti onde reggere, e proporzionarsi al *carico* estremo non lasciassero luogo (perchè non espressi nelle loro misure tra i *dati*) a segnar tutte le *divisioni*. In una parola le condizioni sì *pratiche* che *teoriche* da adempirsi comprendon otto *variabili*, cioè 4 per l'*equilibrio*, come orora vedremo, 2 per regolare nelle due *serie* dei *Pesi* le *divisioni*, 1 per aver riguardo ai due *limiti* della ponderosità del *Bacino*, e del *Romano*, e finalmente 1 perchè non si pieghi la *Verga*.

Sia dunque A il primo *dato*, vale a dire l'ultimo o massimo *Peso*, cui la *Stadera* da costruirsi debba giugnere a stabilire o *determinare*. Ed i simboli, e i *limiti* dell'altre parti siano i seguenti (vedasi la VIII Figura).

Lunghezza della Verga, tanto larga quanto grossa, l (riportata all'*unità* delle Misure correnti)

Sua grossezza e, suo taglio o profilo per largo e^2

Peso del Romano p tra i limiti dati $\left\{\begin{matrix} p' \\ p'' \end{matrix}\right.$

Peso del Bacino P tra i limiti parimente dati $\left\{\begin{matrix} P' \\ P'' \end{matrix}\right.$

Peso di passaggio tra la serie dei Pesi piccoli, e quella de' grandi K (*incognita* di mezzo termine, e riferita come gli altri Pesi alla vegliante *unità* della Libbra)

Distanza dei due punti di sospensione della Stadera diritta, e rivolta x

Altra dei punti di sospensione del Bacino, e della Stadera pei Pesi grandi y (non mai $<$ di a)

Altra del primo punto, da cui cominciano le divisioni, z

Somma di tutti i Momenti parziali della ponderosità della Verga, riportandola al primo punto di sospensione, M, Funzione di l, e, z, p

Simile della testa, dal lato opposto, N, Funzione di x, y

Somme respettive M', N' concernenti il secondo punto di sospensione, cioè le parti riunite del Momento M applicate al braccio comune di Leva x dal lato della Verga, e perciò M' Funzione di x, l, e, z, p, ed N' il Momento del rimanente della testata dal lato del Bacino, Funzione di y

(Queste *Somme* dipendono dalle *masse*, e dalle *distanze* d'ogni particella dell'impiegata Materia dal *centro di rotazione*, e non volendo ricorrere ad ottenerle per via dell'Analisi, chiunque siasi famigliarmente applicato alla Fisica Sperimentale, può averne subito in pratica la misura mediante un solo *equipollente Momento*.)

Ciò premesso la Statica somministra quattro *Equazioni* fondamentali

I.ª $M + pz = N + P(x + y)$

II.ª $M + p(z + l) = N + (P + K)(x + y)$

III.ª $M + M' + p(z + x) = N' + (P + K)y$

IV.ª $M + M' + p(z + x + l) = N' + (P + A)y$.

Sottraendo la prima dalla seconda *Equazione*, la terza dalla quarta, la prima dalla terza, e lasciando l'ultima intatta, le IV riduconsi alle più semplici

$pl = K(x + y)$ . . . . (1)

$pl = (A - K)y$ . . . . (2)

M' +

$$M' + px = N' - N + Ky - Px \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
$$M + M' + p(z + x + l) = N' + (P + A)y \; (4),$$

delle quali le sole due prime abbracciano incontanente cinque delle otto *incognite*, e ciascheduna di queste al primo grado, ossia d'unica dimensione.

Ora assegnisi a per intervallo d'ognuno de'due adiacenti segni di divisione da Libbra a Libbra nella *scala* dei Pesi *piccoli*, e b in quella de'*grossi*. Divien dunque $l = aK$, $l = b(A - K)$; laonde $K = \frac{bA}{a+b} = K'$, $l = \frac{abA}{a+b} = l'$, due *incognite* determinate. Sostituiscansi l', K' nella (2), che darà tosto $p = (A - K')\frac{y}{l'} > p' < p''$, e farà conoscere i *limiti* d'y, cioè y', y'', tra i quali dee cader a; e se mai non cadesse tra questi, sarebbe mestieri modificare gli spazj a, e b presupposti. Preso allora il valor disponibile d'y, e posto nell'equazione (1) verrà a conseguirsi quello di x, e le cinque *incognite* dell'equazioni (1) (2) resteran tutte così conosciute. Ne rimangono ancora tre da determinarsi, cioè e (o per dir meglio e^2), z, P, a disposizione dell'Analista, che si ricavano dalle (3) (4) dopo fattevi le congrue sostituzioni dell'altre. Dee P contenersi tra P', e P''; e questi valori sostituiti a vicenda daranno i *limiti* di e, z, ovvero e', e'', z', z'', onde disporre degli intermedj. Il calcolo si facilita assai ponendo mente alla circostanza che e rappresenta una frazione ben piccola, ed e^2 molto più, a paragone delle lunghezze, ch'entrano nelle *Formule* de' *Momenti* M, N, M', N', ed osservando oltracciò che nel solo M c'è la seconda potenza di z, e torna a dire nella sola quarta equazione. Debbono e, l, p coordinarsi talmente che la *Verga* anco nel maggior *carico* si tenga sempre *diritta*; e quantunque s'ignori con qual precisa Funzione *analitica* di e, l, p esprimasi il *piegar* d'una *Verga* di Ferro, o d'altro Metallo più o men lavorato, tratto da questa, o da quella Miniera, ec., mi riservo a parlarne nell'ultimo Articolo, facendo intanto riflettere che e^2, a cagione della citata *relativa* sua picciolezza, influisce pochissimo nella determinazione dell'altre *incognite*, ed anzi ell'è di tal tempra e carattere da somministrar tutto il comodo di stabilire la sua misura quale si convenga, *ritoccando* di leggieri il *bottone* o risalto (*Fig. VII*) all'estremità della *Verga*, la gravezza del *Bacino*, ec., ec., e conduce alla semplificazione del calcolo, perocchè scelto e da principio quale l'esiga la *resistenza* del ferro dedotta da un corso di ben istituite sperienze l'equazioni agevolissime (3) (4) immediatamente appalesano i valori di z, P anche al meno addestrato Algebrista.

Contuttochè non abbia nessun bisogno assoluto di schiarimento il detto sin qui, gioverà non ostante a maggior lume dei meno intendenti un prospetto *pratico* circostanziato, con applicarlo alla stessa VIII Figura, ed all'ipotesi familiarissima delle *decimali* Misure.

Debbasi costruire una *Stadera* della *portata* di 200 chiliogrammi, spartiti in due differenti serie, una di *piccoli*, e l'altra di *grossi* Pesi, e sotto la condizione che la Verga *diritta* mostri i ventesimi, e la *rovescia* i decimi del chiliogrammo; di tal maniera che appurar vi si possa, e distinguere almen per approssimazione $\frac{1}{40}$ della Libbra *unità* nella prima *scala*, $\frac{1}{20}$ nella seconda, e coll'esercizio dell'occhio anche *rotti* minori; laddove per lo contrario nelle Stadere usuali, che s'estendono a 20, a 30 libbre, non si distingue che $\frac{1}{12}$, o l'oncia, e in quelle di 200 gli unici *interi*, e le più dilicate bilancie affin di giugnere a minutezza cotanta diventano *folli*, e perciò sovente intrattabili, o meno adatte al commercio.

Stantechè la chiara, e sottil divisione *effettiva* d'una linea retta suol limitarsi a un *Millimetro*, avremo nel caso speciale propostoci a esempio $l = 0^{m.},02\mathrm{K} = 0^{m.},01\,(200 - \mathrm{K})$, d'onde $l = 1^{m.},33$, e $\mathrm{K} = 66^{chil.}$, ultimo termine dei Pesi *piccoli*, ed incominciamento dei *grossi*.

Dunque l'equazioni (1) (2) son adesso

$$1,33p = 66(x+y)$$
$$1,33p = 134y;$$

dalle quali, se si restringa il peso del *Romano* fra i 3 ed i 5 *Chiliogrammi*, e dei due piuttosto si scelga il maggior estremo, deduconsi y vicinissimo a $0^{m.},044$, $x = 0^{m.},09$ all'incirca, e per conseguente le cinque *incognite* $l = 1^{m.},33$; $K = 66^{chil.}$; $p = 5^{chil.}$; $x = 0^{m.},09$; $y = 0^{m.},044 = 0^{m.},04$: intervallo ultimo anche a prima vista sufficientissimo tostochè si getti uno sguardo sulla distanza *mn* nella Figura II, e sulla *Scala di proporzione* ov'essa mostra distinti i quarantaquattro *Millimetri*.

Più laboriosa, ma non astrusa si è la ricerca dei valori particolari di M, M', N, N' partendo dal fatto sperimentale che un *Centimetro* cubo di ferro ($0^{m.m.m.},000001$) pesa $0^{chil.},0084$, ovvero $\frac{84}{10000}$ di *Chiliogrammo*. Con questo *dato*, e colla scorta della seguente Tavola, calcolata per le Misure lineali in *Centimetri*.

Nomi delle parti individuali	Dimensioni	Volumi	Pesi	Bracci di Leva	Momenti
Bottone	0,02 0,02 0,02	0,000008	0,0672	$l+z+0,01$	$0,0672l+0,0672z+0,000672$
Verga	grossezza e lunghezza l	le^2	$84le^2$	$z+\frac{l}{2}$	$84le^2z+42e^2l^2$
Parte z	gross.za 0,014 altezza 0,057 larghezza z	$0,000798z$	$6,7.z$	$\frac{z}{2}$	$3,35z^2$
Parte x	gross.za 0,014 altezza 0,037 larghezza x	$0,000518x$	$4,35.x$	$\frac{x}{2}$	$2,175x^2$
Parte y	gross.za 0,014 altezza 0,057 larghezza y	$0,000798y$	$6,7.y$	$x+\frac{y}{2}$	$6,7xy+3,35y^2$
Estremità della Testa	gross.za 0,014 altezza 0,057 larghezza 0,1	0,0000798	0,67	$x+y+0,05$	$0,67x+0,67y+0,0335$

ricavansi

$$M = 0{,}000672 + 0{,}0672\,l + 0{,}0672\,z + 84\,le^2z + 42\,l^2e^2 + 3{,}35\,z^2$$
$$M' = 0{,}0672\,x + 84\,le^2x + 6{,}7\,xz + 2{,}175\,x^2$$
$$N = 2{,}175\,x^2 + 3{,}35\,y^2 + 6{,}7\,xy + 0{,}67\,x + 0{,}67\,y + 0{,}0335$$
$$N' = 3{,}35\,y^2 + 0{,}67\,y + 0{,}0335\,.$$

Sostituiti in queste espressioni i valori di già trovati delle grandezze l, p, x, y, e dai Sperimenti notissimi sulla *resistenza* delle *squadrate* Verghe di ferro, a confronto di $l = 1^{m.}, 33$, e di $p = 5^{chil.}$, ottenuto il prossimo valore di $e = 0,018$, si determinano agevolmente per mezzo delle due restanti equazioni (3) (4) i valori approssimativi delle ultime *incognite* $z = 0^{m.}, 35$, $P = 15^{chil.}$, e così viene ad essere la ricercata Stadera *esemplare* in tutti i particolari, che le competono, circoscritta, definita, e determinata.

Con più di sì fatti Prototipi di Stadere *Campioni* a diverse *portate* di *Pesi* gli Artefici null'altro averebbero da far che copiarli, ed abbandonerebbero finalmente l'uso difettosissimo invalso per antica abitudine nelle loro officine, ch'è quello d'improntar subito la *Stadera* sopra una *Verga* qualunque con un *Bacino*, e *Romano* già *dati*, senza punto curare la proporzione della grossezza colla lunghezza dell'Asta, l'andamento e il passaggio delle due *divisioni*, e la collocazione più acconcia de'due *Oncini* di sospensione dell'Istrumento. Ma indipendentemente ancora dall'avere sott'occhio, e consultar sempre i preindicati Modelli un oculato, ed esperto Artista, cui stia ben a cuore il pregio della sua professione, sa procedere accortamente saggiando e risaggiando, *provando e riprovando*, verso il punto di perfezione. Tutta l'arte consiste nel far passi ben misurati, e nel tenerli ristretti fra certi *limiti*, che non si deggiono mai trapassare. Nasce dal molto, ed avveduto esercizio quella Regola *pratica*, che salva in questo Problema statico le relazioni delle parti nel tutto rintracciati che ne siano una volta mediante l'*Analisi matematica* i *limiti* l', l'', p', p'', P', P'', ec. ec., dentro dei quali l'Artefice ha poi campo di contenersi o più stretto o più largo per rispetto ai termini estremi, uniformandosi in ciò alle circostanze particolari, ed all'importanza del suo lavoro. Proverebbonsi a tal oggetto molti punti di *sospensione* reggendo quà e là la *Verga* per mezzo di fili metallici *provvisionali*, e meglio se fosse corredata la testa della medesima *Verga* ornandola col suo *traforo* (*Fig.*^{e} *II*, *V*, *VII*, *VIII*) onde a talento, ed a passi lentissimi lo Sperimentatore facesse scorrervi avanti e indietro il *taglio*, su cui riposa od aggirasi la *Stadera*.

Quest'ordine lucido, questa facile, semplice, e natural deduzione d'una ricerca analoga consecutiva ad un'altra senza disturbar nè confondere l'intima lor connessione, che di rado è osservata da chi professa le Arti *meccaniche*, sembra qualche fiata negletta anche nelle discipline severe. Ho letto indicarsi come proprietà (veramente singolare!) del Circolo da taluno l'Equazione $\cos.0 + \cos.\frac{1}{3}\pi + \cos.\frac{2}{3}\pi + \cos.\pi = 0$, mentre nasce immediata, e quasi intuitiva dall'iscrizion dell'Esagono, e n'ha altre *simili* innumerevoli derivanti dalla nuda ispezione d'ogni Poligono *parilatero* (1). Un valente Scrittore, dopo la prova fatta della forza *centrifuga* all'Equator della Terra pari a $\frac{1}{289}$ della gravità, rinnova il calcolo per trovare qual dovesse mai essere la *velocità* della rotazione diurna perchè s'agguagliassero le due forze; dimenticatosi per avventura che la *Formula* generale $\frac{V^2}{R}$, ovvero $\frac{V^2}{2R}$ la dà immantinente tanto maggiore di quella del *Movimento* diurno attuale quant'è la *radice quadra* di 289 a confronto dell'*unità*, cioè *diciassette* volte più grande (2).

---

(1) Garnier *Analyse Algèbrique faisant suite aux Élémens d'Algèbre. A Paris an XII* - 1804. Capo XII, §. 61, pag. 167.

(2) *Mémoires de Mathématiques etc. Par Charles Bossut - A Paris* MDCCCXII. alle pagg. 259 e 260 Esempio I., §. VIII, Esempio II., §. IX, ch'è Corollario *immediato* del §. III, Teorema I. a 254-55 56.

ARTICOLO III.

Del modo adequato da usarsi nel dividere e suddividere l'Asta o il Giogo delle Stadere.

La più preziosa, e la più essenziale prerogativa della *Stadera* è riposta nell'accuratissima sua *divisione*. Non ho mancato ne' due Articoli precedenti, ogni volta che portavalo l'argomento, d'accennar di passaggio i più volgari, e più grossolani difetti della medesima: cade ora in acconcio d'esporre partitamente i rimedj valevoli colla debita diffusione.

Presuppongo che il *Romano* diligentemente *accampionato* o *legalizzato* sia tale, e tali siano le dimensioni della *Verga* di Ferro trascelta per la *Stadera* che quella non s'incurvi giammai dovunque si posi il *Romano*. E qui torno a dire che vane sarebbero ogni cautela, ed ogni premura d'attendere a porre in regola la *divisione* subitochè suggetta fosse a piegarsi l'Asta della *Stadera*, manifesto essendo a chiunque come una Retta *ugualmente divisa* riducesi a Curva *disugualmente divisa* nell'inflessione, scemano i *bracci di Leva*, e il *contrappeso* al *Romano*, cioè la Merce venduta, si fa sempre minore del *giusto*.

Havvi un'esperienza *normale*, che servir potrebbe di canone o di guida agli artisti per non errare in siffatta materia. Una *Verga* di buon ferro grossa *in quadro* $0^{m.},015$ non si piega *sensibilmente* giammai purchè sia limitato il *Bacino* vuoto tra i 10, e 25 *Chiliogrammi* di peso, e il *Romano* dai 3 ai 5 *Chiliogrammi*, e purchè la lunghezza della medesima *Verga* non oltrepassi la solita delle *Stadere* comuni. Le differenti qualità del metallo combinate con diverse misure, ed esposte ad un corso di sagacissimi sperimenti son contenute a maggior lume, avvertimento, e indirizzo di pochissimi tra i bravi Artisti nella Tavola annessa.

ESPERIENZE SULLA RESISTENZA DEL FERRO

Numeri delle Esperienze	Lunghezze delle Verghe	Grossezze in quadro	Pesi applicati alle estremità	Osservazioni
1	1$^{m.}$,42$^{c.}$	0$^{m.}$,015	5$^{chil.}$,58	Ha principiato a incurvarsi manifestamente al carico di Chiliogrammi 181, ed è andata crescendo la Curvatura sino a 210.
2	1 ,13	0 ,013	3	Verghe d'uniforme calibro uscite dai Distendini delle Ferriere.
3	0 ,87	0 ,013	5	
4	1 ,49	0 ,016	3	
5	1 ,40	0 ,0165	4	
6	1 ,11	0 ,016	5	
7	1 ,03	0 ,016	6	
8	1 ,30	0 ,0165	5	Verga, che andava assottigliandosi o decrescendo.
9	1 ,25	0 ,0165	6	
10	2 ,12	0 ,02	3	Verghe non lavorate nei Distendini.
11	1 ,71	0 ,02	5	
12	1 ,65	0 ,0185	3	

Son soliti gli *Staderaj* principiare dall' equilibrio del *Bacino* vuoto, e del *Romano* correspettivo, stabilito il qual equilibrio pongono sucessivamente nel primo i varj Pesi *Campioni*, e bilanciato ciascun col *Romano* danno un colpo di martello sopra l'*Oncino*, il cui taglio è di rado ben temperato, ed acuto. Contenti di poche *divisioni* principali spartiscono colle *Seste* gl' intervalli frapposti a quelle, e quinci, dove son tutti i primi, e secondi punti segnati, lavorano colla *Lima*, e fanno un *solco* a ogni punto. Questa operazion manuale produce più inconvenienti; 1.° si perde il primo *segno* già fatto, e manca ogni regola per sapere se corrisponda al cancellato *segno* l'apice appunto della concava Curva rovescia del *solco*; 2.° molte delle importanti *suddivisioni* intermedie, atteso la larghezza dei *solchi*, come ho notato altra volta, non possono aver più luogo, o diventano incerte; 3.° si perde ogni qualunque fatica impiegatasi nella scelta dei *giusti Pesi*, e nell'accertarsi dell'esatto loro bilanciamento a ogni punto.

Tutti i predetti inconvenienti s'eviterebbero alloraquando nella *Stadera* di nuova foggia (*Fig.^{e} II e V*) andando dietro alla *Cassa* mobile del *Romano* si segnassero leggiermente i principali punti 8 con uno *stile* di fino acciaro guidato da una piccola *Squadra*, e tanto questi che i secondarj per via di *Punzoni* più o meno larghi si scalpissero, e s'imprimessero quant'occorra a render essi facilmente visibili, e a conservarli tali, e di lunga durata in processo di tempo.

Non si possono tutti i punti dal primo all' ultimo determinar col *Compasso*, perchè l'Asta d'una *Stadera* comunque forbita ha sempre qualche irregolarità di figura non mai appieno *geometrica*, ed entra anche l'Asta medesima, col suo *centro di gravità* posto quasi nel mezzo, tra gli *elementi* importanti del Peso nell'equilibrio; laonde i punti *principali*, ossia *di riposo* per le punte del *Compasso*, conviene che sieno col suddescritto diretto metodo stabiliti.

Segnate lievi lievi le *divisioni* e *suddivisioni* colla massima cura, ed attenzione possibile, affine di renderle poscia più patenti, e men facili a scancellarsi, non si può a meno di non toglier parecchie particelle di ferro alla *Verga*, di non menomarne il suo *peso*, e di non guastare a causa della moltiplicità delle particelle tolte *a punzone*, pel nuovo ripulimento di tutte le *sbavature*, ed in virtù dei *lunghi* bracci di Leva il primo divisato equilibrio. A correzione di ciò fa mestieri che i Costruttori osservino col massimo scrupolo le infrascritte tre *Regole* importantissime:

I.^{a} Di tracciar tutte in principio le *divisioni* dall'uno all'altro estremo colla medesima leggerezza di segno, perchè l'errore, che dee poi nascere immancabilmente, si repartisca con eguaglianza sulla totalità dell'Asta della *Stadera*:

II.^{a} D'in-

II.ª D'incominciar dalle *divisioni* dell'Asta *inversa*, che si referiscono ai grossi *Pesi* (seguon l'opposto metodo ordinariamente gli Staderaj), perchè egli è sempre miglior partito che gl'inevitabili piccoli errori, men difficili ad accadere nello sperimentar l'equilibrio in una Leva più corta, percuotano i *grandi* più presto che i Pesi *piccoli*:

III.ª Di correggere il tolto dal *punzonare* o *limare* coll'aggiunta d'un piccol peso al *Romano*, o nel convenevol rapporto col defalco d'un peso piccolo dal *Bacino*, prendendo norma dai soliti esatti *Campioni* posti di nuovo alla prova, per la restituzione del perduto equilibrio.

Sennonchè, avanti d'accingersi all'esecuzione dilicatissima dell'ultima delle tre *Regole* testè spiegate, dovrà l'Artefice prudentemente aspettare quel tempo che la *Stadera* sia stata sottomessa nell'Officina (e vale a dire prima di consegnarla per uso del Pubblico) a molti saggj, ed esperimenti da farsi coi *Pesi* maggiori. Imperocchè essendo vero, com'è verissimo, il fatto suggerito dall'esperienza, e convalidato dal raziocinio, cioè, che tutte le Macchine postesi in esercizio prima d'assestarsi subiscono, a proporzione dell'esser più o meno composte, come i Molini, gli Orologi, i Vascelli, o consimili, cambiamenti notabili dal primo stato, non solamente per la diversità della temperatura dell'aria, in cui sono, ma assai maggiormente per l'*azione*, e *reazione* continua delle lor parti, e provando l'istesso effetto sensibile contuttochè semplicissime le Bilancie, molto più le variazioni del *giusto* equilibrio *dato* dapprima alle nuove *Stadere* si risentiranno nei *forti* carichi; laonde sarà allora il tempo opportuno di rimediarvi col *Peso* addizionale, o sottrattivo proposto. E se non si manifestano chiare, e isolate le variazioni predette nelle *Stadere* volgari, fornite d'*Oncini* improprj, e mal lavorati, procede ciò dalla circostanza ch'elle restano involte, e confuse in massa con altri errori, che non danno nè possono dar mai luogo ad estimar separatamente le piccole differenze.

L'error però massimo è quello di non essere in linea retta disposti i tre punti di *sospensione*. Conciossiachè nella posizione *mac* (*Fig.ª I.ª*) stando *m* più in alto di *c*, e l'uno e l'altro più sollevati di *a*, va il vizio a profitto del venditore, e tanto meno il compratore lo pensa quantochè lo crede rivolto a suo pro, e lo sarebbe se i tre punti suddetti fossero nella medesima dirittura; di modo che il venditore froda, ed inganna, sapendolo, con sollevar l'asta della *Stadera*, ed il comprator vi concorre appagato, contento, e deluso, perchè non ignora che sollevandosi rapidamente l'*Asta* d'una Stadera *perfetta* si è questo un indizio d'un soprappiù di carico nel *Bacino*. Fenomeno singolare, che spiega l'inefficacia sperimentata dei Regolamenti di Polizia a tal proposito, in fatto cioè di frodi così coperte o larvate che tolgano ogni motivo apparente di querelare, o ricorrere!

Quando il popolo fosse ammaestrato incessantemente dai Dotti, quando la diffusione dei lumi inoltrata si fosse fino alle ultime classi del volgo, quando la Storia dei ritrovati nelle Scienze, e nell'Arti fosse tutta qual dovrebb'essere, chiara, imparziale, compendiosa, e verace, disparirebbe tosto ogn'inganno, e finirebbero parimente gli equivoci, per cui sono insorte, ed insorgeranno quistioni, e gare polemiche interminabili, a scapito per lo più della nobile, e schietta Letteratura. Che valeva infatti ripetere, a causa d'esempio, nella Dottrina dei *Logaritmi* (1) che $\log. y = M . \infty (1 + y)^{\frac{1}{\infty}} - 1$, e ripeterlo manchevolmente così $\log. y = M . \infty (y^{\frac{1}{\infty}}) - 1$, come se nuovo fosse questo Teorema co' molti altri suoi derivati, e non ispiegato, e promosso abbastanza dopo *Halley*, ed *Euler* in Opere posteriori (2)? Perchè volendo ricolmar di lodi *Pascal* il Compilatore d'una moderna Istoria o Cronica Matematica sì nel testo che nelle note, divulgate poscia per illustrarla (1), si è astenuto parlando della Cicloide (*Roulette*) da riportare che quasi un intero secolo e mezzo dopo il MDCLIIX i Geometri finalmente si accorsero che da un passo del suo *Trattato* deducevansi quelle celebri Formule *differenziali*, le cui *somme* s'ottengono mediante la *rettificazion* delle Coniche (2)? Quell'Autore medesimo riputatissimo, che dimostrate le *somme* delle potenze delle *radici* d'un' equazione per mezzo de' suoi *coefficienti*, da cui dipendono l'altre funzioni *simetriche*,

---

(1) *Analyse Algèbrique etc.* precitata, Capitolo XV, pag. 210. „ Ainsi on a deux „ limites .... ensorte que dans le cas de „ *r* infiniment grand il est permis etc. „

(2) *Magnitudinum exponentialium, Logarithmorum, et Trigonometriæ sublimis Theoria etc. Florentiæ* MDCCXXCII Cap. II, §. 60.

$$
\begin{array}{l}
S_1 = -A \\
S_2 = -\tfrac{2}{1}B + \tfrac{2}{2}A^2 \\
S_3 = -\tfrac{3}{1}C + \tfrac{3}{2}2AB - \tfrac{3}{3}A^3 \\
S_4 = -\tfrac{4}{1}D + \tfrac{4}{2}(2AC + B^2) - \tfrac{4}{3}A^2B + \tfrac{4}{4}A^4 \\
S_5 = -\tfrac{5}{1}E + \tfrac{5}{2}(2AD + 2BC) - \tfrac{5}{3}(3A^2C + 3AB^2) + \tfrac{5}{4}A^3B - \tfrac{5}{5}A^5 \\
\text{ec.} \qquad\qquad\qquad \text{ec.} \qquad\qquad\qquad \text{ec.}
\end{array}
$$

imposta dipoi un lunghissimo calcolo all'effetto di sciogliere il Problema *inverso*,. cioè,

$$
\begin{array}{l}
A = -S_1 \\
B = -S_{\frac{2}{2}} + S^2_{\frac{1}{1.2}} \\
C = -S_{\frac{3}{3}} + \frac{1}{1.2}2S_1S_{\frac{2}{1.2}} - S^3_{\frac{3}{1.2.3}} \\
\text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.}
\end{array}
$$

senz'avvedersi che queste ultime espressioni analitiche *immediatamente* procedono dalle prime, non si permette di citare tampoco chi fosse il primo a sviluppar *pienamente*, e *direttamente* le quantità *esponenziali* generalizzando la nota serie del *Binomio di Newton* (3), e pare che in linea di novità proponga questo sviluppo senza compirlo: lacune siffatte oscuran la Storia; tali mancanze, ed anacronismi intorbidan la chiarezza, ritardano l' istruzione, e tutto insieme rallenta il naturale progredimento dello spirito umano .

---

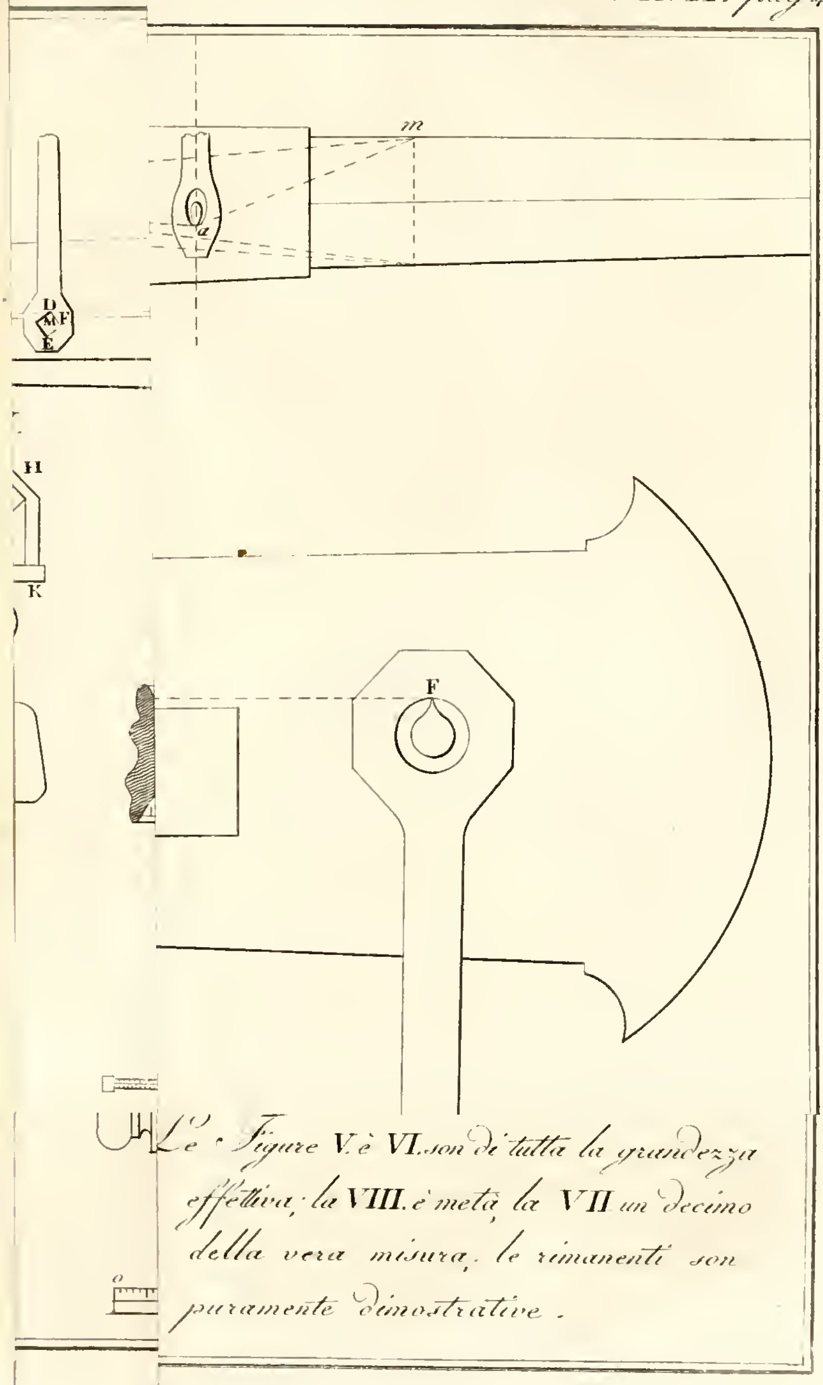
(1) *Mémoires etc.* di *Bossut* indicate di sopra = ivi = *Discours sur la vie et les ouvrages de Pascal*, pag. 307, *Traité de la Roulette* (367-71), *Histoire de la Roulette* (365); e si veda oltracciò la pag. XII.

(2) *De Calculo Integralium Exercitatio Mathematica. Florentiæ* MDCCXCII. (Opera citata tra l'altre da *Lacroix* — *Sectio I.ª*, *Sectio II.ª*.

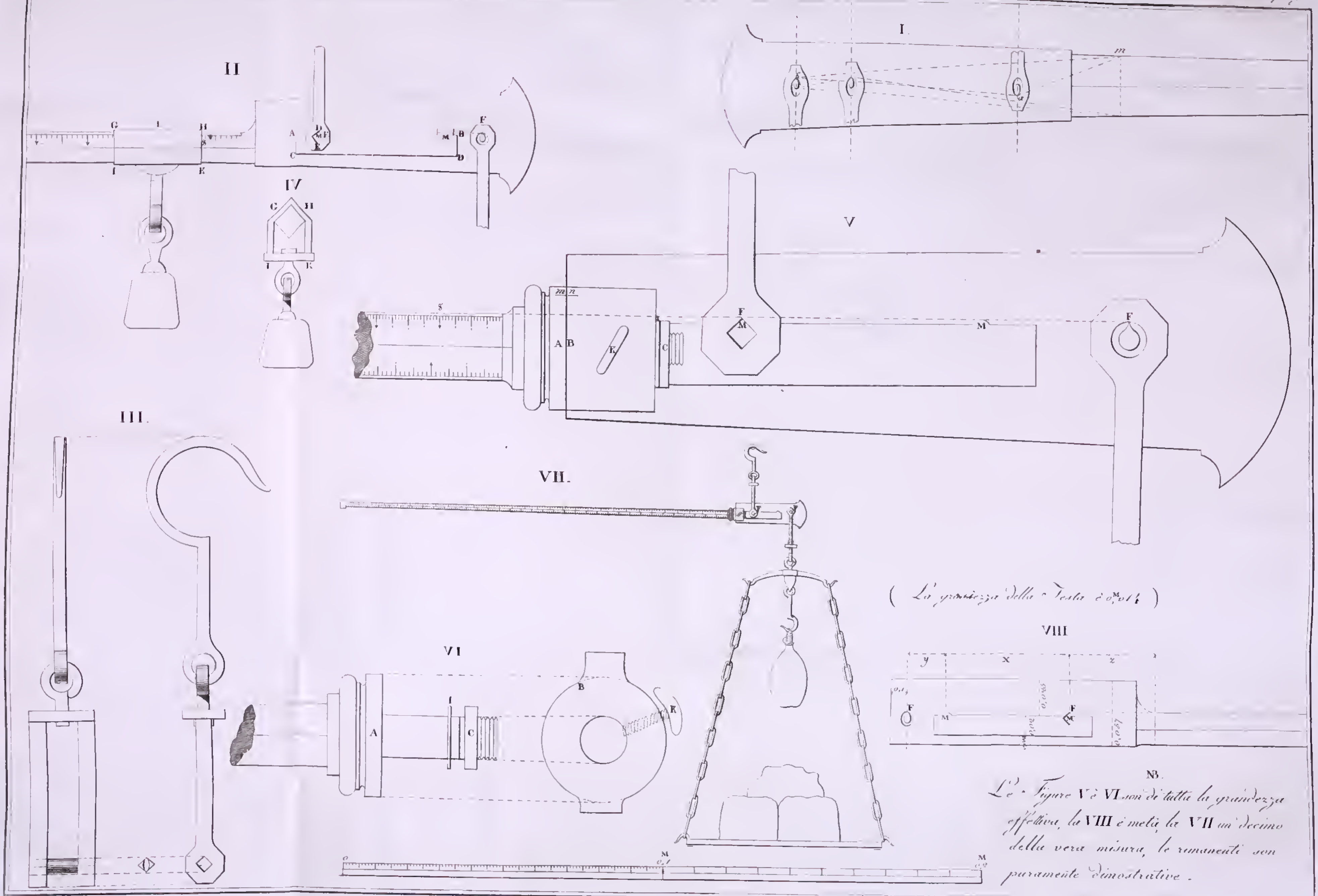
(3) *Élémens d'Algèbre. Par J. G. Garnier. A Paris an* XII-1803, pag. 123,

---

N.° 214, Cap. XV a confronto di tutto il Capo II.° dal §. 42 in poi della surriferita Opera *Magnitudinum exponentialium etc.* Legganisi ancora del Professore medesimo la prefata *Analyse Algèbrique* (6) al Cap. XV, N.° 74, pag. 203 e susseguenti, e le sue *Notes sur le Calcul Différentiel et sur le Calcul Intégral. A Paris an* IX. (1800) pag. 389, N.° 12.



Le Figure V. è VI. son di tutta la grandezza effettiva; la VIII. è metà, la VII un decimo della vera misura, le rimanenti son puramente dimostrative.


I.
m
II
G
I
H
K
A
C
D
E
M F
M
B
F
IV
G
H
I
K
V
m n
A B
E
C
F
M
III.
VII.
VI
A
C
B
E
VIII
y
x
z
0,14
F
M
0,035
F
M
0,051
0
M 0,1
M 0,2

(La grandezza della Testa è 0,M014)

NB.

Le Figure V e VI son di tutta la grandezza effettiva, la VIII è metà, la VII un decimo della vera misura, le rimanenti son puramente dimostrative.

OSSERVAZIONI VARIE SOPRA ALCUNI PUNTI PRINCIPALI DI MATEMATICA SUPERIORE

MEMORIA

Del Signor Gio. Battista Magistrini.

Ricevuta li 7 Gennajo 1815.

I.

Della precipua fra le obbiezioni prodotte contro la Teorica delle funzioni Analitiche di La-Grange, *e tentativo di una nuova confutazione della medesima.*

1. A chiunque viene introdotto nel Calcolo Differenziale e Integrale per la via dell'infinito, la sola per altro, che potè per lungo tempo seguirsi, dura ipotesi riesce, e penoso artifizio quell' essenziale concetto di quantità matematiche attualmente infinite e infinitesime, e molto più dura necessità quel dover trarre dall'infinito principj, ragionamenti, e formole destinate unicamente all'analisi, e misura di quantità finite. Io stesso trovavami in quest'angustia, quando a toglierne la cagione pubblicò *La-Grange* il metodo delle Funzioni Analitiche, nel quale di fatti io credetti con molti altri di rinvenire più saldo fondamento, e spiegazione più decisiva del Calcolo Differenziale, e Integrale. Ma questa calma fu turbata ben presto dai Geometri *Pasquitz*, e *Wronski*, massime dal secondo, del quale considerando la moltiplicità, e la singolarità degli argomenti proposti contro *La-Grange*, il romore della controversia, le repliche, le decisioni diresti essersi a' nostri dì quasi esattamente rinovata la lunga e ce-

lebre contesa di *Leibnitz* con *Rolle*, *Gouye*, e *Nieuwentiit*. *Leibnitz*, e *Bernoulli* pratici nell'uso del loro nuovo metodo di calcolo, e pienamente sicuri della verità e importanza dei risultati poco curarono le obbiezioni metafisiche talvolta anche piccanti dei loro avversarj, e forse più che non avrebber fatto speculando con *Ermanno* risposte dirette e categoriche, giovarono alla scienza limitandosi ora a mostrarli in opposizione col fatto, ora a metterli in diffidenza dei loro stessi principj, ora ammettendo le premesse, e poi scambiando le conseguenze, ora in fine esortandoli loro malgrado a coltivare, e promuovere l'uso del nuovo metodo. Una simile difesa potrebbe per avventura in parte contrapporsi a molti fra gli argomenti, che *Wronski* ha tratti dalla sua pretesa Filosofia delle matematiche contro il metodo delle funzioni analitiche. Tra queste accuse però vi ha quella gravissima, che è l'unica di *Pasquitz*, per conto della quale non si farebbe più luogo a sutterfugj, nè a transazione, essere inesatta, e insussistente la dimostrazione di *La-Grange* di quella nota e generale trasformazione in serie delle funzioni, che è veramente il cardine, che tutto regge il nuovo edifizio analitico. La mancanza, in cui sembrami, resti tutt'ora il nuovo metodo di una compita difesa sopra questo punto, tenne me pure lungamente inquieto, e malcontento, finchè ritrovai il ragionamento, che ora esporrò, onde credetti di rassicurarmi, e di giustificare il principio di *La-Grange*.

2. Teorema. La trasformazione, o equivalenza $f(x+i) = f(x)+ip+i^2q+i^3r+$ec. nella quale $f(x)$ è una funzione qualunque della quantità variabile e indeterminata x, ed i una quantità essa pure arbitraria, e nella quale s'intende la quantità i esclusa dai coefficienti $f(x), p, q, r,$ ec., ed escluso pure dalla serie qualunque esponente fratto, negativo, e immaginario della quantità i, è generalmente vera e legittima.

Dimostrazione. Primieramente la funzione $f(x+i)$ si può decomporre in due parti $f(x)$, M tali, che sia $f(x+i)$

$=f(x)+\mathrm{M}$. Che una quantità qualunque possa riguardarsi come la somma di altre due, è verità così evidente, che non credo, sia d'uopo rintracciarne una dimostrazione in un apposito esame delle facoltà intellettuali, come *Wronski* ha creduto doversi fare nel nostro caso, e in tutti quelli, nei quali trattisi di metodi di calcolo fondati sopra l'algoritmo di sommazione. Così la funzione $f(x+i)$ esprimendo ciò, che diviene $f(x)$, quando in questa la variabile componente x riceve l'aumento i, stimo egualmente manifesto, che si possa stabilire per valor di essa il valor primitivo $f(x)$ più un aumento, o decremento M, che in essa risulta necessariamente in causa della variazione dell'elemento x, qualunque poi sia il modo, o la legge, con cui si opera nella funzione siffatto incremento, o decremento, potendosi qui con tutta ragione applicare quanto disse *Leibnitz* in un caso analogo ... *Nos in Geometria, aut analysi nostra minime habere opus controversiis methaphysicis de compositione continui .*

Ora è chiaro, che nell'equivalenza $f(x+i)=f(x)+\mathrm{M}$ la quantità M debb'essere di tal forma, che, fatto $i=0$, essa pure s'annulli. Dovrà dunque M essere della forma $i^h.\mathrm{P}$, dove h sia numero positivo, e'l massimo esponente di i, in M si contenga, e P funzione, che non divenga infinita per lo stesso valor di $i=0$, ossia non cresca a segno col scemar di i da impedire la condizione $i^h.\mathrm{P}=0$, quando $i=0$. Che l'esponente h debba essere positivo, è pur manifesto giacchè, se fosse negativo, col scemar di i la quantità $i^h\mathrm{P}$ crescerebbe, e non potrebbe annullarsi per $i=0$, come dee succedere. Resta a vedersi, se l'esponente h debb'essere inoltre reale, e intero.

Se fosse h immaginario della forma $m+n\sqrt{-1}$, sarebbe anche immaginario il termine $i^h.\mathrm{P}$. Di fatti non avendosi in P alcuna potenza dell'i per fattor comune, non sarebbe possibile l'elisione dell'esponente immaginario $n\sqrt{-1}$; poichè fra i, ed x nell'espressione $i^{m+n\sqrt{-1}}\mathrm{P}$ non ponno sperarsi riduzioni, essendo due quantità indipendenti fra loro, e indeterminate. Avressimo pertanto $f(x+i)-\surd(x)=i^{m+n\sqrt{-1}}P$, quantità essenzialmente immaginaria, ciò, che è assurdo, almeno quando $f(x)$ non sia essa stessa immaginaria.

Sia $f(x)$ immaginaria, e supponiamo, che in questo caso risulti $f(x+i)=f(x)+i^{m+n\sqrt{-1}}.P$; e quindi $\frac{f(x+i)-f(x)}{i^m.P}$ $=i^{n\sqrt{-1}}$. Qui il primo membro dovrà essere immaginario, altrimenti avressimo l'assurdo precedente. Avremo dunque un'equazione della forma $A+B\sqrt{-1}=i^{n\sqrt{-1}}$. Ma di qui seguirebbe $(A+B\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}=i^{-n}$, oppure $\frac{1}{n\sqrt{-1}}\log.(A+B\sqrt{-1})$ $=\log.i$, cioè l'assurdo ancora dell'uguaglianza di una quantità immaginaria ed una reale. È dunque impossibile, che risulti immaginario l'esponente h nella formola $f(x+i)$ $=f(x)+i^h.P$.

Supponiamo adesso $h=\frac{n}{m}$, cioè uguale ad una frazione reale, e positiva. Nell'equivalenza $f(x+i)=f(x)+i^{\frac{n}{m}}P$ il fattore $i^{\frac{n}{m}}$ avrà per ciascun valore, che ci piacerà dare all'indeterminata i un numero m di valori. Ora dico, che ciò è impossibile. Prima di tutto la funzione P per le condizioni già prescritte sarà della forma $p+i^k.Q$, p essendo funzione indipendente da i, k un esponente positivo, e la quantità $i^{\frac{n}{m}}.P$ resterà dopo la moltiplicazione una funzione multiforme in riguardo ad i almeno del grado m. Di qui siegue, che la funzione $f(x)$, e quindi anche $f(x+i)$ saranno radicali del grado stesso. Perciò nell'equazione $f(x+i)=f(x)+i^{\frac{n}{m}}P$ ciascuno degli m valori del termine $i^{\frac{n}{m}}.P$ dovrà combinarsi con un dato soltanto, e non con uno qualunque degli altrettanti valori di $f(x)$, e di $f(x+i)$.

Ciò posto, o si vuole m numero pari, o dispari. Se è pari $=2r$, s'immagini un valore di i negativo $=-i'$ tale, che

che non alteri che la grandezza dei valori di $f(x+i)$ lasciando reali quelli, che tali sarebbero per i positivo; del che nissuno dubiterà ponendo attenzione al modo d'esistere della quantità i nella funzione $f(x+i)$. In tal modo avressimo l'equazione $f(x-i')-f(x)=(-i)^{\frac{n}{2r}}.\mathrm{P}$, il cui primo membro sarebbe reale, e tutti i valori del secondo sarebbero immaginarj. Non potrà dunque nell'equivalenza $f(x+i)=f(x)+i^{\frac{n}{m}}.\mathrm{P}$ essere m numero pari.

Se m fosse dispari; rimanendo pure di grado dispari tutto il termine $i^{\frac{n}{m}}.\mathrm{P}$, ne seguirebbe, che la funzione $f(x)$, e $f(x+i)$ fosse pure di grado dispari. Ma se formiamo colla supposta quest'altra equivalenza $\sqrt{\{f(x+i)-f(x)\}}=i^{\frac{n}{2m}}.\mathrm{P}^{\frac{1}{2}}$, ci troviamo in istato di ridurre anche questo caso all'assurdo precedente. Dunque l'esponente h proposto non può essere numero fratto di denominator dispari. Abbiamo provato, che lo stesso esponente non può esser fratto a denominator pari, che non può essere negativo, nè immaginario. Sarà dunque numero intero, e positivo.

Collo stesso ragionamento si escluderanno potenze fratte, negative, e immaginarie dell'indeterminata i dai termini dell'ulteriore decomposizione $\mathrm{P}=p+i^k.\mathrm{Q}$, $\mathrm{Q}=q+i^g.\mathrm{R}$, ec., dalla quale risulterà perciò la serie della forma proposta.

II.

Del principio delle velocità virtuali, e del modo di evitarne l'uso, salvi gli stessi mezzi, e vantaggi analitici, che al medesimo si attribuirono.

L'amor del vero, e la brama di istruirmi mi sforzano a sottoporre al giudizio della Società anche le seguenti osservazioni, e una mia opinione analoga, sebbene qui mi stia a fronte l'autorità dei più distinti Geometri moderni, l'eccellenza di un principio, e di un metodo sopra ogni altro fecondo nella più importante, e più estesa parte delle Matematiche, in una parola, l'opera immortale della Meccanica analitica di *La-Grange*.

2. Nella moderna generale ordinazione delle Matematiche perchè si tenne ancora divisa la Statica dalla Dinamica analitica, e non si fece d'entrambe una scienza unica? Gli elementi della prima non ponno essere che una particolare determinazione degli elementi della seconda, e le formole di questa non si potrebbero aver per buone e generali, se il caso non comprendessero dell'equilibrio con tutti gli accidenti, che ad esso appartengono. La pratica stessa dei ragionamenti, che impiegansi nel premettere la Statica alla Dinamica, ci fa sentire questa verità colla irregolarità, e colla contraddizione almeno apparente del suo procedere medesimo. Perciocchè vedesi costretta a mettere in campo il ripiego di certo meccanico movimento fittizio infinitesimale, che diede occasione bensì alla scoperta d'insigni verità maravigliose, ma che lascia nel tempo stesso sussistere tutt'ora il desiderio di una chiara semplice ed unica dimostrazione del vincolo primitivo, e necessario, che ad esso lega siffatte proprietà, dimostrazione, che può dirsi non ancora conseguita, se si considera l'incostanza, la complicazione, e l'oscurità dei tentativi, che per essa sono stati fatti.

3. Ma perchè in quelle sue preziose applicazioni della Teorica delle funzioni analitiche alla Meccanica *La-Grange* non si diede pensiere di togliere il bisogno di sì indiretto artifizio, anzi per ben due volte ne richiamò l'uso egli stesso in mezzo al suo assunto di togliere al calcolo il bisogno del principio dell'infinito? Non va questo strettamente innestato col principio di quelle velocità generatrici dell'equilibrio? Oppure cambia natura e vien purgato dalle accuse, che gli si danno altrove, in virtù di siffatta combinazione,

o per l'aggiunta, che fassi a quelle velocità, del titolo, e qualità di virtuali? In tal modo ragionando faressimo per avventura del calcolo delle velocità virtuali un calcolo almeno soverchiamente peripatetico, cioè, non più diretto, nè più intelligibile del calcolo stesso infinitesimale.

4. La moltiplicità però, l'eccellenza, e l'importanza delle verità, che alla Statica appartengono; l'uso frequentissimo, e indispensabile, che ne richiedono le arti più utili, non permetterebbero, che sparse giacessero, e inviluppate in mezzo alle innumerevoli e lunghe quistioni della Dinamica, o coll'ordine delle formole Dinamiche, dalle quali dipendono, venissero come semplici corollarj ad una ad una separatamente dichiarate. La Statica non solamente per la somma utilità, e nobiltà del suo soggetto, ma pel vanto eziandio d'essere fra le parti della Matematica applicata quella, che ci offre il complesso scientifico più compito e perfetto, merita senza dubbio un distinto e tutto suo proprio trattamento. L'osservazione superiore non offende punto questi giusti titoli, e veri pregi della scienza dell'equilibrio, ma soltanto è diretta a mostrare, come sinora fu tenuta, dirò così, con artifizio veramente forzato e violento in posto non suo nelle opere di Meccanica razionale, a far sentire la necessità di restituirla nella sua sede nativa, di ricondurla alla sua primitiva e necessaria sorgente. Ecco ora una proposizione analitica geometrica semplicissima, che mi ha spinto in questo desiderio, e mi ha confermato nella fiducia di poterlo felicemente adempiere.

5. *Lemma*. Siano quanti punti si vogliono, le coordinate dei quali a tre piani dati ortogonali siano respettivamente $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$; ec. Da un altro punto di coordinate x, y, z siano tirate ai primi altrettante rette q, q', q'', q''', ec., le espressioni delle quali sappiamo essere $q=\sqrt{\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}}$, $q'=\sqrt{\{(x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2\}}$, $q''=\sqrt{\{(x-a'')^2+(y-b'')^2+(z-c'')^2\}}$, ec. Rappresentisi col simbolo solito d la differenziazione di queste espressioni

relativamente alle sole coordinate x, y, z, ossia dq, dq', dq'', ec. esprimano l'aggregato dei termini di prima dimensione risultanti dopo d'aver posto in ciascuna espressione $x+i$, $y+i'$, $z+i''$ in luogo di x, y, z, e dopo d'averla sviluppata in serie ordinata secondo le dimensioni di i, i', i'', le quali quantità s'intende inoltre, che siano indeterminate e arbitrarie. In fine dal punto corrispondente alle coordinate $x+i, y+i'$, $z+i''$ immaginando tirate le normali alle rette q, q', q'', ec., si esprimano i segmenti di queste rette compresi tra le normali, e'l punto di coordinate x, y, z con $\delta q, \delta' q', \delta'' q'', \delta''' q'''$, ec. Dico, che sarà $\delta q = dq$, $\delta' q' = dq'$, $\delta'' q'' = dq''$, ec., cioè, secondo l'algoritmo delle differenziali parziali, $\delta q = \left(\frac{dq}{dx}\right) i + \left(\frac{dq}{dy}\right) i' + \left(\frac{dq}{dz}\right) i''$, $\delta' q' = \left(\frac{dq'}{dx}\right) i + \left(\frac{dq'}{dy}\right) i' + \left(\frac{dq'}{dz}\right) i''$, ec.

DIMOSTRAZIONE. Sopra la retta, che congiunge il punto di coordinate x, y, z coll' altro di coordinate $x+i$, $y+i'$, $z+i''$ presa per diametro descrivasi la sfera. In essa rimarranno iscritti tutti i segmenti, dei quali si tratta. Considerando il primo δq, chiaminsi x', y', z' le coordinate del punto d'intersezione della retta q colla sfera oltre a quello di coordinate x, y, z: avremo le tre equazioni fra x', y', z' due proprie della retta, e la terza propria della sfera, $y' = y + \frac{y-b}{x-a}(x'-x)$, $z' = z + \frac{z-c}{x-a}(x'-x)$, $(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 - i(x'-x) - i'(y'-y) - i''(z'-z) = 0$; e'l segmento δq sarà $= \sqrt{\{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2\}}$. Dalle tre equazioni risulta $x' - x = (x-a)\frac{(x-a)i + (y-b)i' + (z-c)i''}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, $y' - y = (y-b)\frac{(x-a)i + (y-b)i' + (z-c)i''}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, $z' - z = (z-c)\frac{(x-a)i + (y-b)i' + (z-c)i''}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$; e con questi valori trovasi $\delta q = \frac{(x-a)i + (y-b)i' + (z-c)i''}{\sqrt{\{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}}}$ $= d.\sqrt{\{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}} = dq$, come si propose. Lo stesso si ritroverà per $\delta' q'$, $\delta'' q''$, ec.

6. Nella direzione delle rette q, q', q'', ec. concorrano ora altrettante forze Q, Q', Q'', ec. al punto stesso di coordinate x, y, z. Il principio della decomposizione, e composizione delle forze, supposto, che tra le precedenti per esempio $Q^{(n)}$ sia la risultante, ci dà la nota equazione $Q\delta q + Q'\delta' q' + Q''\delta'' q'' + \text{ec.} = Q^{(n)}\delta^{(n)} q^{(n)}$. Ma questa pel Lemma precedente prende subito l'aspetto ben più determinato, e più importante $Q dq + Q' dq' + Q'' dq'' + \text{ec.} = Q^{(n)} dq^{(n)}$, equazione tuttavia universale nella meccanica, la quale abbraccia tutti i casi dell'applicazione di più forze ad un punto dipendenti tanto dal valore, quanto dalla direzione, o dal valore e dalla direzione insieme di ciascuna, equazione perciò egualmente atta a servire all'analisi del movimento, e a quella dell'equilibrio, dei quali due casi generali il secondo altra modificazione non richiede, se non che facciasi la supposta risultante $Q^{(n)} = 0$, come è ben manifesto.

La proprietà dei segmenti superiori δq, $\delta' q'$, $\delta'' q''$, ec. d'essere tutti risultati analoghi della medesima differenziazione ordinaria $= dq$, $= dq'$, $= dq''$, ec. è la vera chiave unica dei vantaggi dell'equazione generale tra un sistema di forze applicate ad un punto, e la loro risultante, sì pel giusto numero di equazioni secondarie, che se ne derivano, quante, cioè, ogni Problema particolare può richiedere, come altresì pel modo mirabilmente semplice e spedito, che offre l'equazione stessa, di siffatta derivazione. Così nel caso dell'equilibrio, divenuta l'equazione $Q dq + Q' dq' + Q'' dq'' + \text{ec.} = 0$ si spezza tosto, attesi i valori arbitrarj, e indipendenti degli incrementi i, i', i'' delle variabili x, y, z prescritti di sopra, nelle tre $Q\left(\frac{dq}{dx}\right) + Q'\left(\frac{dq'}{dx}\right) + Q''\left(\frac{dq''}{dx}\right) + \text{ec.} = 0$, $Q\left(\frac{dq}{dy}\right) + Q'\left(\frac{dq'}{dy}\right) + Q''\left(\frac{dq''}{dy}\right) + \text{ec.} = 0$, $Q\left(\frac{dq}{dz}\right) + Q'\left(\frac{dq'}{dz}\right) + Q''\left(\frac{dq''}{dz}\right) + \text{ec.} = 0$.

Per dare all'equazione $Q\delta q + Q'\delta' q + Q''\delta'' q'' + \text{ec.}$ la forma ora trovata, o almeno per rendere questa forma stessa applicabile alla meccanica si credette, come accennai in principio, che i segmenti δq, $\delta' q'$, $\delta'' q''$, ec. avessero essenzialmente a riguardarsi come gli spazi, che in un tempo stesso infinitesimo dt percorresse nelle direzioni delle forze il punto mobile per un impulso opportuno, che malgrado l'equilibrio venisse dato al medesimo. Con che formandosi le velocità similmente differenziali $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dq'}{dt}$, $\frac{dq''}{dt}$, ec. del punto lungo le linee q, q', q'', ec., e osservando, che tali sarebbero appunto le velocità prodotte dalle forze liberamente operanti per un tempo t, si conchiuse l'equazione $Q\frac{dq}{dt}+Q'\frac{dq'}{dt}+\text{ec.}=0$, che si ritenne come simbolo essenziale, ed espressione caratteristica di una proprietà delle velocità virtuali. Se domandavasi, qual fosse codesto impulso opportuno, che il punto equilibrato doveva ricevere, acciocchè le velocità virtuali divenissero attuali, o attualmente calcolabili: tale, si rispondeva, che produca un moto minimo conciliabile colla disposizione del sistema, di cui il punto proposto forma parte, e colle condizioni particolari del Problema, come di ostacoli immobili, di linee o superficie resistenti; oppure un moto minimo qualunque, qualora tra le forze sollecitanti siasi tenuto conto anche delle resistenze. Ma in quest'ultimo stesso caso restava il dubbio, se fosse tuttavia possibile un sol moto il più picciolo immaginabile, che li conciliasse col sistema, non che un moto minimo qualunque; giacchè un sistema equilibrato appunto per questo non indica nè permette alcuna ipotesi di suo reale movimento. Oltr'a ciò mentre si percorressero quelli spazietti dq, dq', dq'', ec. sotto l'azione libera di ciascuna forza, cioè nel tempo dt, non sembra ben chiaro, se legittimamente si potrebbe supporre, come si fa, che restassero immuni da variazione i centri, le direzioni delle forze, e le forze stesse, o tra questi elementi avendo luogo variazione, se dovrebbe questa trascurarsi, e non piuttosto aversi riguardo almeno ai notabili cangiamenti, che anche nel tempo minimo dt potrebbero succedere nelle direzioni delle forze, e se le forze virtuali dQ, dQ', dQ'', ec. non avrebbero diritto di venire in calcolo al pari degli spazj dq, dq', dq'', ec.

Comunque sia di queste difficoltà, per noi la forma similmente differenziale relativamente alle coordinate del punto mobile dei segmenti δq, $\delta' q'$, $\delta'' q''$, ec. risultò da una semplicissima proprietà puramente geometrica, e dal solo principio della composizione, e decomposizione delle forze, il quale ci dà in quest'incontro una novella prova di occupare nella meccanica analitica lo stesso rango, che occupa nel calcolo il binomio di *Newton*, e il teorema di *Taylor*, nè ebbero a che fare col nostro intento velocità, o moto alcuno attuale nè virtuale. La dimostrazione precedente è altresì indipendente dall'infinito: poichè gli incrementi da noi assunti nella convenuta differenziazione altro non debbon essere che indeterminati e indipendenti. Se non che la nostra equazione è simbolicamente simile all'equazione delle infinitesime velocità virtuali, quantunque dedotta con tutt'altri principj, e ragionamenti. Gli incrementi i, i', i'' appunto per essere arbitrarj, si dirà, che ponno uguagliarsi alle differenze infinitesime dx, dy, dz, e allora la nostra equazione è la stessa equazione dei momenti infinitesimi, o delle velocità virtuali. Questo potrebbe farci sperare, che l'innovazione, di cui abbiamo osato gettare il fondamento, non sia per recare disturbo ai progressi della Meccanica analitica, potendo perfino servire a coloro stessi, che amano di proseguire per la via delle qualità occulte.

III.

Della misura dei Solidi, e delle loro superficie, quando i punti di queste son dati da equazioni fra tre coordinate.

7. Tra le formole più importanti dell'applicazione del calcolo alla Geometria superiore sono certamente da noverarsi le due note $\int\int z dx dy$, $\int\int dx dy \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz^2}{dx^2}\right) + \left(\frac{dz^2}{dy^2}\right)\right\}}$, delle quali si fa uso per la cubatura, e quadratura dei solidi, le cui superficie sono date da equazioni fra le coordinate x, y, z a tre piani ortogonali. Gli Autori per la pratica applicazione di queste formole prescrivono di sostituire il valor di una delle tre coordinate espresso per le altre mediante l'equazione della superficie curva, di eseguire una delle due integrazioni, indi d'introdurre il valor di una delle residue variabili tratto dall'equazione della linea, che dee circoscrivere la misura proposta, in fine di procedere all'ultima integrazione. Oltrecchè siffatta regola d'inverso operare non ben chiara apparisce nella diretta deduzione delle formole stesse come succeder dee nei metodi di calcolo esattamente reciproci; ha il difetto di nulla dire della funzione arbitraria, cui la prima integrazione sembra richiedere, e molto meno del modo di determinarla nei casi particolari. Queste difficoltà, trovai per esperienza, che soglion essere di non lieve imbarazzo ai principianti. Il perchè mi son fatto a cercare di bel nuovo la soluzione generale dei due problemi, di cui si tratta.

8. Problema. Sopra una base piana in NCfm di figura continua o discontinua sorge normale un solido cilindrico terminato superiormente da una superficie curva data per rispetto al pian della base stessa, e ad altri due piani normali fra loro, e colla base tirati pei due altri AX, AY. Cercasi l'espressione del solido cilindrico, e l'espressione della porzione di superficie curva da esso tagliata.

Solu-

Soluzione. Dimando prima di tutto, che si ammetta per dimostrato 1.° che se di tre quantità funzioni della stessa variabile i, $m+f(i)$, $h+f'(i)$, $m+f''(i)$ la prima e la terza hanno per limite comune m, e la seconda ha per limite h, e in oltre la seconda per qualunque valor di i ha la proprietà di avere un valore compreso fra i valori corrispondenti delle estreme; la seconda quantità avrà anch'essa per limite la quantità m, cioè sarà $h=m$. 2.° Che di due superficie concave dalla stessa parte iscritte in un medesimo parallelepipedo, che abbiano almeno un punto comune sopra uno spigolo, quella, che colla sua concavità guarda la convessità dell'altra, è la maggiore. Il primo postulato ammette la stessa dimostrazione della simile proprietà dei limiti costanti. Il secondo fu riconosciuto dalli stessi geometri antichi.

Sia $\mathrm{AP}=x$, $\mathrm{AP}'=x+i$, $\mathrm{CP}=y$, $h\mathrm{P}=y'$, $\mathrm{P}f=y''$, z l'ordinata della superficie curva, che termina in h, e siano $y=f(x)$, $y''=f'(x)$ le equazioni date delle curve NC, mf, che formano colle rette o ordinate mN, fC la base del cilindro proposto; e $z_{x,y_{\prime}}=f''(x,y')$ l'equazione della superficie pel punto, che ha per projezione h, quindi $z_{x,y}=f''(x,y)$ l'equazione del punto, che sovrasta al punto C. Il solido, che s'appoggia normale al quadrilineo $mf$CN$m$, sarà funzione delle coordinate dei quattro punti m, N, C, f, e delle ordinate z dei quattro punti corrispondenti della superficie curva: ma tranne quelle dei due punti m, N, e loro corrispondenti, che suppongonsi costanti, e date, le altre si riducono alla sola ascissa x, attese le equazioni, che fra esse abbiamo. Esprimeremo dunque il solido proposto colla funzione $\psi(x)$, quindi colla $\psi(x+i)$ il solido di base $ml$PN$m$, e perciò con $\psi(x+i)-\psi(x)$ il solido di base CD$lf$C.

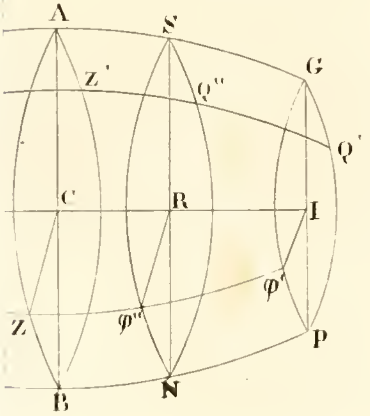
Tirisi hi parallela a PP', e alla distanza $gh=o$ arbitraria la parallela gk. Sia $f(x,i,y')$ il solido di base $flihf$, quindi $f(x,i,y'+o)-f(x,i,y')$ il solido di base hk. Per l'estremità superiore del minore dei quattro spigoli di quest' ultimo solido, che supporremo esser quello, che termina in h, cioè, l'ordinata $z_{x,y'}$, tirisi un piano normale, e un altro piano alla base pure parallelo facciasi passare per l'estremità superiore del maggiore spigolo, che supporremo essere $z_{x+i,y+o}$. Si determinano così due parallelepipedi $ioz_{x,y'}$, $ioz_{x+i,y'+o}$ uno maggiore, e l'altro minore del solido $f(x,i,y'+o)-f(x,i,y')$ per tutti i valori positivi di i, ed o di meno in meno al di sotto di limiti assegnabili. Sviluppando queste tre espressioni per le potenze di o avremo le tre $oiz_{x,y'}$, $o\left(\frac{dF}{dy'}\right)+\frac{o^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dy'^2}\right)+$ ec., $oiz_{x+i,y'}+o^2i\left(\frac{dz_{x+i,y'}}{dy'}\right)+$ ec., delle quali le due estreme saranno limiti della seconda per qualunque valor di o, e tali resteranno, tolto a tutte tre il fattore o. Ma in questo caso le due serie estreme hanno per limite comune la quantità $iz_{x,y'}$. Dunque $\left(\frac{dF}{dy}\right)$, che è limite analogo della serie media, sarà $= iz_{x,y'}$. Di qui integrando risulta $F(x,i,y')=i\int z_{x,y'}\,dy'=i\int z_{x,y'}dy'+i\varphi(x,i)$, essendo $\varphi(x,i)$ la funzione dovuta all'integrazione. Il solido $F(x,i,y')$ dovendo cominciare dalla curva fl, si annullerà la sua espressione, quando pongasi $y'=y''=f'(x)$. Questa sarà la condizione, colla quale determinerassi $\varphi(x,i)$. Eseguita in fine l'integrazione, si porrà $y'=y=f(x)$, e l'espressione risultante $F(x,i,y_x)$ rappresenterà il solido di base C$clf$C, in cui Cc è parallela a PP'.

Del solido superiore $\psi(x+i)-\psi(x)$ ci resterebbe da misurare la porzione, che ha per base il trilineo CDc; ma non sarà necessaria tutta questa operazione. Prolungando il solido residuo, e tagliandolo con due piani paralleli alla base alle estremità della più grande, e della più piccola delle tre ordinate $z_{x,y}$, $z_{x+i,y}$, $z_{x+i,y_{x+i}}$, formeremo i due solidi cilindrici CDc. z_{x,y_x}, CDc. $z_{x+i,y_{x+i}}$ maggiore l'uno, e l'altro minore del solido, di cui si tratta, e che chiameremo $F'(x,i,y_x)$. In oltre prolungando le ordinate CP, DP' della curva NS, tirando le tangenti dei punti C, D, e traspertando in Ce la tangente Dr formeremo i due triangoli Cce $=\frac{Cc \, . \, ce}{2}=\frac{i^2}{2}\frac{dy_{x+i}}{dx}$, C$cd=\frac{i^2}{2}\cdot\frac{dy_x}{dx}$, che saranno limiti del trilineo CDc: quindi il solido $F'(x, i, y_x)$ avrà altresì per limiti le due espressioni $\frac{i^2}{2}\cdot\frac{dy_x}{dx}\cdot z_{x+i, y_{x+i}}$, $\frac{i^2}{2}\frac{dy_{x+i}}{dx}\cdot z_{x, y_x}$, ossia $\frac{i^2}{2}\frac{dy}{dx}\cdot z_{x, y}+$ ec. Ora è facile vedere che ciò non può essere a meno che sia $F'(x, i, y_x)$ di seconda dimensione almeno, in riguardo ad i, cioè, della forma i^2M. Essendo pertanto $\psi(x+i)-\psi(x)=F(x, i, y_x)+F'(x, i, y_x)=i\int z'_{x,y'}dy'$ $+i\varphi(x, i)+i^2M=i\left\{\varphi(x, o)+\int z'_{x, y'}dy'\right\}+i^2\left(M+\frac{d\varphi(x,o)}{di}\right)$ $+$ ec., avremo $\frac{d\psi}{dx}=F(x, o, y_x)$, in fine $\psi(x)=\int dx F(x, o, y_x)$, cioè, uguale all'integrale della funzione trovata postovi i uguale a zero.

9. Ritenendo le denominazioni superiori, chiamando $\psi(x)$ anche la superficie, che sovrasta alla base $m$NC$f$, e le superficie, che sovrastano alle basi $hfli$, CcD esprimendo colle funzioni stesse $F(x, i, y')$, $F'(x, i, y_x)$ precedenti la porzione di base hk sarà $=F(x, i, y'+o)-F(x, i, y')$. Per le estremità delle due ordinate $z_{x,y'}$, $z_{x+i, y'+o}$ tiriamo ora i piani tangenti della superficie. Taglieranno questi il parallelepipedo, e le sezioni saranno due parallelogrammi espressi uno da $io\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz^2{}_{c,y'}}{dx^2}\right)+\left(\frac{dz^2{}_{x,y'}}{dy'^2}\right)\right\}}$ e l'altro da $oi\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz^2{}_{x+i,y'+o}}{dx^2}\right)+\left(\frac{dz^2{}_{x+i,y'+o}}{dy'^2}\right)\right\}}$, il primo maggiore della superficie iscritta nel parallelepipedo $F(x, i, y'+o)-F(x, i, y')$; poichè trasportando parallelamente a sè stesso il piano tangente, che passa per l'ordinata maggiore, fino a passare per l'estremità della minore, avremo i due parallelogrammi aventi sopra lo spigolo $z_{x,y'}$ un punto comune colla superficie, e l'uno sovrapposto, sottoposto l'altro alla superficie stessa. Sviluppan-

do queste tre espressioni in serie per le potenze di o, e ripetendo il ragionamento superiore ritroveremo $\mathrm{F}(x, i, y')$ $= i \int dy' \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dz^2{}_{x,y'}}{dx^2}\right) + \left(\frac{dz^2{}_{x,y'}}{dy'^2}\right) \right\}} + i \vec{\varphi}(x, i)$, dove $\vec{\varphi}(x, i)$ si determinerà, come sopra. Posto qui pure dopo l'integrazione $y' = y_x = f(x)$, avremo la superficie, che copre la base $\mathrm{C}flc\mathrm{C}$. Il resto a compiere l'espressione $\psi(x+i) - \psi(x)$ della superficie $\mathrm{C}fl\mathrm{DC}$, ossia la porzione sovrapposta al trilineo $\mathrm{C}c\mathrm{D}$ si troverà come il solido corrispondente della forma $i^2\mathrm{M}$. Dunque abbiamo $\psi(x+i) - \psi(x) = \mathrm{F}(x, i, y_x)$ $+ i^2\mathrm{M}$, ossia $\frac{d\psi(x)}{dx} = \mathrm{F}(x, o, y_x)$, in fine $\psi(x) = \int dx \mathrm{F}(x, o, y_x)$, superficie cercata.

ı Cossali nel Tomo XVII pag.240.


A
S
G
Z'
Q''
Q'
C
R
I
φ'
φ''
Z
P
B
N

e Magistrini nel Tomo XVII pag.460.

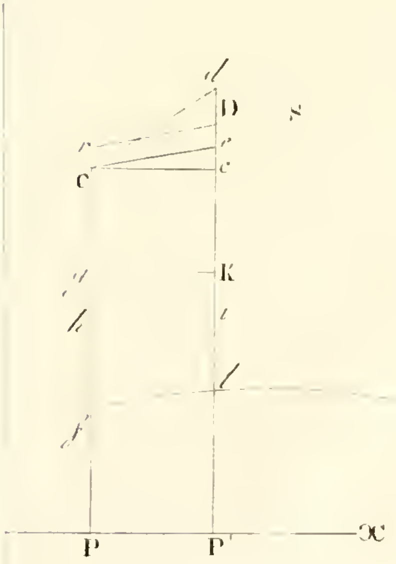

d
D
s
r
e
c
C
K
g
h
i
l
f
P
P'
x

Figura per la Memoria Cossali nel Tomo **XVII** *pag. 240.*

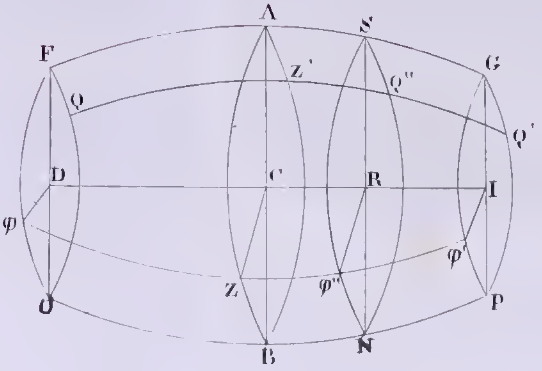
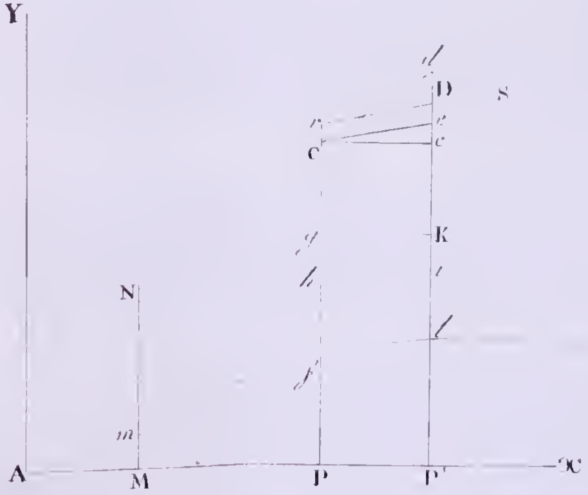

A
S
F
Z'
Q''
G
Q
Q'
D
C
R
I
φ
φ'
Z
φ''
O
P
B
N

Figura per la Memoria Magistrini nel Tomo **XVII** *pag. 460.*


Y
d
D
S
n
e
C
c
g
K
h
i
N
l
f
m
A
M
P
P'
x

Correzioni per la pag. 241 *de' Saggi di Meccan. e d'Alg. inseriti nel Vol. XVI della Societa' Italiana alla pag.* 223 *della Parte I.*

Pag.	Lin.	Errori	Correzioni
241	10, 11, 14	$\frac{Mh}{\lambda'}+Nk$	$\frac{Nh}{\lambda'}+Mk$.
id.	21	Nelle 7 linee che seguono bisogna rettificare alcune espressioni, che per altro non influiscono nell'esattezza della dimostrazione.	

Pongasi nell'espressione di P'' e di Q'', $\lambda'+k'$ per λ', $\varphi'+h'$ per φ'; s'indichi per M', N' la respettiva somma de' termini indipendenti da k' e da h' che risultano dalla variazione delle funzioni

$$\frac{Mk}{\lambda'}-Nh,\ \ \frac{Nh}{\lambda'}+Mk;$$

per M'', N'' le respettive somme de' termini che nelle variazioni di Mk, Nh, si trovano affetti da k', h'; e scrivendo per brevità λ'' per $\lambda'+k'$ si avranno due equazioni della forma seguente

$$P'''=P''+M'+M''\frac{k'}{\lambda''}-N''h'=0$$

$$Q'''=Q''+N'+N''\frac{h'}{\lambda''}+M''k'=0.$$

S'istituiscano l'equazioni

$$M'+M''\frac{k'}{\lambda''}-N''h'=\pm a$$

$$N'+N''\frac{h'}{\lambda''}+M''k'=\pm a';$$

quindi si deduca il valore di h' e di k' e risulterà

$$P''-P'''=P'-P'',\ \ Q''-Q'''=Q'-Q''.$$

ERRORI CONTENUTI IN QUESTA PRIMA PARTE (*)

Pag.	Linea	Errori	Correzioni
8	35	5^{26}	5^{36}
9	17, 19	6	b
31	18	$-\frac{av}{l}$	$-\frac{\Delta v}{l}$
35	14	$\left(\frac{dv}{d\Delta}\right)$	$\left(\frac{dv}{d\Delta}\right)\times$
38	21	perchè	pel che
45	1	$\frac{l}{m}$	$\frac{1}{m}$
52	1	$-\frac{1}{2}\Big)\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{\beta}{\psi-\lambda}\Big)^{-\frac{3}{2}}\Big\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{\alpha}{\lambda^2}+\frac{\beta}{(\psi-\lambda)_2}\Big)y^2$	$-\frac{1}{2}\Big(\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{\beta}{\psi-\lambda}\Big)^{-\frac{3}{2}}\Big\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{\alpha}{\lambda^2}+\frac{\beta'}{(\psi-\lambda)^2}\Big)y^2$
—	25	$\log.\frac{m\lambda}{\Delta}^{\frac{m\lambda}{\psi}}\left(\psi-\frac{m\lambda}{\psi}\right)^{1-\frac{m\lambda}{\psi}}$	$\log.\frac{m\lambda}{\Delta}\left(\psi-\frac{m\lambda}{\Delta}\right)^{1-\frac{m\lambda}{\psi}}$
60	8	$80^{chil.}$	80
63	11	BB	B'B'
67	17	alla quale	colla quale,
—	24	$\frac{F(z)^2}{f(x)}$	$\frac{F(z)^2}{f(z)}$
68	1	$+\frac{a^2}{A^3}\left(\frac{dv}{dt}\right)$	$-\frac{a^2}{A^3}\left(\frac{dv}{dt}\right)$
—	23	$\Delta\pi\alpha^2 l^{2n}+\Delta\Big\{-\frac{(2n+1)^2}{l^2}$	$\Delta\pi\alpha^2 l^{2n}v^2+\Delta\Big\{-\frac{(2n+1)^2v^2}{l^2}$

(*) Il Correttore, benchè conosca non aver da incolparsi d'incuria nella revision della stampa dei Manoscritti, dove, per difetto degli Amanuensi, trovansi alcune delle inesattezze, ora rettificate, e dove mancano certe aggiunte, che adesso vengono inserite dai respettivi Autori, ha chiesto ed ottenuto da questi la Nota completa degli Errori occorsi, onde pienamente corretta comparisca l'edizione di questo Tomo.

Pag.	Linea	Errori	Correzioni
68	25	$\frac{\Delta l^{2n+2}}{2n+2}$	$\frac{\Delta l^{2}}{2n+2}$
71	30	dall' acqua	dell' acqua
85	7	abbandonarli	abbandonarle
88	17	$\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$	$\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$
95	4	$x+6$	$x+C$
96	16	esercitava	eserciterà
98	22	OND, O'N'D'	OND, ON'D'
102	1	ad α	ad x
—	12	$-\frac{\left\{1+\left(\frac{dx}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}-z$	$-\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}-z$
244	17	$x=e$	$x=a$
246	4	$\frac{2a^2r-cen}{-2anr+ace}$	$\frac{-2a^2r-cen}{-2anr+ace}$
—	5	$-a^2cr$	$-a^2ce$
—	21	$-2a^3kr$	$-2a^2kr$
247	25	$\frac{-4as}{e}x$	$\frac{-2as}{e}x$
—	26	$\frac{-2nby}{e}$	$\frac{-2nsy}{e}$
248	35	nell' altra	nell' una, e nell' altra
250	2	$\frac{a(a-b)D}{k}$	$\frac{a(a-b)D}{k}y$
253	9	essendo	ed essendo
255	15	$4ah^2$	$4ak^2$
257	7	$+9a^2k^2$	$+9a^2h^2$
—	11	$\frac{+15k^3}{4a}$	$\frac{+15h^3}{4a}$
—	12	$\frac{-15k^2}{4k}$	$\frac{-15h^3}{4k}$
—	19	$\frac{15a^2h}{k}$	$\frac{15a^2h}{4k}$

Pag.	Linea	Errori	Correzioni
264	13	Sia il	Sia s il
266	10	nel tempo	nel tempo calcolato $\left(a-\frac{5}{1042}\right)''$
268	10	$\ldots\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-1\right)$	$\ldots.\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-1\right)$
269	1	$\ldots 8^m = 2^m \cdot 2^m$	$8^m = 2^m \cdot 2^m \cdot 2^m$
—	3 ult.	$m > 0$	m intiero e < 0.
286	7	$x^3 - 5x^2$	$x^3 + 5x^2$
293	32	tri.BCD$\mp\delta$:tri.ABD$\pm\delta$	tri.BCA$\mp\delta$:tri.ACD$\pm\delta$
294	21	$\Delta + \delta : s - \Delta - \delta$	$\Delta - \delta : s - \Delta + \delta$
296	2	è $> a' : a''$	è $< a' : a''$
304	1	P = 4 . 47 , 0	P = − 4 . 47 , 0
—	28	P = 2 . 25 , 3	P = 2 . 35 , 3
307	8	6 . 2 . 59 , 8	6 . 2 . 59 , 4
309	8	7 . 25 . 5 , 4	7 . 27 . 5 , 4
—	27	ds	ds'
317	25	6 = 2 . 55 . 45 , 1	6 = 2 . 11 . 28 , 7
—	ult.	15 . 16 , 6	15 . 6 , 6
318	2	$s' = 889'', 1$	$s' = 899'', 1$
320	10	16 . 54 . 4 , 1	16 . 54 . 41 , 0
—	13	214 . 18 . 3 , 0	213 . 48 . 44 , 7
326	ult.	8 . 9 . 65 , 3	8 . 9 . 55 , 3
328	10	307 . 9	207 . 9
330	31	38 . 58	30 . 58
331	9	− 4 . 59 . 34 , 3	− 5 . 28 . 48 , 6
333	2	303 , 3	300 , 3
—	30	38 . 17 , 1	35 . 17 , 1
336	14	198 . 2 . 7 , 5	298 . 2 . 7 , 5
—	22	16 . 22 , 8	14 . 42 , 8
—	25	16 . 27 , 8	14 . 47 , 8
339	14	4 . 6 . 33	4 . 6 . 33 , 7
340	9	che ne deduce	che se ne deduce

N.B. La longitudine delle stelle occultate che in ogni calcolo si è chiamata a si denomini α per non confonderla colle Longitudini di Luna.

Alla pag. 331 dirimpetto a *g* si ponga 61°.35′, e dirimpetto alla lettera *h*, 25°.28′.

PAG.	LINEA		ERRORI	CORREZIONI
349	17		*Bougner*	*Bouguer*
—	23		O, O'	O, O' (*Fig.* 2.)
352	34		MN	MN (*Fig.* 3.)
353	18		soffre	non soffre
355	32		8 Ottobre	8 Ottobre 1813
364	2	10	243.26.56,8	243.26.56,0
366	4	10	49.12	49.12.26
370	--	24	sia = B	sia = ρ
371	--	22	$\frac{\lambda}{r}$ sen. b	$\frac{R}{r}$ sen. b
372	--	3	facilmente	*si levi*
376	--	21	0,009574	0,009374
378	--	8	*d*	*t*
382	in testa alla I. Tav.			si aggiunga *per l'Ascensione retta* nella prima colonna, *per la declinazione* nella seconda colonna
389	--	3	del raggio vettore	del nodo ascendente
391	--	29	$\left(\cos.^2\varphi+\frac{r}{a}\right)$	$\left(\cos.^2\varphi+\frac{r}{a}\right)d\varphi$
392	--	3	+ 248,7	+ 240,7
—	--	18	509^s, 40	509^g, 40
393	--	21	+ 0,0935	+ 0,0975
394	--	15	eccentricità = −	eccentricità = +
396	--	15, 16	variazione.	variazione di 10″ nell' inclinazione.
399	--	15	+ 0′, 74	+ 0″, 74
400	6	5	294°, 38	294°, 38′
—	4	41	4, 2	5, 2
—	3	47	45, 4	46, 4
401	7	4	687, 4	687, 0

PAG.	COL.	LIN.	ERRORI	CORREZIONI
401	6	23	362	369
—	3	39	33 , 3	34 , 3
—	5	44	2 , 167022	2 , 167017
—	6	42	724	714
402	3	35	3 . 3 , 6	4 . 3 , 6
—	3	37	58 , 6	3 . 58 , 6
403	5	31	2 , 282440	2 , 282340
—	--	39	2 , 296458	2 , 296459
404	3	15	15 , 5	16 , 5
—	--	21	0 . 5 , 5	0 . 0 , 5
—	--	22	1 . 3 , 3	0 . 3 , 3
405	4	13	107 , 87	108 , 07
406	5	6	2 , 454393	2 , 494393
410	7	54	115 , 0	115 , 5
414	4	18	1966	1996
—	7	44	+ 425 , 0	+ 326 , 0
416	2	6	4 , 34	4 , 84

INDICE

DELLE COSE CONTENUTE IN QUESTA PRIMA PARTE.

Statuto della Società *Pag.* III
Catalogo de' Socj XI

Appendice alla Memoria sopra un nuovo metodo generale di estrarre le radici numeriche, del Sig. PAOLO RUFFINI I
Del movimento d'un fluido elastico che sorte da un vase, e della pressione che fa sulle pareti dello stesso, del Sig. OTTAVIANO FABRIZIO MOSSOTTI: presentata dal Sig. Cav. *Brunacci* 16
Sulle oscillazioni d'un corpo pendente da un filo estendibile, del Sig. PIETRO PAOLI 73
Sull'urto dei fluidi del Sig. VINCENZO BRUNACCI 79
Sopra l'equazioni primitive che soddisfanno all'equazioni differenziali tra tre, o un più gran numero di variabili, del Sig. PIETRO PAOLI 104
Sul moto discreto d'un corpo, ossia sopra i movimenti nei quali succedono di tempo in tempo delle variazioni finite, del Sig. ANTONIO BORDONI, presentata dal Sig. Cav. *Brunacci* 157
Sulla determinazione della capacità d'una botte, o elittico-circolare od elittico-elittica a fondi eguali, o disuguali, ed a parti anteriore, e posteriore simili, o dissimili, del Sig. D. PIETRO COSSALI 237
Soluzione di due problemi appartenenti alla teoria de' massimi, e minimi, del Sig. Cav. SEBASTIANO CANTERZANI 241

Seguito de' saggi di Meccanica, e di Algebra trascendente, del Sig. PIETRO FRANCHINI, presentata dal Sig. *Giuseppe Venturoli* *pag.* 262
Calcolo d'occultazioni di alcune stelle, e relative ricerche intorno alla posizione Geografica in longitudine dell'Osservatorio di Padova rispetto al meridiano di Parigi dell'Abate FRANCESCO BERTIROSSI-BUSATA, presentata dal Cav. *Cesaris* 299
Descrizione d'un nuovo micrometro, del Sig. GIANBATTISTA AMICI, presentata dal Cav. *Ruffini* 344
Teoria del nuovo Pianeta Vesta ricavata dalle opposizioni degli anni 1808-10-11-12-14 con le tavole per calcolare ad ogni istante la sua posizione geocentrica, del Sig. GIOVANNI SANTINI 360
Del modo di rendere men diffettosa che adesso e più comoda la stadera volgarmente detta Romana, del Sig. PIETRO FERRONI 417
Osservazioni varie sopra alcuni punti principali di Matematica superiore, del Signor GIO: BATTISTA MAGISTRINI 445
Errori scoperti nella Memoria Franchini nel Tomo XVI pag. 223, Parte I. 461
Errori scoperti in questa parte del Tomo 462

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY